【 56 】

氏　名	斎藤義実（さいとうよしみ）
学位の種類	理学博士
学位記番号	論理博第364号
学位授与の日付	昭和46年11月24日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**The principle of limiting absorption for second-order differential equations with operator-valued coefficients** （作用素を係数とする2階微分方程式に対する極限吸収原理）
論文調査委員	（主査）教授 松浦重武　教授 溝畑 茂　教授 吉田耕作

論文内容の要旨

ヒルベルト空間における作用素の中でも，理論と応用の両面から特に興味をひくものの一つとして，微分作用素からその定義域を適当に定める事によって得られる自己共役作用素がある。このような自己共役作用素の諸性質，特にそのスペクトルに関しては，種々の角度から多くの研究がなされて来た。たとえば，固有函数展開，摂動論，散乱理論などである。

申請者が論文でとり上げている"極限吸収原理"は，これらの種々の角度からの研究に際して広く用いられる方法である。ここで，あるヒルベルト空間における自己共役作用素 L（とそのヒルベルト空間の元 f）に対して極限吸収原理が成り立つとは，複素数 $z=\lambda+i\mu(\mu\neq 0)$ に対して $g_z=(L-z)^{-1}f$ が μ を 0 に近づけるときに適当な位相に関してその極限の存在する事を云う。一般には，任意の f については極限吸収原理が成り立たないが，適当な十分多くの元 f について成り立つ事が期待される。

申請者が取り扱っているのは，作用素を係数とする次の形の微分作用素 L である：

$$L=-\frac{d^2}{dr^2}+B(r)+C(r),\ r\in \mathrm{I}=(0,\ \infty).$$

ここで各 r に対して $B(r)$ と $C(r)$ とは一つのヒルベルト空間Xにおける作用素とする。微分作用素 L は，区間 $\mathrm{I}=(0,\ \infty)$ の上で定義されXの値をとる自乗可積分函数（のクラス）のなすヒルベルト空間 $L^2(\mathrm{I},\ \mathrm{X},\ dr)$ における作用素と考える。この微分作用の係数のうち，$B(r)$ は r に無関係な定義域Dをもつ Xの非負自己共役作用素とし，$C(r)$ は同じDで定義され対称作用素とする。$B(r)$ と $C(r)$ に適当な条件を課する事により，$C(r)$ を摂動項と見なして，この微分作用素 L について極限吸収原理を証明する事が申請論文の主たる内容をなす。

その応用として，申請者は n 次元ユークリッド空間 $i\mathbf{R}^n(n\geqq 3)$ における Schrödinger 作用素を考察している。Xとして $(n-1)$ 次元球面 S^{n-1} 上の自乗可積分函数のなすヒルベルト空間 $\mathrm{L}^2(\mathrm{S}^{n-1})$ をとり，Λ_n を S^{n-1} 上のラプラス・ベルトラミ作用素，$q(y)$ を n 次元ユークリッド空間 $i\mathbf{R}^n$ 上の実数値函数と

すれば，$n \geqslant 3$ のとき

$$\begin{cases} B(r)=\left(\dfrac{1}{r^2}-\Lambda_n+\dfrac{(n-1)(n-3)}{4}\right) \\ \mathrm{C(r)=q(r\omega)},\ \omega \in \mathrm{S}^{n-1} \end{cases}$$

とおく事により，微分作用素 L は $i\mathbf{R}^n$ における Schrödinger 作用素 $-\Delta+q(y)$ と（ユニタリー同値）になる。申請者は彼の証明した結果をこの場合に応用する事によって，ポテンシャル函数 $q(y)$ が $p(y)=O(|y|^{-1-\varepsilon})$, $(|y|\to\infty)$ という条件をみたすときには，$L^2(i\mathbf{R}^n, (1+|y|)^{1+\varepsilon}dy)$ に属するすべての f について，Schrödinger 作用素に対して極限吸収原理の成立する事を導いている。

また，これらの結果から，スペクトル構造（絶対連続性）が得られる事や散乱理論を展開する事が出来る事を示している。

論文審査の結果の要旨

申請者が極限吸収原理を取り扱っている立場は，W. Jäger の一連の研究（1967～1970）のそれを踏襲するものであるが，申請者は新しい手法を導入する事によってその仮定をゆるめて，しかも結果を望ましい形にまで精密化している。

また，n 次元ユークリッド空間における Schrödinger 作用素の場合について見ても，D. M. Eidus (1969) のポテンシャル函数に対する仮定

$$q(y)=O(|y|^{-\frac{n+1}{2}-\varepsilon})$$

に比べて，申請者はこれを次元に無関係な形

$$q(y)=O(|y|^{-1-\varepsilon})$$

に改良している。この結果は散乱理論における wave operator の存在への応用を考え合わせるときには，期待しうる最良の結果である。

なお，参考論文の1と2は，二階常微分作用素に対する固有函数展開（いわゆる一般展開定理）に関してのいくつかの考察である。参考論文の3は，常微分作用素に対する固有函数展開についての諸結果を，作用素を係数とする微分作用素 $-\dfrac{d^2}{dr^2}+A(r)$ の場合に拡張する試みであると同時に，主論文で取り扱っている作用素の特別な場合に対する研究とも見なす事が出来る。

これらの諸成果を見るとき，申請者は広い識見と高い研究能力を持っていると判断する事が出来る。

よって，本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。