

冷却原子気体ボース・アインシュタイン凝縮体
における乱流の理論的研究

(Theoretical study of turbulence
in cold atomic Bose-Einstein condensates)

理学研究科

数物系専攻

平成27年度

藤本 和也

(Fujimoto Kazuya)

論文要旨

本論文では、冷却原子気体 Bose-Einstein 凝縮体 (BEC) における量子乱流の理論研究を報告する。量子乱流研究はもともと超流動ヘリウムを舞台として行われてきた。しかし、近年、新しい量子流体である冷却原子気体 BEC においても乱流研究が行われるようになり、超流動ヘリウムにはない新しいタイプの量子乱流が実現している。本論文の研究は、この冷却原子気体 BEC において新奇な乱流現象を開拓し、その性質を明らかにすることを目的として行われた。研究内容とその結果の概要を以下に示す。

(i) スピン自由度を持つスピノール冷却原子気体 BEC における強い乱流

冷却原子気体 BEC では光学ポテンシャルを用いることで、スピン自由度を持つスピノール BEC が実現する。本研究は、この系の強い乱流を研究対象としており、ここではスピン渦やスピンドメイン壁のようなスピンの強く捻じれた構造が存在している。この乱流では、速度場だけではなくスピン密度ベクトルも空間的に乱れるため、この乱流をスピン乱流と呼ぶ。本論文では、基礎方程式としてスピン 1 スピノール GP 方程式を用いて、解析・数値的にスピン乱流の性質を調べた。その結果、乱流状態において種々の物理量の相関関数に特徴的なべき乗則が現れることを示し、さらにスピン振幅が大きい乱流と小さい乱流で明確な違いがあることを見出した。

前者のスピン振幅が大きい強磁性スピン乱流は、印加磁場なしの強磁性相互作用する系において実現する。本研究は、このスピン乱流においてスピン密度ベクトルの相関関数に $-7/3$ 乗則が現れることを明らかにした。一方、後者のスピン振幅が小さいスピン乱流は、反強磁性相互作用する系、もしくは磁場を印加した強磁性相互作用する系において実現する。この微小スピン振幅を持つスピン乱流では、強磁性スピン乱流とは異なり、スピン相関関数に低波数領域で -1 乗則、高波数領域で $-7/3$ 乗則が現れることが見出された。ただし、反強磁性相互作用する系では、 -1 乗則を数値計算で明確に確認することはできなかった。

また、速度場の相関関数は強磁性スピン乱流において調べられ、 $-5/3$ 乗則が現れることが示された。このべき指数は古典乱流の Kolmogorov 則と同じであるが、べき乗則が生じる機構は異なっており、スピン密度ベクトルの空間分布が重要な役割を果たしていることを明らかにした。

(ii) 冷却原子気体 BEC における弱い乱流

本研究は、研究 (i) とは対照的に非線形性が弱い乱流を研究対象としている。この乱流では、系の波動(素励起)が弱く相互作用する状況が実現しており、弱波動乱流となっている。本論文では、この弱波動乱流をスピン自由度を持たない 1 成分 BEC とスピン 1 強磁性スピノール BEC において調べた。

1 成分 BEC の弱波動乱流では、1 成分 GP 方程式と弱波動乱流理論を用いて、その性質を解析・数値的に研究した。この乱流は Bogoliubov 波が支配的な乱流となるので、本論文では Bogoliubov 波乱流と呼ぶ。本研究は、この乱流において Bogoliubov 波の波数分布、波動関数の相関関数、密度分

布の相関関数に特徴的なべき乗則が現れることを明らかにし、密度分布のべき乗則の実験観測の可能性を議論した。

一方、スピン1強磁性スピノールBECの弱波動乱流では、スピン波が支配的なスピン波乱流が実現する。本研究は、スピン1スピノールGP方程式と弱波動乱流理論を用いて、その性質を実験観測量であるスピン密度ベクトルと関連づけて調べた。その結果、スピン密度ベクトルの横方向の相関関数に特徴的なべき乗則が2つ現れうることを解析的に見出した。1つはダイレクトカスケードに対応する $-7/3$ 乗則であり、もう1つはインバースカスケードに対応する $-5/3$ 乗則である。数値計算では、これらのべき乗則を確認する計算を行い、解析計算と無矛盾な結果を得た。

Abstract

In this thesis, we report theoretical studies for quantum turbulence (QT) in cold atomic Bose-Einstein condensates (BECs). Originally, QT has been investigated in superfluid helium. However, recently, QT begins to be studied in atomic BECs, where new type of QT not being realized in superfluid helium is studied. The aims of studies in this thesis are finding novel turbulent phenomena in atomic BECs and understanding their properties. In the following, we show the overview of this thesis.

(i) Strong turbulence in atomic BECs with spin degrees of freedom

In experiments of atomic BECs, the optical potential enables us to make an atomic BEC with spin degrees of freedom which is called a spinor BEC. This study focuses on the strong turbulence in this spinor BEC, where the spin structures such as spin vortex and spin domain wall are nucleated. In this turbulence, not only the velocity field but also the spin density vector is much disturbed, so that we call it spin turbulence (ST). We analytically and numerically investigated ST by using the spin-1 spinor Gross-Pitaevskii (GP) equation, finding that ST exhibited the power laws characteristic of turbulence in correlation functions for some quantities. Furthermore, depending on whether the spin amplitude is large or not, ST was found to have the different power exponents.

The former ST with the large spin amplitude is realized in the ferromagnetic spinor BEC without the applied magnetic field. Our study revealed that, in this ferromagnetic ST, the correlation function for the spin density vector showed the $-7/3$ power law. On the other hand, the latter ST with the small spin amplitude is realized in the antiferromagnetic spinor BEC or the ferromagnetic spinor BEC with the applied magnetic field. In this case, we found that the spin correlation function could show the -1 power law in the low wave number region and the $-7/3$ power law in the high wave number region. However, in the antiferromagnetic spinor BEC, our numerical calculation could not confirm the clear -1 power law.

Also, the correlation function for the velocity field was investigated in the ferromagnetic ST, being found to show the $-5/3$ power law. This power exponent is same as the Kolmogorov law, but the mechanism generating the power law in ST is different from that in classical turbulence. Actually, in this study, we showed that the spatial structure of the spin density vector was important for the establishment of the $-5/3$ law in ST.

(ii) Weak turbulence in atomic BECs

In contrast to the study (i) addressing the strong turbulence, this research focuses on the weak turbulence where the nonlinearity is weak. In this turbulence, the waves (elementary excitations) in atomic BECs weakly interact with each other, where the weak wave turbulence (WWT) is realized.

In this thesis, we investigated WWT in the one-component BEC and the spin-1 ferromagnetic spinor BEC.

As for the one-component BEC, we used the one-component GP equation and the WWT theory, analytically and numerically studying the property of this WWT. In this turbulence, the Bogoliubov wave is dominant, so that we call this WWT the Bogoliubov wave turbulence. Our study concentrated on the wave number distribution of the Bogoliubov wave, the correlation function of the wave function, and the density correlation function, showing that these quantities had the power laws characteristic of the turbulence. Furthermore, we discussed the experimental observation of the power law of the density correlation function.

On the other hand, WWT in the ferromagnetic spinor BEC is comprised of weakly interacting spin waves, being spin wave turbulence. We applied the WWT theory to the spin-1 spinor GP equation, analytically deriving the two power laws in the transverse spin correlation function being experimental observable. The one is the $-7/3$ power law for the direct cascade and the other is the $-5/3$ power law in the inverse cascade. Our numerical calculation obtained the results consistent with the analytical results.

目次

第 1 章 序論	1
第 2 章 冷却原子気体 BEC と乱流の基礎理論	3
2.1 冷却原子気体 BEC の基礎理論	3
2.1.1 冷却原子気体とは	3
2.1.2 理想 Bose 気体の Bose-Einstein 凝縮	4
2.1.3 Bogoliubov 理論	5
2.1.4 1 成分 GP 方程式	8
2.1.5 1 成分 GP 方程式と流体力学	11
2.1.6 スピノール GP 方程式	13
2.1.7 スピン 1 スピノール GP 方程式と流体力学	18
2.2 古典流体の乱流理論	22
2.2.1 古典流体における乱流	22
2.2.2 乱流における統計量	24
2.2.3 K41 理論	27
2.2.4 弱波動乱流理論	29
2.2.5 乱流の定義	34
2.3 冷却原子気体 BEC における乱流の先行研究	35
2.3.1 GP 方程式を用いた理論研究	35
2.3.2 冷却原子気体 BEC の実験研究	36
第 3 章 強磁性スピノール BEC のスピン乱流	40
3.1 研究背景・動機	40
3.2 研究手法	41
3.3 対向流不安定性	42
3.4 スピン乱流におけるスピン相関関数	43
3.4.1 次元解析的スケールリングによる考察	44
3.4.2 数値計算結果	47
3.5 スピン乱流における速度相関関数	49
3.5.1 次元解析的スケールリングによる考察	49
3.5.2 数値計算結果	51
3.6 捕獲ポテンシャル系のスピン乱流	55
3.7 非凝縮成分の効果	58

3.8	まとめと課題	59
第4章	微小スピン振幅を持つスピノール BEC のスピン乱流	60
4.1	研究背景・動機	60
4.2	研究手法	61
4.3	対向流不安定性	61
4.4	スピン乱流におけるスピン相関関数	62
4.5	数値計算結果	66
4.5.1	反強磁性スピン乱流	66
4.5.2	磁場印加による微小スピン振幅を持つスピン乱流	68
4.6	まとめと課題	70
第5章	1成分 BEC における Bogoliubov 波乱流	71
5.1	研究背景・動機	71
5.2	研究方法	73
5.3	GP 方程式への弱波動乱流理論の適用	73
5.3.1	大きな凝縮体と揺らぎの方程式	74
5.3.2	ハミルトニアンに対角化	75
5.3.3	Bogoliubov 波の運動論的方程式	76
5.3.4	低波数領域における Bogoliubov 波の相互作用	78
5.3.5	Bogoliubov 波乱流におけるべき乗則の導出	79
5.4	数値計算結果	82
5.5	先行研究との比較	85
5.6	まとめと課題	87
5.7	付録	88
第6章	強磁性スピノール BEC におけるスピン波乱流	92
6.1	研究背景・動機	92
6.2	研究手法	93
6.3	弱波動乱流理論の適用	93
6.3.1	強磁性スピン流体方程式と揺らぎ	93
6.3.2	スピン波の正準方程式	95
6.3.3	スピン波の運動論的方程式	96
6.3.4	スピン波乱流におけるスピン波の波数分布	97
6.3.5	スピン波乱流における横方向のスピン相関関数	99
6.4	数値計算結果	100
6.4.1	ダブルカスケード	100
6.4.2	インバースカスケードにおける $-5/3$ 乗則	104
6.4.3	ダイレクトカスケードにおける $-7/3$ 乗則	108
6.5	まとめと課題	110

6.6 付録	110
第 7 章 結論と今後の展望	113
7.1 各章のまとめと結論	113
7.2 今後の展望	114

第1章 序論

本博士論文では、冷却原子気体 Bose-Einstein 凝縮体 (BEC) における乱流の理論的研究について述べる。特に、筆者が中心になって研究を遂行した「スピン自由度を持つスピノール冷却原子気体 BEC における強い乱流」と「冷却原子気体 BEC の波動が支配的な弱い乱流」の研究結果について、冷却原子気体 BEC と乱流の基礎理論を解説しつつ、その詳細を示す。ここでは、本研究の背景と動機、及び本論文の構成について概説する。

1995 年に極低温冷却原子気体 BEC が実現されて以降 [1-3]、この系で数多くの理論・実験研究が行われてきた。その大部分を占める研究は平衡状態とそこから少しずれた線形ダイナミクス (素励起, 集団励起) が主流であった。ところが、近年、非線形性が本質的な役割を果たす非平衡ダイナミクスが実験、理論両面から活発に研究されるようになった。例えば、Kibble-Zurek 機構による位相欠陥生成 [4-7]、孤立系における熱平衡化ダイナミクス [8-10]、流体力学的不安定性 [11, 12]、量子乱流 [13-15] などが様々な視点で精力的に研究されている。このような多彩な非平衡ダイナミクスの研究は、極低温冷却原子気体が次の特徴を持つために可能となっている。

- 外部環境と隔絶した、不純物を一切含まないクリーンな系であること
- スピンに代表される内部自由度を持つ多彩な BEC を実現できること
- 既存のシステムに類を見ない高い実験制御性と光学技術を用いた優れた観測が行えること

このため、冷却原子気体は基礎的な非平衡ダイナミクスを研究する上で優れたシステムとなっている。実際、孤立系の熱平衡化ダイナミクスのような冷却原子気体でのみ実験可能な現象があり、冷却原子気体における非平衡ダイナミクス研究の学問的意義は大きい。

非平衡ダイナミクスという様々な現象があるが、その中でも平衡状態から十分離れた非線形性を伴う大自由度系の非平衡現象に乱流がある。乱流は私たちの身近でおきるなじみ深い現象であり、基礎科学としてだけでなく工学的な応用も含めてその理解が求められている。Leonardo da Vinci の時代から研究が始まり、Navier-Stokes (NS) 方程式に従う古典流体を中心に膨大な数の研究者が数百年間にわたり研究を行ってきた。しかし、その理解は十分には進展しておらず、例えば乱流現象の予測や制御ができていないのが現状である。そのため、乱流は現代物理学の未解決問題の 1 つとして知られている [16-19]。

このような古典流体で研究されてきた乱流現象は量子流体でも現れ、量子乱流と呼ばれている [20-24]。もともとは、超流動ヘリウムで研究が始まり、1957 年の Vinen による熱対向流実験の先駆的研究 [25-28] を起源として、古典乱流にはない興味深い物理が数多く見出されてきた。例えば、量子乱流では量子渦という安定な位相欠陥が生成し、それによる量子渦系タンブルが形成されること [29, 30] や常流動と超流動による 2 流体結合現象 [20, 31, 32] などがある。さらに、最近では古典流体においては不明

瞭な渦が、量子流体では量子渦として明確に定義できるため、量子乱流は古典乱流よりもシンプルな乱流の雛形になりうる可能性が提案されている。このように量子乱流では、新奇な物理現象の発見とともに古典乱流の理解を深めるような研究が行われ、低温物理学の枠を超えて他分野にも影響を与える学際的研究になりつつある。

近年、このような量子乱流が新しい量子流体である冷却原子気体 BEC を舞台として研究されるようになった [13–15]。この系は超流動ヘリウムにはない特徴を持つため、これまで行われてきた研究とは一線を画すような、新しい方向性を量子乱流研究に与える可能性を秘めている。これは、上記に挙げた冷却原子気体の性質により、実験において以下に示す操作・観測ができるためである。

- (1) システムの次元操作
- (2) 内部自由度を持つ多成分 BEC の実現
- (3) 密度分布などの局所的な物理量の観測

これら (1)~(3) のため、現在、冷却原子気体 BEC の量子乱流研究は新しい展開を見せている。例えば、性質 (1) より、超流動ヘリウムでは困難な 2 次元系量子乱流が実現できる。最近の理論研究の多くは、このタイプの量子乱流を Gross-Pitaevskii (GP) 方程式を用いて研究しており [33–44]、さらには実験的にも実現している [14, 15]。このように、冷却原子気体 BEC でのみ実現する量子乱流の研究が行われ、量子乱流の次元依存性が追及されている。さらに性質 (2) より、2 成分 BEC [45, 46] やスピノール BEC [45, 47–49] を舞台とした多彩な量子乱流が実現できる。超流動ヘリウム 3 の A, B 相 [50] は多成分量子流体となるが、多成分超流体の観点からの乱流研究は行われていない。そのため、多成分 BEC の量子乱流は超流動ヘリウムにはない冷却原子気体に新奇な物理を開拓する可能性を秘めた、魅力的な研究テーマになりうる。このタイプの乱流の実験研究はないが、流体力学的な不安定性は既に 2 成分 BEC で研究されており、今後の発展に期待ができる [11, 12, 51–53]。最後に、性質 (3) より密度分布、スピン密度ベクトルなどの物理量の空間変化を直接測定することが可能となり、量子渦やスピン渦の配置を観測することができる [4, 54–56]。そのため、種々の物理量の相関関数を測定することができ、乱流研究をする上で性質 (3) は大きな利点となる。

また、乱流には波動が支配的な弱波動乱流が存在する [57–61]。冷却原子気体 BEC では、この波動は基底状態まわりの素励起に対応しており、そのような素励起による乱流を考えることができる。この系では、1 成分 BEC だけでなく、2 成分、スピノール、ダイポール BEC があり、密度波励起やスピン波励起などの多種多様な素励起が存在する。そのため、この系では多彩な弱波動乱流が実現でき、このタイプの乱流を研究する上でも適した系となっている。

このような背景のもと、冷却原子気体における新奇な乱流現象を開拓し、その特徴を明らかにするため、筆者は「スピン自由度を持つスピノール冷却原子気体 BEC における強い乱流」と「冷却原子気体 BEC の波動が支配的な弱い乱流」の研究を行った。

本論文では、初めの第 2 章において冷却原子気体 BEC と乱流の基礎理論について解説する。ここで、本論文にまとめられた研究内容を理解する上で必要となる基礎を示す。第 3, 4 章では「スピン自由度を持つスピノール冷却原子気体 BEC における強い乱流」、第 5, 6 章で「冷却原子気体 BEC の波動が支配的な弱い乱流」に関する研究結果について示す。第 7 章で本論文の結論を述べる。

第2章 冷却原子気体 BEC と乱流の基礎理論

本論文では、冷却原子気体 BEC における乱流の研究結果について示す。本章では、この結果を理解する上で必要となる「冷却原子気体 BEC の基礎理論 (2.1 節)」、「古典流体の乱流理論 (2.2 節)」、「冷却原子気体 BEC における乱流の先行研究 (2.3 節)」について解説する。

2.1 冷却原子気体 BEC の基礎理論

本節では、冷却原子気体 BEC の基礎理論、特に絶対零度で有効な平均場理論について概説する。まず初めに、2.1.1 項において冷却原子気体を簡単に紹介する。その後、2.1.2 項で粒子の統計性について触れて、理想 Bose 気体の Bose-Einstein 凝縮について述べる。続いて、Bogoliubov 理論を 2.1.3 項で説明した後、2.1.4 項で本研究の基礎となる 1 成分 GP 方程式を導出し、それから得られる流体力学方程式を 2.1.5 項で解説する。2.1.6 項では、スピン自由度を持つ冷却原子気体について述べ、スピノール GP 方程式を導出する。最後に、2.1.7 項においてスピン 1 スピノール GP 方程式と等価なスピン流体方程式を示す。

2.1.1 冷却原子気体とは

冷却原子気体とは、真空中にレーザー光で捕獲した極低温・極低密度の原子集団である。様々な冷却方法を駆使することで Bose-Einstein 凝縮が起き [1-3]、1995 年に E. Cornell, C. Wieman 達 [1] により初めて冷却原子気体 BEC が実現されて以来、様々な量子凝縮現象が実験・理論の両面から研究されてきた。この系の特徴の 1 つは光学技術を用いた高い操作性にあり、例えば系の次元、サイズ、粒子数、さらには Feshbach 共鳴を用いて粒子間相互作用を制御することができる [45, 47, 62]。その結果、量子渦の直接観測 [63]、BEC-BCS クロスオーバー [64]、孤立系の熱平衡化 [8-10] といった従来の凝縮系物理学では到達できなかった領域に踏み込めるようになった。

実験で用いられる原子としては、アルカリ金属、アルカリ土類金属が代表的である。具体例としては、 ^{87}Rb 、 ^{85}Rb 、 ^{23}Na 、 ^{41}K などがある。第 1,2 族以外の原子としては、 ^{52}Cr 、 ^{164}Dy 、 ^{168}Er などがある。実験では、これらの原子を電場や磁場を用いて真空中に捕獲し、レーザー冷却、蒸発冷却などを用いて Bose-Einstein 凝縮を観測している [45]。

初期の実験では原子の持つスピンを利用して、原子を真空中に捕獲していた。例えば、 ^{87}Rb 、 ^{85}Rb 、 ^{23}Na は電子スピン $S = 1/2$ と核スピン $I = 3/2$ を持ち、全スピンの $F = 1, 2$ となる。これらのスピンは Zeeman 効果により磁場と相互作用するため、磁場を印加することで原子を捕獲することが可能となる。この場合、磁場と平行もしくは反平行のスピンを持つ原子だけを捕獲するので、真空中の原

2.1 冷却原子気体 BEC の基礎理論

子のスピンは一方向に整列してしまい、事実上スピン自由度は凍結してしまう。その結果、初期の実験ではスピン自由度を持たないスピンレス Bose 粒子の BEC が実現していた。

その後、スピン自由度が凍結しない捕獲方法として、原子の分極を利用した光学ポテンシャルが開発された。この方法では、原子の分極と電場との相互作用を利用するので、スピンは整列せずスピン自由度が生き残る。このようにして、スピノール BEC と呼ばれるスピン自由度を持つ冷却原子気体 BEC が実現しており [65]、原子としては ^{87}Rb 、 ^{23}Na 、 ^{52}Cr 等が用いられている。このうち ^{52}Cr の BEC は磁気双極子双極子相互作用が比較的強く、スピノールダイポール BEC と呼ばれることがある [66, 67]。

このように冷却原子気体 BEC では多彩な BEC が実現しており、様々な量子現象が研究されている。本論文では、特に流体力学的な視点からの研究を示す。以下では、本論文を読む上で必要不可欠な基礎的な理論について解説する。本節では、スピン自由度を持つ Bose 粒子は、2.1.6 項と 2.1.7 項でのみ扱うので、それ以外の項では特に断らない限りスピン 0 の Bose 粒子を取り扱う。

2.1.2 理想 Bose 気体の Bose-Einstein 凝縮

物質は複数の粒子により構成されている。例えば、水は水素、酸素から構成され、水素のような原子は電子、陽子、中性子から、さらに陽子、中性子などの核子はクォークから成る。一般に、このような粒子は Bose 粒子と Fermi 粒子と呼ばれる 2 種類の粒子に分類することができ、その違いは量子状態の占有数に関する統計性に現れる。具体的には、Bose 粒子は同じ量子状態に任意の数の粒子が占有できるのに対して、Fermi 粒子は 1 つの量子状態に 1 つの粒子のみが占有できるという違いがある。その結果、粒子の平均粒子数の分布関数に顕著な違いが生まれる。

粒子間相互作用のない理想 Bose 気体と理想 Fermi 気体を考えると、エネルギーが ϵ である 1 粒子量子状態を占有する平均ボーズ粒子数 $n_B(\epsilon)$ と平均フェルミ粒子数 $n_F(\epsilon)$ は、

$$n_B(\epsilon, \mu) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} \quad (2.1)$$

$$n_F(\epsilon, \mu) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \quad (2.2)$$

と与えられ、これらをそれぞれ Bose, Fermi 分布関数と呼ぶ。Fermi 分布関数は、自明であるがパウリの排他律を反映して、 $n_F(\epsilon) \leq 1$ を満たす。一方、Bose 分布関数にはこのような制限はなく、同じ量子状態にいくらかでも粒子が占有することができる。ただし、 $n_B(\epsilon) \geq 0$ のため、化学ポテンシャルは常に 1 粒子基底状態のエネルギー ϵ_{\min} より小さい。

Bose 粒子系では、この統計性から一つの状態を全粒子数 N に比例する大多数の粒子が占有する Bose-Einstein 凝縮が生じる。これは Einstein により一様な理想 Bose 気体において生じることが示された [68]。その後、Penrose と Onsager により相互作用のある Bose 粒子系にも適用できる、より一般的な Bose-Einstein 凝縮の定義が議論され、非対角長距離秩序が Bose-Einstein 凝縮の本質であることが見出された [69]。本項では、まずシステムサイズが $L \times L \times L$ の周期境界条件を課した一般的な 3 次元系における全粒子数 N 、質量 M の理想 Bose 気体の Bose-Einstein 凝縮について説明する。

Bose-Einstein 凝縮が起きるとき、大多数の粒子が 1 粒子基底状態を占有するため、化学ポテンシャルは 1 粒子基底状態のエネルギー ϵ_{\min} と等しくなければならない。今、一様な理想 Bose 粒子系を考

2.1 冷却原子気体 BEC の基礎理論

えているので、 $k_n = 2\pi n/L$ を離散化された波数として、1 粒子状態のエネルギーは $\epsilon_n = \hbar^2 k_n^2 / 2M$ とかける。したがって、 $\epsilon_{\min} = 0$ となり、転移温度 T_c 以下で $\mu = 0$ となる。このとき、系のサイズを十分大きくとると、転移温度以下の励起粒子数 N_{ex} は、

$$N_{\text{ex}}(T) = \int_0^\infty D(\epsilon) n_B(\epsilon, \mu = 0) d\epsilon \quad (2.3)$$

と書ける。ここで、 $D(\epsilon) = VM^{3/2}\epsilon^{1/2}/\sqrt{2\pi^2\hbar^3}$ は状態密度である。式 (2.3) を導くために波数を連続変数としたが、この連続極限に関しては文献 [70, 71] で詳細に解説されている。

転移温度 T_c は、 $T = T_c$ で全ての粒子が励起状態を占有している条件から求められる。したがって、転移温度 T_c を決める条件式は、

$$N_{\text{ex}}(T_c) = N \quad (2.4)$$

となる。これを T_c について解くと、

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{Mk_B} \left(\frac{N}{\zeta(\frac{3}{2})V} \right)^{2/3} \quad (2.5)$$

と求められる。ここで、 $\zeta(x)$ は Riemann zeta 関数である。

転移温度のオーダーは、粒子の熱的 de Broglie 波長 $\lambda_{\text{th}} \sim h/\sqrt{2Mk_B T}$ と平均粒子間距離 $l \sim (V/N)^{1/3}$ が等しくなる条件からも求められる。その結果、

$$T_c \sim \frac{\hbar^2}{Mk_B} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3} \quad (2.6)$$

が得られる。熱的 de Broglie 波長は粒子性と波動性を結びつける量であるため、転移温度は粒子の波動性が顕著に現れてくる特徴的な温度と解釈できる。さらに温度が下がると熱的 de Broglie 波長が系全体に渡って広がり、巨視的な波動が形成される。詳細は 2.1.4 項で述べるが、これは巨視的波動関数と呼ばれ、Bose-Einstein 凝縮を起こした系はこの関数によってよく記述される。

2.1.3 Bogoliubov 理論

前項では、粒子間相互作用がない理想 Bose 気体における Bose-Einstein 凝縮について述べた。本項では、粒子間相互作用が弱い希薄な Bose 気体を考えたときに、絶対零度においてどれだけの粒子が波数ゼロの状態を占有するかを計算し、その物理的意味について述べる [45, 47, 62, 72, 73]。考える系は前項と同じく、システムサイズが $L \times L \times L$ の周期境界条件を課した一様な 3 次元系である。

まず、系を記述する有効ハミルトニアンを導出する。絶対零度近傍の希薄 Bose 気体では、平均粒子間距離が s 波散乱長 a_s よりも十分大きく、低エネルギーの散乱が支配的になる。このとき、粒子間相互作用は 2 体相互作用が重要な役割を果たし、その関数形は有効的に、

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.7)$$

2.1 冷却原子気体 BEC の基礎理論

と書ける¹．ここで， $g = 4\pi\hbar^2 a_s / M$ である．したがって，この系を記述する有効ハミルトニアンは，

$$\hat{H} = \int dr \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \right) \hat{\psi}(\mathbf{r}) + \frac{g}{2} \int dr \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \quad (2.8)$$

となる．ここで， $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})$ ， $\hat{\psi}(\mathbf{r})$ は Bose 場の生成・消滅演算子である．

今，一様系を考えているので場の演算子を平面波で展開する．

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (2.9)$$

$$\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (2.10)$$

$\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ ， $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ は，波数 \mathbf{k} をもつ Bose 粒子の生成・消滅演算子である．これらをハミルトニアン (2.8) に代入すると，

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_0(\mathbf{k}) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{g}{2V} \sum_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_3} \hat{a}_{\mathbf{k}_4} \quad (2.11)$$

が得られる．ただし， $\epsilon_0(\mathbf{k}) = \hbar^2 k^2 / 2M$ である．

以下，Bose-Einstein 凝縮が起きている状況を考える．このとき， $O(N)$ で凝縮している状態は波数 $\mathbf{k} = 0$ の状態であるので，近似的に演算子 \hat{a}_0 を c-数として扱える．なぜなら， \hat{a}_0 と \hat{a}_0^\dagger の交換関係から生じる ± 1 は， $O(N)$ で凝縮している粒子数に大きな影響を及ぼさないためである．したがって，演算子 \hat{a}_0 ， \hat{a}_0^\dagger を c-数 $\sqrt{N_0}$ に置き換える近似が有効となる．これを Bogoliubov 近似という．すると，ハミルトニアン (2.11) は，

$$\hat{H} = \frac{gN_0^2}{2V} + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} (\epsilon_{\mathbf{k}}^0 + 2g\rho_0) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{g\rho_0}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}}) \quad (2.12)$$

となる．ただし， $\rho_0 = N_0/V$ である．ここで，有限波数の状態を占有している粒子数は少ないとして，演算子の 2 次の項までを残す近似を用いた．全粒子数の演算子 \hat{N} は，

$$\hat{N} = \int dr \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \quad (2.13)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \quad (2.14)$$

$$\simeq N_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \quad (2.15)$$

である．これを用いて，ハミルトニアン (2.12) を書き換えると，

$$\hat{H} = \frac{gN^2}{2V} + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} (\epsilon_0(\mathbf{k}) + g\rho_0) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{g\rho_0}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}}) \quad (2.16)$$

となる．ここで，演算子 \hat{N} をその期待値 N で置き換えた．式 (2.16) は，生成，消滅演算子の 2 次

¹この近似は，遠距離で働く Van der Waals 相互作用のような r^{-6} 型のときに有効である．磁気双極子双極子相互作用に現れるような r^{-3} 型では，この s 波散乱長への置き換えは良い近似でなくなる．

2.1 冷却原子気体 BEC の基礎理論

形式となっているので，Bogoliubov 変換を用いて容易に対角化できる．その結果，次式が得られる．

$$\hat{H} = \frac{gN^2}{2V} + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \epsilon_0(k) \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} (\epsilon_0(k) + g\rho_0 - \epsilon_b(k)) \quad (2.17)$$

ここで，

$$\epsilon_b(k) = \sqrt{\epsilon_0(k)^2 + 2g\rho_0\epsilon_0(k)} \quad (2.18)$$

である． $\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$ ， $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ はエネルギー $\epsilon_b(k)$ の Bogoliubov 準粒子の生成・消滅演算子であり，

$$\hat{b}_{\mathbf{k}} = u_k \hat{a}_{\mathbf{k}} + v_k \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \quad (2.19)$$

$$\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger = u_k \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + v_k \hat{a}_{-\mathbf{k}} \quad (2.20)$$

と書ける．ただし，

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_k}{\epsilon_b(k)} + 1 \right) \quad (2.21)$$

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_k}{\epsilon_b(k)} - 1 \right) \quad (2.22)$$

である．ここで， $\xi_k = \epsilon_0(k) + g\rho_0$ である．この Bogoliubov 係数 u_k ， v_k は，Bogoliubov 変換が正準変換であることを要請することにより得られる¹．

ハミルトニアン (2.17) より，絶対零度で実現する状態，つまり基底状態 $|\psi_g\rangle$ は Bogoliubov 準粒子が励起されていない状態となる．したがって，基底状態は，

$$\hat{b}_{\mathbf{k}} |\psi_g\rangle = 0 \quad (2.23)$$

を満足する．

以上の結果を用いて，絶対零度で有限波数 $\mathbf{k} \neq 0$ の状態にどれだけの粒子が占有しているかを計算する．全粒子数の演算子 (2.15) に Bogoliubov 変換 (2.19)–(2.22) を行うと，

$$\hat{N} = N_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} v_k^2 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} (u_k^2 + v_k^2) \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \quad (2.24)$$

となる．これを基底状態 $|\psi_g\rangle$ で平均をとると，

$$N = N_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} v_k^2 \quad (2.25)$$

が得られる．ここで，(2.23) を用いた．式 (2.25) の右辺第 2 項が絶対零度において有限波数の状態

¹ $\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$ と $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ が Bose 粒子の交換関係を満たすことを要請する．

2.1 冷却原子気体 BEC の基礎理論

を占有している非凝縮成分の粒子数 N_{de} である．これを具体的に計算すると，

$$N_{\text{de}} = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} v_{\mathbf{k}}^2 \quad (2.26)$$

$$\simeq \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d\mathbf{k} v_{\mathbf{k}}^2 \quad (2.27)$$

$$= \frac{V}{4\pi^2 \hbar^3} \int dp \left(\frac{p^4 + 2\alpha p^2}{\sqrt{p^4 + 4\alpha p^2}} - p^2 \right) \quad (2.28)$$

$$= \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{M c_s}{\hbar} \right)^3 \quad (2.29)$$

と求まる．ここで， $p = \hbar k$ ， $\alpha = M \rho_0 g$ ， $c_s = \sqrt{\rho_0 g / M}$ である．非凝縮成分の粒子数 N_{de} と全粒子数 N の比は，s 波散乱長を用いて，

$$\frac{N_{\text{de}}}{N} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} (\rho_0 a_s^3)^{1/2} \quad (2.30)$$

となる．この非凝縮成分は，Bose 粒子が励起状態をとることで，粒子間相互作用の効果が小さくなる結果として生じている．

このことは基底状態 $|\psi_g\rangle$ の表式にも反映されている．Bose 粒子の生成・消滅演算子の交換関係より，消滅演算子 $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ を，

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} = \frac{d}{d\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger} \quad (2.31)$$

とおくことが許される．このとき，式 (2.23) は，

$$\left(u_{\mathbf{k}} \frac{d}{d\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger} + v_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \right) |\psi_g\rangle = 0 \quad (2.32)$$

となる．これを $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ の微分方程式と見て解くと，

$$|\psi_g\rangle \propto \exp \left[- \sum_{\mathbf{k}, k_x > 0} \frac{v_{\mathbf{k}}}{u_{\mathbf{k}}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \right] |\phi_0\rangle \quad (2.33)$$

が得られる．ただし， $|\phi_0\rangle$ は平均として N_0 個の波数ゼロの粒子からなる状態である．これより，基底状態では波数 \mathbf{k} と $-\mathbf{k}$ を持つ 2 つの粒子が対で励起されていることがわかる．これが，式 (2.29) における N_{de} に寄与している．

典型的な冷却原子気体 BEC の実験では，平均粒子間距離 $\rho_0^{-1/3}$ が s 波散乱長より十分に大きいため，非凝縮成分 N_{de} は全粒子数の 1 パーセントのオーダーである．したがって，ほぼ全ての粒子が同一の 1 粒子状態を占有していることになる．この事実は冷却原子気体 BEC の振る舞いが次項に示す GP 方程式でよく記述されることに決定的に重要となる．

2.1.4 1 成分 GP 方程式

本項では，絶対零度における冷却原子気体 BEC を定量的に記述する GP 方程式 [74, 75] を導出する．その後，基底状態まわりの揺らぎを線形近似のレベルで解き，その励起エネルギーを求める．

2.1 冷却原子気体 BEC の基礎理論

考える系は、ポテンシャル $V_{\text{trap}}(\mathbf{r})$ で捕獲された全粒子数 N 、質量 M の Bose 粒子から構成される絶対零度の冷却原子気体である。この系は前項で議論した弱く相互作用する希薄 Bose 粒子系と見なせるため、粒子間相互作用は前項と同じくデルタ関数型のハードコア相互作用で近似できる。このとき、多体波動関数を $\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$ とすると、系を記述する Schrödinger 方程式は、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = H \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \quad (2.34)$$

$$H = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_i^2 + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N g \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (2.35)$$

となる。これは次の作用 S を極小にする条件から導出できる。

$$S[\Psi, \Psi^*] = \int \left[\frac{i\hbar}{2} \left(\Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* \right) - \Psi^* H \Psi \right] d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N dt \quad (2.36)$$

ここで、 Ψ は複素関数であるので作用は 2 変数の汎関数であり、ここでは独立な変数として Ψ と Ψ^* を採用した。

ここで、今考えている系が希薄であること及び絶対零度であることから前節の結果が示すように、ほぼ全ての粒子が同一の 1 粒子状態 $\phi(\mathbf{r})$ を占有すると仮定できる。したがって、 N 粒子系の波動関数は近似的に、

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = \prod_{i=1}^N \phi(\mathbf{r}_i, t) \quad (2.37)$$

と書ける。各 $\phi(\mathbf{r}_i)$ は全て 1 に規格化されているとする。すると、系の作用は、

$$S = N \int \left[\frac{i\hbar}{2} \left(\phi(\mathbf{r}, t)^* \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) - \phi(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t)^* \right) - \frac{\hbar^2}{2M} |\nabla \phi(\mathbf{r}, t)|^2 - V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r}, t)|^2 - \frac{N-1}{2} g |\phi(\mathbf{r}, t)|^4 \right] d\mathbf{r} dt \quad (2.38)$$

となる。ここで、次の巨視的波動関数を導入する。

$$\psi(\mathbf{r}, t) = N^{1/2} \phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.39)$$

その結果、 $O(1/N)$ の項を無視すると作用は、

$$S = \int \left[\frac{i\hbar}{2} \left(\psi(\mathbf{r}, t)^* \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) - \psi(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t)^* \right) - \frac{\hbar^2}{2M} |\nabla \psi(\mathbf{r}, t)|^2 - V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 - \frac{1}{2} g |\psi(\mathbf{r}, t)|^4 \right] d\mathbf{r} dt \quad (2.40)$$

となる。 ψ と ψ^* を独立な変数として、作用の変分計算を実行すると、

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) + g |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.41)$$

が得られ、時間に依存する GP 方程式が求められる。この方程式は絶対零度の内部自由度を持たない希薄 BEC を定量的に記述する巨視的波動関数の時間発展方程式である。この GP 方程式を解くこと

2.1 冷却原子気体 BEC の基礎理論

で、冷却原子気体 BEC における様々な現象を調べることができる。以下に、一例として捕獲ポテンシャルなしの一様系の基底状態まわりの揺らぎについて、線形近似のレベルで解いてみる。

まず、GP 方程式の定常解 ψ_0 からの微小揺らぎ $\delta\psi$ が従う方程式を導出する。巨視的波動関数 ψ を、

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0(\mathbf{r}, t) + \delta\psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.42)$$

とおく。ここで、定常解は次式を満たす。

$$\psi_0(\mathbf{r}, t) = \phi_0(\mathbf{r})e^{-i\mu t/\hbar} \quad (2.43)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) + g\rho_0(\mathbf{r})\right)\phi_0(\mathbf{r}) = \mu\phi_0(\mathbf{r}) \quad (2.44)$$

ここで、 $\rho_0(\mathbf{r}) = |\phi_0(\mathbf{r})|^2$ と置いた。さらに、微小揺らぎとして、次のような解を探す。

$$\delta\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\mu t/\hbar}\left(u(\mathbf{r})e^{-i\omega t} - v^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}\right) \quad (2.45)$$

式 (2.42) を GP 方程式 (2.41) に代入し、微小揺らぎの 2 次以上の項を無視して、さらに定常解の条件 (2.43), (2.44) と式 (2.45) を用いると、 $u(\mathbf{r})$ と $v(\mathbf{r})$ が従う方程式が得られる。

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) + 2g\rho_0(\mathbf{r}) - \mu - \hbar\omega\right)u(\mathbf{r}) - g\rho_0(\mathbf{r})v(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.46)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) + 2g\rho_0(\mathbf{r}) - \mu + \hbar\omega\right)v(\mathbf{r}) - g\rho_0(\mathbf{r})u(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.47)$$

この方程式 (2.46), (2.47) は Bogoliubov-de Gennes (BdG) 方程式と呼ばれる。もし、BdG 方程式が解ければ、微小揺らぎの振動数 ω 、及びその空間的な変調 $u(\mathbf{r})$, $v(\mathbf{r})$ が求まる。

今、一様系を考えているので、この BdG 方程式は簡単に解ける。このとき、 $V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) = 0$, $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = N/V$, $\mu = g\rho_0$ となる。BdG 方程式を解くために次の平面波解を考える。

$$u(\mathbf{r}) = u_k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{V^{1/2}} \quad (2.48)$$

$$v(\mathbf{r}) = v_k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{V^{1/2}} \quad (2.49)$$

その結果、式 (2.48), (2.49) を BdG 方程式 (2.46), (2.47) に代入すると、

$$\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2M} + g\rho_0 - \hbar\omega\right)u_k - g\rho_0 v_k = 0 \quad (2.50)$$

$$\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2M} + g\rho_0 + \hbar\omega\right)v_k - g\rho_0 u_k = 0 \quad (2.51)$$

が得られる。式 (2.50), (2.51) は固有値方程式なので、固有値は微小揺らぎの振動数 ω に、固有ベクトルは u_k , v_k に等しい。この固有値方程式を解くと、

$$\begin{aligned} \epsilon_b(k) &= \hbar\omega_b(k) \\ &= \sqrt{\epsilon_0(k)(\epsilon_0(k) + 2g\rho_0)} \end{aligned} \quad (2.52)$$

2.1 冷却原子気体 BEC の基礎理論

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_k}{\epsilon_b(k)} + 1 \right) \quad (2.53)$$

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_k}{\epsilon_b(k)} - 1 \right) \quad (2.54)$$

と求まる．固有ベクトルの規格化に任意性があるので，ここでは $|u_k|^2 - |v_k|^2 = 1$ とした．この規格化の条件式は前項で紹介した Bogoliubov 変換が正準変換になることを要請することで得られる．これらの式 (2.52)–(2.54) は，前項の式 (2.18), (2.21), (2.22) と一致している．本節の結果と Bogoliubov 理論の結果との違いは，Bogoliubov 励起を量子的に扱うか，古典的に扱うかにある．

以上より，一様系の BdG 方程式を解くことで微小揺らぎの解 (2.52)–(2.54) が求められた．このとき，物理量にどのような時間変化があらわれるかを計算してみる．例えば，密度分布 $\rho(\mathbf{r})$ を計算すると，

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= |\psi_0(\mathbf{r}, t) + \delta\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \\ &\simeq \rho_0 + \psi_0(\mathbf{r}, t)\delta\psi^*(\mathbf{r}, t) + \psi_0^*(\mathbf{r}, t)\delta\psi(\mathbf{r}, t) \\ &= \rho_0 + 2(u_k - v_k)\sqrt{\frac{\rho_0}{V}}\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_b(k)t) \end{aligned} \quad (2.55)$$

となる．これより，巨視的波動関数の微小な揺らぎは位相速度が $\omega_b(k)/k$ となる密度波を誘起することがわかる．

一様系の場合，斥力相互作用 ($g > 0$) であれば，式 (2.52) より振動数 $\omega_b(k)$ は全ての波数に対して実数である．しかし，引力相互作用 ($g < 0$) では，波数によっては虚部を持ちうる．このとき，式 (2.55) の三角関数の引数が虚数になるので，周期的でない密度揺らぎの増幅，減衰が起きる．つまり，有限な振動数の虚部は系の動的不安定性を意味する¹．このような動的不安定性の性質は，BdG 方程式を解くことで調べることができ，例えば渦の不安定性などが調べられている [76, 77]．

2.1.5 1成分 GP 方程式と流体力学

流体力学の視点から冷却原子気体 BEC の性質を調べるために，1成分 GP 方程式から流体方程式を導出し，循環の量子化，量子渦について解説する．

まず流体方程式を導出するために，巨視的波動関数を複素平面上の振幅 $\sqrt{\rho}$ と偏角 ϕ を用いて，

$$\psi = \sqrt{\rho}e^{i\phi} \quad (2.56)$$

と書く．この変数変換は Madelung 変換と呼ばれる．GP 方程式 (2.41) に式 (2.56) を代入し，実部と虚部の項を比較することで，

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot \left(\rho \frac{\hbar}{M} \nabla \phi \right) = 0 \quad (2.57)$$

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t}\phi = \frac{\hbar^2}{2M\sqrt{\rho}} \nabla^2 \sqrt{\rho} - \frac{\hbar^2}{2M} (\nabla \phi)^2 - V_{\text{trap}} - g\rho \quad (2.58)$$

が得られる．式 (2.57) は粒子数密度 ρ の時間発展方程式であり，流体力学における質量の連続の式

¹ここで，この動的不安定性は Landau 不安定性とは異なることを注意しておく．

2.1 冷却原子気体 BEC の基礎理論

と同じ形をしている．したがって，この比較により速度場は，

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{M} \nabla \phi \quad (2.59)$$

と定義できる．この速度場を用いて，式 (2.57)，(2.58) を書き換えると，

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \nabla \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) = -\frac{1}{M} \nabla \left(V_{\text{trap}} + g\rho - \frac{\hbar^2}{2M\sqrt{\rho}} \nabla^2 \sqrt{\rho} \right) \quad (2.61)$$

が得られる．これらは古典流体における連続の式と Euler 方程式に対応していることが一目でわかる．古典流体との大きな違いは，式 (2.61) の右辺第 3 項にある量子圧力項の存在である．

次に速度場 (2.59) からどのような回転流が起こりうるかを循環を用いて考察する．循環 Γ は，流体中の閉経路 C を用いて次式で定義される．

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.62)$$

この表式より，循環は渦の強さを表す量となっていることがわかる．

初めに，線積分を行う閉経路 C に囲まれた領域 S で速度場が解析的である状況を考える．このとき，Stokes の定理を用いると，容易に

$$\begin{aligned} \Gamma &= \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

が示される．ここで最後の等式を示すために，速度場が位相 ϕ の勾配で与えられることを用いた：

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (2.64)$$

以上より，領域 S で速度場が解析的な場合，1 成分 BEC では回転するような流れは生じず，常に渦なしであることがわかる．

次に，閉経路内部に速度場が定義できない点が存在する状況を考える．このような点は，例えば閉経路 C に沿って位相が 0 から 2π まで変化するときに見られる．このとき Stokes の定理は適用できず，循環は有限の値をとることができる．これを示すために，式 (2.62) の線積分を定義通り行なうと，

$$\begin{aligned} \Gamma &= \oint_C \frac{\hbar}{M} \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{\hbar}{M} (\phi_{\text{end}} - \phi_{\text{start}}) \end{aligned} \quad (2.65)$$

が得られる．式 (2.63) の場合，閉経路 C の始点と終点は空間的に同じ場所であり，速度場が領域 S の至るところで定義できるため， $\phi_{\text{end}} = \phi_{\text{start}}$ となり循環は 0 となった．しかし，今考えている状況では $\phi_{\text{end}} \neq \phi_{\text{start}}$ となる．ただし，その位相差 $\phi_{\text{end}} - \phi_{\text{start}}$ は波動関数の一価性から 2π の整数

2.1 冷却原子気体 BEC の基礎理論

倍だけが許される．したがって， n を整数とすると，循環の値は，

$$\begin{aligned}\Gamma &= 2\pi n \frac{\hbar}{M} \\ &= \frac{h}{M} n\end{aligned}\quad (2.66)$$

となり， $\kappa = h/M$ の整数倍で量子化される．このような事情から κ は循環量子と呼ばれ，量子化された循環をもつ渦を量子渦と呼ぶ [78]．

最後に，この量子渦の生成消滅について述べる．Euler 方程式に従うような粘性ゼロの理想流体では Kelvin の循環定理が成り立つため，渦は不生不滅である [79, 80]．そのため，GP 方程式から得られる流体方程式も粘性項を含んでいないので，理想流体と同じく渦は生成もせず，消滅もしないと考えてしまうかもしれない．しかし，Euler 方程式と式 (2.61) には明確な違いがある．それは式 (2.61) の右辺第 3 項にある量子圧力項である．この項は密度がゼロの領域で発散するため，Euler 方程式で成り立つ Kelvin の循環定理を破り，量子渦の生成を許すこととなる．実際，多くの数値計算と実験において量子渦の生成と消滅が観測されている [81–84]．

2.1.6 スピノール GP 方程式

前項までは，スピン自由度が凍結された 1 成分 BEC に関する平均場理論を中心に説明してきた．本項では，概要で述べた多成分 BEC の 1 つであるスピン自由度を持つスピノール BEC を記述する平均場理論 [45, 47, 85, 86] について解説する．

一般に，原子は電子スピン S と核スピン I を持ち，原子のエネルギー準位は超微細相互作用 $V_{\text{hf}} = AS \cdot I$ を通してエネルギーの縮退が解けている．ここで， A は原子に固有の定数であり，アルカリ原子ではその大きさはおよそ 0.1K のオーダーである．これは一般的な Bose-Einstein 凝縮の転移温度 $T_c \sim 1\mu\text{K}$ よりも十分に大きい．このため，原子のエネルギーは全スピン $F = S + I$ で分類することができる．したがって，この系では全スピン F のうち，1 つの成分だけに注目すればいいことになる．この考察により，全スピン F の原子から構成されるスピノール BEC は z 方向のスピン量子数に対応して， $2F + 1$ 個の波動関数で記述される．以下，本論文では全スピン $F = 1$ の原子のみを扱う．

まず初めに，スピン 1 の自由度を持つ冷却原子気体を記述する有効ハミルトニアンを導出する．そのために，2 粒子間の有効相互作用を粒子の統計性から導く．今，2 個の同種粒子が互いに相互作用する系を考える．このとき，スピン 1 の粒子は Bose 粒子であるから，粒子の交換に対して 2 体波動関数の符号は変わらない．一方，波動関数を軌道部分とスピン部分に分けて考えると，粒子の入れ替えに対して軌道部分は， $(-1)^L$ ，スピン部分は， $(-1)^{F_t}$ の変換を受ける．ここで， L は相対運動の軌道角運動量， F_t は 2 原子の合成スピンである．したがって， $1 = (-1)^{L+F_t}$ より， $L + F_t$ は偶数でなければならない．ここでは極低温の希薄な冷却原子気体を想定しているので，粒子間衝突は低エネルギーの散乱となり， $L = 0$ の s 波散乱のみを考えれば十分である．したがって， F_t は偶数であることが要請される．今，スピン 1 の自由度を持つ原子を扱っているので，合成スピン F_t は 0 もしくは 2 をとることが許されて，最終的に粒子間相互作用 \hat{V} は，

$$\hat{V}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{V}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \hat{V}_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\quad (2.67)$$

2.1 冷却原子気体 BEC の基礎理論

となる．ここで， \hat{V}_0, \hat{V}_2 は，2 原子の合成スピン F_t が 0, 2 の粒子間相互作用である．よって，スピン 1 の自由度を持つ冷却原子気体の有効ハミルトニアンは，第 2 量子化の表現を用いて，

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{free}} + \hat{H}_{\text{mag}} + \hat{H}_{\text{int}} \quad (2.68)$$

$$\hat{H}_{\text{free}} = \int d\mathbf{r} \sum_{m=-1}^1 \hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) \right) \hat{\psi}_m(\mathbf{r}) \quad (2.69)$$

$$\hat{H}_{\text{mag}} = \int d\mathbf{r} \sum_{m,n=-1}^1 \hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \left(p(F_z)_{mn} + q(F_z^2)_{mn} \right) \hat{\psi}_n(\mathbf{r}) \quad (2.70)$$

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \sum_{m,n,r,s} \hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_n^\dagger(\mathbf{r}') \langle m, n | \hat{V}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') | r, s \rangle \hat{\psi}_s(\mathbf{r}') \hat{\psi}_r(\mathbf{r}) \quad (2.71)$$

となる．ただし， $\hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}), \hat{\psi}_m(\mathbf{r})$ ($m = -1, 0, 1$) はスピン 1 の Bose 粒子の場の演算子， $(F_\mu)_{mn}$ ($\mu = x, y, z$) はスピン 1 の行列であり，それらは，

$$F_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad F_y = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad F_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

と与えられる．ここで，磁場は z 方向に印加されているとし，Zeeman 効果を考慮している． \hat{H}_{mag} における p, q は，1 次 Zeeman, 2 次 Zeeman 効果の係数である． $|r, s\rangle$ はスピン波動関数である．

次に，粒子間相互作用 \hat{H}_{int} をスピン 1 のスピン行列 $(F_\mu)_{mn}$ を用いて表現する．2 原子の合成スピンの状態への射影演算子を \hat{P}_0, \hat{P}_2 ，2 原子のスピン演算子を \hat{F}_1, \hat{F}_2 ，合成スピン演算子を $\hat{F}_t (= \hat{F}_1 + \hat{F}_2)$ とおくと，射影演算子は次のように書ける．

$$\hat{P}_0 = \frac{1}{3} (1 - \hat{F}_1 \cdot \hat{F}_2) \quad (2.73)$$

$$\hat{P}_2 = \frac{1}{3} (2 + \hat{F}_1 \cdot \hat{F}_2) \quad (2.74)$$

これは以下のようにして導出できる．合成スピン演算子を 2 乗することで，

$$\begin{aligned} \hat{F}_1 \cdot \hat{F}_2 &= \frac{1}{2} (\hat{F}_t^2 - \hat{F}_1^2 - \hat{F}_2^2) \\ &= \sum_{F_t=0,2} \frac{1}{2} \left(F_t(F_t + 1) - 4 \right) \hat{P}_{F_t} \\ &= -2\hat{P}_0 + \hat{P}_2 \end{aligned} \quad (2.75)$$

が得られる．また，射影演算子の定義より，

$$\hat{P}_0 + \hat{P}_2 = 1 \quad (2.76)$$

が成り立つ．式 (2.75) と (2.76) を \hat{P}_0, \hat{P}_2 について解けば，式 (2.73), (2.74) が得られる．以上よ

2.1 冷却原子気体 BEC の基礎理論

り，粒子間相互作用は，

$$\begin{aligned}\hat{V}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= v_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\hat{P}_0 + v_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\hat{P}_2 \\ &= \frac{v_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + 2v_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{3} + \frac{v_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - v_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{3}\hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \hat{\mathbf{F}}_2\end{aligned}\quad (2.77)$$

となる．ここで， $v_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ， $v_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は合成スピン F_t が 0, 2 の粒子間相互作用である．極低温の希薄原子気体では，

$$v_{F_t}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g_{F_t}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\quad (2.78)$$

$$g_{F_t} = \frac{4\pi\hbar^2 a_{F_t}}{M}\quad (2.79)$$

となる． a_{F_t} は，2 体散乱における全スピンが F_t の場合の s 波散乱長である．式 (2.77)，(2.78) より，

$$\langle m, n | \hat{V}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') | r, s \rangle = \left(\frac{g_0 + 2g_2}{3} \delta_{mr} \delta_{ns} + \frac{g_2 - g_0}{3} \langle m, n | \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \hat{\mathbf{F}}_2 | r, s \rangle \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\quad (2.80)$$

が得られる．また，

$$\begin{aligned}\langle m, n | \hat{\mathbf{F}}_1 \cdot \hat{\mathbf{F}}_2 | r, s \rangle &= \sum_{\mu=x,y,z} (\langle m | \otimes \langle n |) (\hat{F}_\mu \otimes \hat{F}_\mu) (|r\rangle \otimes |s\rangle) \\ &= \sum_{\mu=x,y,z} \langle m | \hat{F}_\mu | r \rangle \langle n | \hat{F}_\mu | s \rangle \\ &= \sum_{\mu=x,y,z} (F_\mu)_{mr} (F_\mu)_{ns} \\ &= (\mathbf{F})_{mr} \cdot (\mathbf{F})_{ns}\end{aligned}\quad (2.81)$$

が成り立つ．式 (2.80)，(2.81) を式 (2.71) に代入すると，

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{c_0}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{m,n} \hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_n^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_n(\mathbf{r}) \hat{\psi}_m(\mathbf{r}) + \frac{c_1}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{m,n,r,s} \hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_n^\dagger(\mathbf{r}) (\mathbf{F})_{mr} \cdot (\mathbf{F})_{ns} \hat{\psi}_s(\mathbf{r}) \hat{\psi}_r(\mathbf{r})\quad (2.82)$$

が得られる．ただし， $c_0 = (g_0 + 2g_2)/3$ ， $c_1 = (g_2 - g_0)/3$ と新しい定数を導入した．以上の結果をまとめると，式 (2.68)，(2.69)，(2.70)，(2.82) がスピン 1 の自由度を持つ冷却原子気体を定量的に記述する有効ハミルトニアンとなる．

このハミルトニアンを用いて，スピン 1 スピノール BEC が従う方程式を平均場近似を用いて導出する．1 成分 GP 方程式と同様に，粒子間相互作用が弱いのでほぼ全ての粒子が同一の 1 粒子状態 ϕ_m ($m = 1, 0, -1$) に凝縮すると仮定できる．このとき，状態ベクトルは，

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\sum_{m=-1}^1 \eta_m \hat{a}_m^\dagger \right)^N |0\rangle\quad (2.83)$$

と書ける．ただし， \hat{a}_m^\dagger は 1 粒子状態 ϕ_m の粒子を生成する演算子である．これらを用いて巨視的波動関数を，

$$\psi_m = \sqrt{N} \eta_m \phi_m\quad (2.84)$$

2.1 冷却原子気体 BEC の基礎理論

と定義すると、絶対零度のスピン 1 スピノール BEC はこの 3 つの巨視的波動関数で定量的に記述される。この波動関数が従う方程式を 1 成分 GP 方程式と同様に導出すると、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_m = \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V_{\text{trap}} + pm + qm^2 \right) \psi_m + c_0 \rho \psi_m + c_1 \sum_{n=-1}^1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}_{mn} \psi_n \quad (2.85)$$

が得られる。ここで、

$$\rho = \sum_{m=-1}^1 \psi_m^* \psi_m \quad (2.86)$$

$$F_\mu = \sum_{m,n=-1}^1 \psi_m^* (F_\mu)_{mn} \psi_n \quad (2.87)$$

は全粒子数密度、及びスピン密度ベクトルである。この方程式 (2.85) がスピン 1 スピノール GP 方程式である [85, 86]。

まず、方程式 (2.85) で記述される系の基底状態について考える。\$c_0 > 0\$ で印加磁場がない場合、スピン 1 スピノール GP 方程式 (2.85) から得られる一様系 (\$V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) = 0\$) の基底状態は、\$c_1\$ の符号に対応して 2 つに分類される。第 1 の基底状態は、\$c_1 < 0\$ のときの強磁性状態である。この状態は、

$$\begin{pmatrix} \psi_1^F \\ \psi_0^F \\ \psi_{-1}^F \end{pmatrix} = \sqrt{\rho_0} \hat{U}(\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

と書ける。ここで、\$\hat{U}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha F_z} e^{-i\beta F_y} e^{-i\gamma F_z}\$ はスピン空間の回転行列であり、\$\alpha, \beta, \gamma\$ をスピン空間のオイラー角として、

$$\hat{U}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)} \cos^2 \frac{\beta}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\alpha} \sin \beta & e^{-i(\alpha-\gamma)} \sin^2 \frac{\beta}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\gamma} \sin \beta & \cos \beta & -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\gamma} \sin \beta \\ e^{i(\alpha-\gamma)} \sin^2 \frac{\beta}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha} \sin \beta & e^{i(\alpha+\gamma)} \cos^2 \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

と与えられる。第 2 の基底状態は、\$c_1 > 0\$ のときのポーラー状態である。これは、

$$\begin{pmatrix} \psi_1^P \\ \psi_0^P \\ \psi_{-1}^P \end{pmatrix} = \sqrt{\rho_0} \hat{U}(\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

と書ける。この 2 つの状態 (2.88), (2.90) は、ともにスピン空間の回転行列 \$\hat{U}(\alpha, \beta, \gamma)\$ を含んでいる。これは、この系のハミルトニアンがスピン空間の回転に対して不変であることを反映している。ここでは、磁場なしのスピン 1 スピノール BEC について述べたが、より一般的な基底状態については参考文献 [47–49] で解説されている。

最後に、印加磁場無しのスピノール GP 方程式を線形解析のレベルで解いてみる。ここでは、一例として平均場の基底状態 (2.88), (2.90) のうち、強磁性基底状態 (2.88) まわりの微小揺らぎの振る舞いを調べる。ここで説明する手法は、1 成分 GP 方程式から BdG 方程式を導出した方法と同じで

2.1 冷却原子気体 BEC の基礎理論

ある．

式 (2.88) まわりの微小揺らぎの性質を調べるため，時間依存性まで含めた強磁性基底状態の表式が必要となる．それは簡単な計算により，

$$\begin{pmatrix} \psi_1^F \\ \psi_0^F \\ \psi_{-1}^F \end{pmatrix} = \sqrt{\rho_0} e^{-i\mu t/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

と求まる．ただし，スピンの \$z\$ 方向を向きつつ微小に揺らぐ状況を考えるため，Euler 角は \$\alpha = 0\$，\$\beta = 0\$，\$\gamma = 0\$ とした．\$\mu = (c_0 + c_1)\rho_0\$ は化学ポテンシャルである．この状態からの微小揺らぎを \$\delta\psi_m e^{-i\mu t/\hbar}\$ とおいて，巨視的波動関数を，

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \\ \psi_{-1} \end{pmatrix} = \sqrt{\rho_0} e^{-i\mu t/\hbar} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-i\mu t/\hbar} \begin{pmatrix} \delta\psi_1 \\ \delta\psi_0 \\ \delta\psi_{-1} \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

と展開する．式 (2.92) を式 (2.85) に代入して，微小揺らぎの一次の項まで残すと，

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \delta\psi_1 = \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + (c_0 + c_1)\rho_0 \right) \delta\psi_1 + (c_0 + c_1)\rho_0 \delta\psi_1^* \quad (2.93)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \delta\psi_0 = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \delta\psi_0 \quad (2.94)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \delta\psi_{-1} = \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 - 2c_1\rho_0 \right) \delta\psi_{-1} \quad (2.95)$$

が得られる．式 (2.93) を解くために，次の平面波解を仮定する．

$$\delta\psi_1 = u_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_1 t)} - v_1^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_1 t)} \quad (2.96)$$

式 (2.96) を式 (2.93) に代入して，\$u_1\$，\$v_1\$ の方程式を導出すると，

$$\begin{pmatrix} \epsilon_0(k) + (c_0 + c_1)\rho_0 & -(c_0 + c_1)\rho_0 \\ (c_0 + c_1)\rho_0 & -\epsilon_0(k) - (c_0 + c_1)\rho_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \hbar\omega_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad (2.97)$$

が得られる．この固有値方程式を解くと，次の微小揺らぎの分散関係を与える．

$$\hbar\omega_1(k) = \sqrt{\epsilon_0(k)^2 + 2(c_0 + c_1)\rho_0\epsilon_0(k)} \quad (2.98)$$

\$\delta\psi_1\$ の微小揺らぎと同様に，\$\delta\psi_0\$，\$\delta\psi_{-1}\$ の分散関係は式 (2.94)，(2.95) から得られる．その振動数を \$\omega_0\$，\$\omega_{-1}\$ とすると，

$$\hbar\omega_0(k) = \epsilon_0(k) \quad (2.99)$$

$$\hbar\omega_{-1}(k) = \epsilon_0(k) - 2c_1\rho_0 \quad (2.100)$$

が得られる．ここで得られた振動数 \$\omega_1\$，\$\omega_0\$ は，全粒子数密度，スピン密度ベクトルの \$x, y\$ 成分の揺

2.1 冷却原子気体 BEC の基礎理論

らぎと結びついている．なぜなら，式 (2.92) を式 (2.86) と式 (2.87) に代入することで，

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_{m=-1}^1 |\psi_m|^2 \\ &\simeq \rho_0 + \sqrt{\rho_0}(\delta\psi_1 + \delta\psi_1^*)\end{aligned}\quad (2.101)$$

$$\begin{aligned}F_x &= \sum_{m,n=-1}^1 \psi_m^*(F_x)_{mn}\psi_n \\ &\simeq \sqrt{\frac{\rho_0}{2}}(\delta\psi_0 + \delta\psi_0^*)\end{aligned}\quad (2.102)$$

$$\begin{aligned}F_y &= \sum_{m,n=-1}^1 \psi_m^*(F_y)_{mn}\psi_n \\ &\simeq i\sqrt{\frac{\rho_0}{2}}(\delta\psi_0^* - \delta\psi_0)\end{aligned}\quad (2.103)$$

が得られるからである．一方， ω_{-1} は，次項で述べるネマティックテンソルの揺らぎに対応している．なぜなら，

$$\sum_{m,n=-1}^1 \psi_m^*(F_x^2 + F_y^2)_{mn}\psi_n \propto \delta\psi_{-1}^* \quad (2.104)$$

が成り立つからである．

以上の手法は，他の定常状態まわりの微小揺らぎに対しても有効である [87, 88]．もし，動的に不安定な定常状態まわりの微小揺らぎの分散関係を求めると，1 成分 GP 方程式の引力相互作用の場合と同じく，その虚部が有限な値をとる．実際，第 3, 4 章で説明する対向流不安定性では虚部が現れ，スピン 1 スピノール GP 方程式を数値的に解くと，その虚部に対応した不安定性が生じる．

2.1.7 スピン 1 スピノール GP 方程式と流体力学

スピノール BEC を流体力学の視点から考える際には，スピノール GP 方程式を流体方程式のような保存則の形式で表現することが便利である．詳細は第 3 章以降で述べるが，これらスピン流体方程式はスピノール BEC の乱流をスケーリングの議論と関係づけて調べる上で非常に役立つ．

本項では，スピン 1 スピノール GP 方程式 (2.85) と完全に等価な流体方程式を示す．スピン流体力学方程式はいくつかの論文 [89–92] で議論されているが，ここでは湯川，上田により導出された流体方程式について述べる [92]．ここではアインシュタインの規約を用いて，ローマ文字に対しては 1, 0, -1 を，ギリシャ文字に対しては x, y, z をとるとする．

流体方程式は，全粒子数密度 ρ と以下に定義される速度場 v ，スピンベクトル f_μ ，ネマティックテンソル $n_{\mu\nu}$ から構成される．

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{2M\rho i} \left(\psi_m^* \nabla \psi_m - \psi_m \nabla \psi_m^* \right) \quad (2.105)$$

2.1 冷却原子気体 BEC の基礎理論

$$f_\mu = \frac{1}{\rho} \psi_m^* (F_\mu)_{mn} \psi_n \quad (2.106)$$

$$n_{\mu\nu} = \frac{1}{\rho} \psi_m^* (N_{\mu\nu})_{mn} \psi_n \quad (2.107)$$

ただし, $(N_{\mu\nu})_{mn} = [(F_\mu)_{ml}(F_\nu)_{ln} + (F_\nu)_{ml}(F_\mu)_{ln}]/2$ である. この定義から明らかなように, ネマティックテンソルはスピン揺らぎの異方性を表す物理量である. スピノール GP 方程式 (2.85) からこれらの時間発展方程式を導出すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} v_\mu + v_\nu \nabla_\nu v_\mu - \frac{\hbar^2}{2M^2} \nabla_\mu \frac{\nabla_\nu^2 \sqrt{\rho}}{\rho} \\ + \frac{\hbar^2}{4M^2 \rho} \nabla_\nu \rho \left[\frac{1}{2} \left\{ (\nabla_\mu f_\lambda)(\nabla_\nu f_\lambda) - f_\lambda (\nabla_\mu \nabla_\nu f_\lambda) \right\} \right. \\ \left. + (\nabla_\mu n_{\lambda\sigma})(\nabla_\nu n_{\lambda\sigma}) - n_{\lambda\sigma} (\nabla_\mu \nabla_\nu n_{\lambda\sigma}) \right] \\ = -\frac{1}{M} \left\{ c_0 (\nabla_\mu \rho) + c_1 f_\nu (\nabla_\mu \rho f_\nu) \right\} \end{aligned} \quad (2.109)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho f_\mu + \nabla \cdot \rho \mathbf{v}_\mu = \frac{1}{\hbar} \epsilon_{z\mu\nu} \rho (p f_\nu - 2q n_{z\nu}) \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho n_{\mu\nu} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v}_{\mu\nu} = \frac{\rho}{\hbar} \left[\epsilon_{z\mu\lambda} \left(p n_{\nu\lambda} - \frac{q}{2} \delta_{z\nu} f_\lambda \right) \right. \\ \left. + \epsilon_{z\nu\lambda} \left(p n_{\mu\lambda} - \frac{q}{2} \delta_{z\mu} f_\lambda \right) \right] \\ + \frac{c_1 \rho^2}{\hbar} \left(\epsilon_{\mu\lambda\eta} f_\lambda n_{\nu\eta} + \epsilon_{\nu\lambda\eta} f_\lambda n_{\mu\eta} \right) \end{aligned} \quad (2.111)$$

が得られる. ただし, スピン速度場 \mathbf{v}_μ とネマティックテンソル速度場 $\mathbf{v}_{\mu\nu}$ は以下で定義される.

$$\mathbf{v}_\mu = f_\mu \mathbf{v} - \frac{\hbar}{M} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \left[\frac{1}{4} f_\nu (\nabla f_\lambda) + n_{\nu\eta} (\nabla n_{\lambda\eta}) \right] \quad (2.112)$$

$$\mathbf{v}_{\mu\nu} = n_{\mu\nu} \mathbf{v} - \frac{\hbar}{4M} \left\{ \epsilon_{\mu\lambda\eta} [f_\lambda (\nabla n_{\nu\eta}) - (\nabla f_\lambda) n_{\nu\eta}] + \epsilon_{\nu\lambda\eta} [f_\lambda (\nabla n_{\mu\eta}) - (\nabla f_\lambda) n_{\mu\eta}] \right\} \quad (2.113)$$

ここで, GP 方程式と流体方程式の自由度の数を比較してみると, それらは一致していないことがわかる. しかし, 流体方程式に次の拘束条件を初期状態に課すことで, この問題は解消される.

$$n_{\mu\mu} = 2 \quad (2.114)$$

$$n_{\mu\nu} f_\nu = f_\mu \quad (2.115)$$

2.1 冷却原子気体 BEC の基礎理論

$$\det n_{\mu\nu} = \frac{1}{4} f_\mu^2 \quad (2.116)$$

したがって、流体方程式と拘束条件を含めた系 (2.108)–(2.116) が、GP 方程式と完全に等価な方程式となっている。この2つの方程式の等価性に関しては、原著論文に詳しく議論されている [92]。

上で述べたスピン流体方程式は非常に複雑な連立偏微分方程式になっている。しかし、強磁性状態に限定すると、流体方程式は比較的簡単な形式で書き換えられる。ここで強磁性状態の定義を明確にする。この状態は強磁性基底状態をスピン空間でオイラー回転した数式で表現できる：

$$\begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r}) \\ \psi_0(\mathbf{r}) \\ \psi_{-1}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \sqrt{\rho} e^{i\phi(\mathbf{r})} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha(\mathbf{r})} \cos^2 \frac{\beta(\mathbf{r})}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta(\mathbf{r}) \\ e^{i\alpha(\mathbf{r})} \sin^2 \frac{\beta(\mathbf{r})}{2} \end{pmatrix} \quad (2.117)$$

ここで、オイラー角は空間依存することを許す。ただし、強磁性状態のスピンゲージ対称性により、 $\gamma = 0$ とした。このとき、ネマティックテンソルとスピンベクトルの間には、

$$n_{\mu\nu} = \frac{\delta_{\mu\nu} + f_\mu f_\nu}{2} \quad (2.118)$$

が成り立つ。すると、上で述べたスピン流体方程式からネマティックテンソルの方程式を消去することができ、次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho f_\mu + \nabla \cdot \rho \mathbf{v}_\mu = 0 \quad (2.119)$$

$$\mathbf{v}_\mu = f_\mu \mathbf{v} - \frac{\hbar}{2M} \epsilon_{\mu\nu\lambda} f_\nu (\nabla f_\lambda) \quad (2.120)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} v_\mu + v_\nu \nabla_\nu v_\mu - \frac{\hbar^2}{2M^2} \nabla_\mu \frac{\nabla_\nu^2 \sqrt{\rho}}{\rho} \\ + \frac{\hbar^2}{4M^2 \rho} \nabla_\nu \rho \left\{ (\nabla_\mu f_\lambda)(\nabla_\nu f_\lambda) - f_\lambda (\nabla_\mu \nabla_\nu f_\lambda) \right\} \\ = -\frac{1}{M} \left\{ c_0 (\nabla_\mu \rho) + c_1 f_\nu (\nabla_\mu \rho f_\nu) \right\} \end{aligned} \quad (2.121)$$

これがスピン 1 強磁性スピノール BEC を記述する流体方程式である。

最後に、印加磁場無しの場合のスピン 1 スピノール BEC の渦について述べる [47, 48]。このシステムのハミルトニアンは、 $G = U(1)_\phi \times SO(3)_f$ であり、1成分 GP 方程式のハミルトニアンよりも複雑な対称性を持つ。このため、生成される位相欠陥の種類も多岐にわたる。ここでは、強磁性状態とポラー状態の渦について解説する。強磁性基底状態の対称性は、 $H_F = SO(2)_{\phi+f_z}$ である。したがって、秩序変数空間は $R_F = G/H_F = SO(3)_{\phi,f}$ となる。これより、第 1 ホモトピー群は $\pi_1(R_F) = \mathbb{Z}_2$ と求められる。したがって、線欠陥(渦)として存在できるのは、 \mathbb{Z}_2 渦のみである。これはよく研究されており、ポラーコア渦とも呼ばれている。ここで、Mermin-Ho 渦は位相欠陥ではないことに注意する必要がある。なぜなら、これは連続的なスピン回転で消すことが可能だからである。一方、ポラー状態では状況は一変する。このときの基底状態の対称性は $H_P = SO(2)_{f_z} \times (\mathbb{Z}_2)_{\phi,f}$

2.1 冷却原子気体 BEC の基礎理論

である．したがって，秩序変数空間は $R_P = G/H_P = [S_f^2 \times U(1)_\phi]/(\mathbb{Z}_2)_{\phi, f}$ となり， $\pi_1(R_P) = \mathbb{Z}$ と求まる．これは 1 成分 BEC における量子渦と同じである．このように，スピノール BEC では基底状態の対称性の破れに関連して，多彩な位相欠陥が現れる．

2.2 古典流体の乱流理論

前節において量子流体である冷却原子気体 BEC の基礎理論を解説してきた．このような量子流体の乱流を研究する上で水，大気などの古典流体における乱流を理解することは必要不可欠である．そこで，本節では膨大な研究の蓄積がある古典乱流理論のうち，第 3 章以降の研究と深く関連する K41 理論と弱波動乱流理論を中心に解説を行う．弱波動乱流以外の項では，NS 方程式に従う非圧縮性古典流体を想定する．

初めに，2.2.1 項においてレイノルズ数 Re と流れの振る舞いについて説明する．つづいて，2.2.2 項において乱流における統計量の重要性を実験再現性の立場から示し，2.2.3 項で Kolmogorov が構築した K41 理論を解説する．これは NS 方程式の慣性項が支配的な強い乱流を理解する上で基礎となる理論である．2.2.4 項では，そのような強い乱流ではなく波動が支配的な弱い乱流に関する理論について述べる．これは完結問題¹を扱う乱流統計理論の 1 つであり，弱波動乱流理論と呼ばれている．

2.2.1 古典流体における乱流

水，大気などの古典流体は，私たちの身の回りで複雑な流体運動を示している．このような乱れた振る舞いはどのような条件のときに現れるのかを NS 方程式を用いて説明する．考える系は非圧縮性の古典流体であり，次の NS 方程式に従う．

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla^2 p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.122)$$

ここで， \mathbf{u} ， ρ ， p ， ν は，それぞれ速度場，密度，圧力，動粘性率である．圧力は，非圧縮性条件 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ から求められる．

一般に，流れには特徴的なスケールが存在し，それらを用いて NS 方程式を無次元化することができる．ここでは，代表的な長さスケールと速さを L ， U として，式 (2.122) を無次元化すると，

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} = -\bar{\nabla}^2 \bar{p} + \frac{1}{Re} \bar{\nabla}^2 \bar{\mathbf{u}} \quad (2.123)$$

となる．ただし， $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/U$ ， $\bar{t} = tU/L$ ， $\bar{\nabla} = \nabla L$ ， $\bar{p} = p/\rho U^2$ である．ここで，Reynolds 数 Re を，

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (2.124)$$

と定義した．Reynolds 数は，慣性項と粘性項の大きさの比を表しており， $Re \gg 1$ ならば，粘性項よりも慣性項が大きな値を持つ． $Re \ll 1$ であれば，その逆となる．乱れた流体運動が現れるときには，非線形項である慣性項が，乱れを弱める粘性項よりも大きくなるはずである．そのため，レイノルズ数で流れの乱れ具合を定性的に分類することができる．

ここでは，実験で得られた流れの振る舞いと Reynolds 数 Re との関係について述べる．例として図 2.1 のような，速さ U で流れている流体中に直径 L の円柱を置いたときの流れを考える． $Re \ll 1$

¹ある物理量 (例えば速度場など) の 2 次相関関数の方程式を非線形な基礎方程式から導出すると，非線形項により必ず高次相関関数が現れて方程式が閉じなくなる．このような問題を完結問題と呼ぶ．

2.2 古典流体の乱流理論

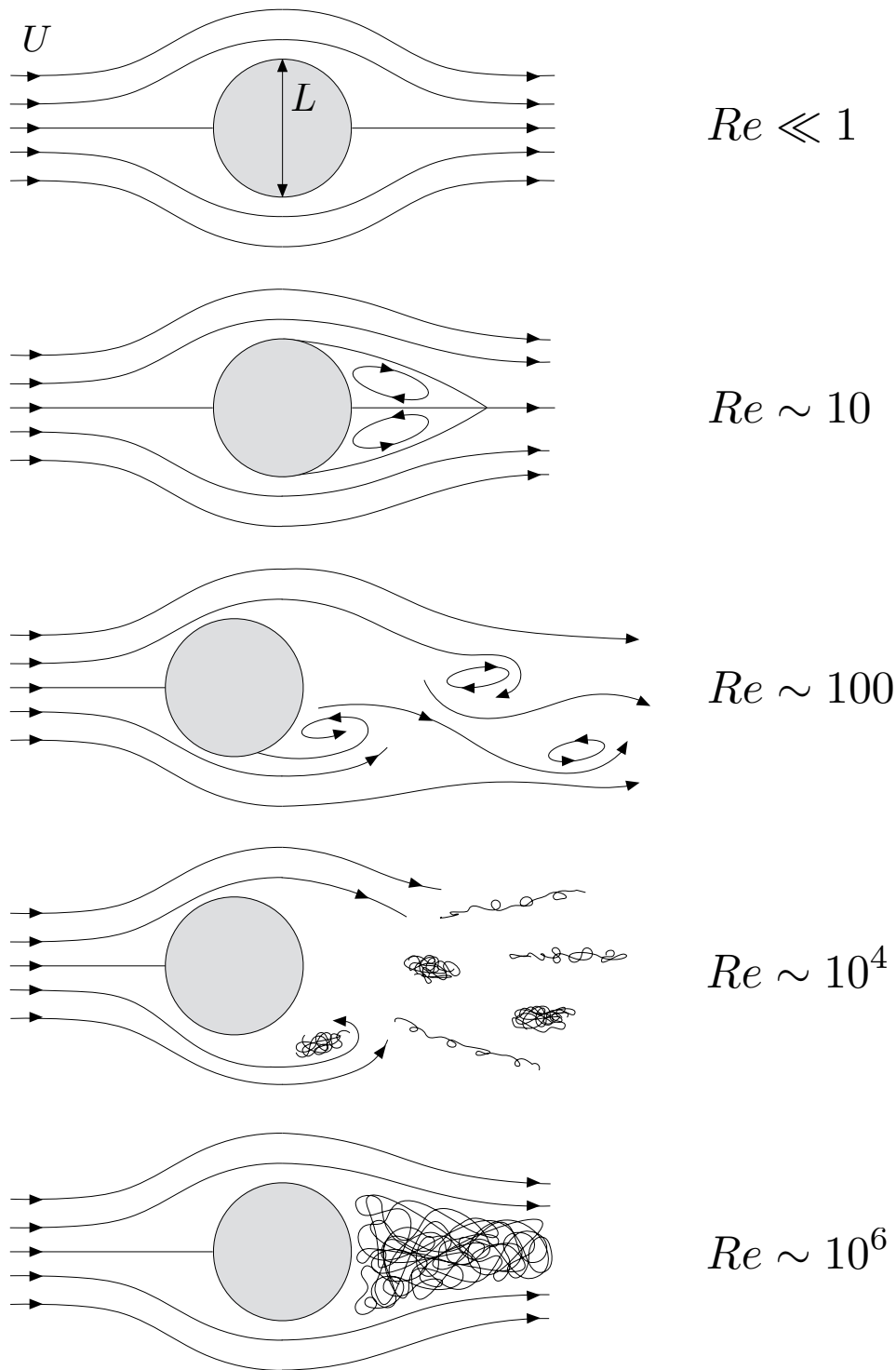


図 2.1: レイノルズ数 Re と流れのイメージ図．レイノルズ数 Re に対応して，障害物周りの流れ場の振る舞いが定性的に異なる．レイノルズ数が小さいときは，対称性の高い層流が現れる．しかし，レイノルズ数 Re が大きくなるにともない，対称性が破れ，渦構造や伴流が発生して，最終的に乱流状態が現れる．この図は文献 [17] を参考にして，筆者が作成したものである．

2.2 古典流体の乱流理論

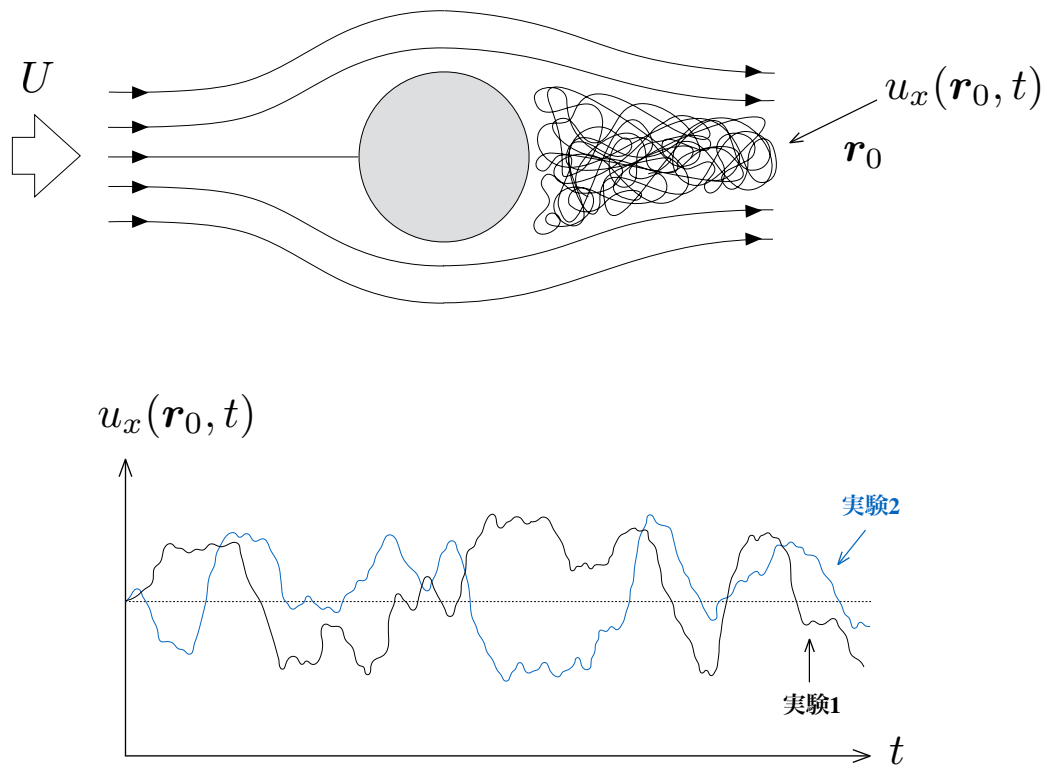


図 2.2: 乱流中の速度場の時間変化．上図のような乱流状態において，ある固定された位置 r_0 における x 方向の速度場 $u_x(r_0, t)$ の時間変化が下図に示されている．この量には実験再現性がなく，実験を行うたびに異なる振る舞いを示す．下図の実験 1 と実験 2 は，実験で制御できるレベルで同じ状況から行った 2 つの実験結果のイメージ図である．この図は文献 [17] を参考にして，筆者が作成したものである．

では，流れは時間に依存せず，定常で上下左右に対称的な流れが現れる． $Re \sim 10$ では， $Re \ll 1$ と同様に流れは定常的であるが，流れ方向の対称性が破れ，円柱の背後に渦対が形成される．そして， $Re \sim 100$ となると，Kármán 渦列が形成され，非定常かつ周期的な流れとなる．さらに，Reynolds 数を大きくして， $Re \sim 10^4$ となると渦列は不安定となる．その結果，周期的な振る舞いが失われ，非周期的な流れが現れる．そして， $Re > 10^6$ では，円柱の下流側に非常に乱れた乱流状態が実現する．Reynolds 数が大きい場合，流れの持つ対称性は厳密な意味では破れているが，統計的には保持されており，このような乱流を十分に発達した乱流と呼ぶ．

2.2.2 乱流における統計量

乱流の大きな特徴のひとつは，速度場の実験再現性がないことである．つまり，同じ条件で実験を行っても，ある固定された位置における速度の向き，大きさは実験を行うたびに異なった値を示す．図 2.2 はある固定された位置における速度場の時間発展の概念図であり，これら是一切実験再現性がないことが知られている．これは実験では制御できない初期値の微小な違いが原因であり，乱流の初期値鋭敏性を反映している．

2.2 古典流体の乱流理論

ここで、「このように実験再現性がない物理量をみることに意味はあるのだろうか?」という問いを考えてみる。これに対する回答は様々であろうが、古典乱流の研究では基本的にこのような物理量には注目せず、実験再現性のある速度場の統計量に注目してきた。この状況は熱力学や統計力学における巨視的な量で系の特徴を捉えようとする姿勢と非常によく似ている。

代表的な統計量の1つが速度場のヒストグラム(確率密度関数)である。実験や数値計算で得られたヒストグラムは、釣り鐘型のガウシアンに近い曲線を描いている。この曲線はもちろん再現性があることが知られており、これ以外にも速度場の空間微分や加速度などのヒストグラムの性質が様々な視点から調べられている。

ヒストグラムと並んで重要な統計量が運動エネルギースペクトル $\mathcal{E}(k)$ である。これは単位質量あたりの運動エネルギー E を波数ごとに分割した量であり、次式で定義される。

$$E = \int_0^\infty \mathcal{E}(k) dk \quad (2.125)$$

以下、システムが周期境界条件を課した $L \times L \times L$ の箱型の系を考える。このとき、波数は $\Delta k = 2\pi/L$ を最小波数として離散化され、運動エネルギースペクトルは、

$$\mathcal{E}(k) = \frac{1}{2\Delta k} \sum_{\mathbf{k}_1 \in \Omega_k} |\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}_1)|^2 \quad (2.126)$$

と書ける。ここで、和は波数の大きさが k のベクトルに関して足し上げることを意味する。 $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ は速度場のフーリエ係数であり、

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) &= \mathcal{F}[\mathbf{u}(\mathbf{r})] \\ &= \frac{1}{V} \int \mathbf{u}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.127)$$

と定義される。ただし、 V は系の体積 L^3 である。一様等方性乱流では、このスペクトルは以下に定義する速度場の2点相関関数 $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ に対応している。

$$\begin{aligned} C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}') \rangle_{\text{en}} \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \langle \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \cdot \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}') \rangle_{\text{en}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \end{aligned} \quad (2.128)$$

ここで、括弧 $\langle \dots \rangle_{\text{en}}$ はアンサンブル平均を表す。今、系の一様性により相関関数は $\mathbf{x} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ のみに依存するので、

$$\langle \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \cdot \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}') \rangle_{\text{en}} = \langle \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \cdot \bar{\mathbf{u}}(-\mathbf{k}) \rangle_{\text{en}} \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} \quad (2.129)$$

が要請される。この結果を用いると、

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\mathbf{k}} \langle |\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2 \rangle_{\text{en}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \quad (2.130)$$

2.2 古典流体の乱流理論

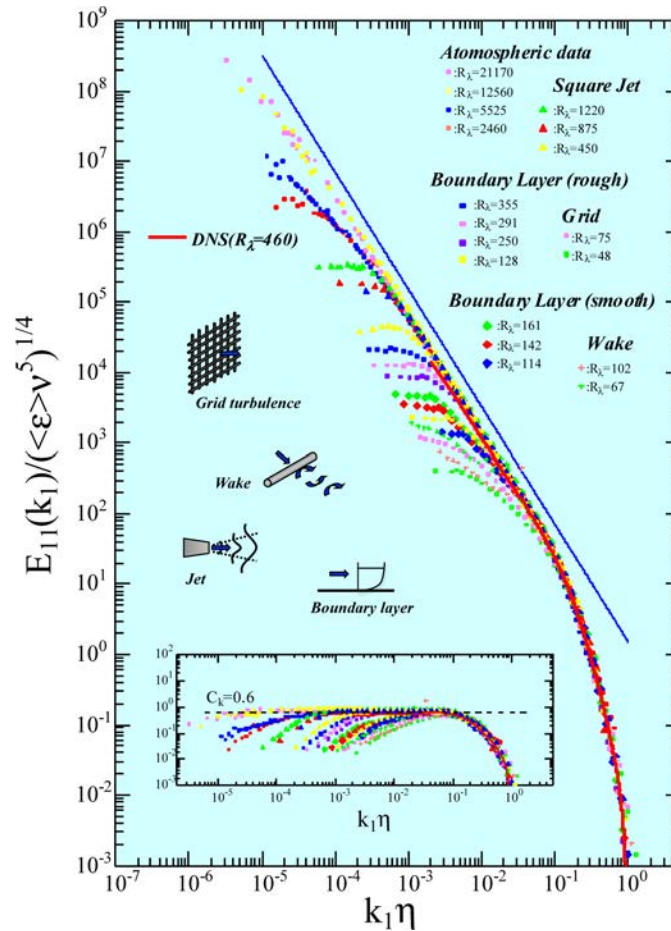


図 2.3: 古典乱流におけるエネルギー Spektral [93] . 横軸は Kolmogorov 長 η で規格化した波数, 縦軸はエネルギーフラックス ϵ と粘性係数 ν を用いて規格化した運動エネルギー Spektral である . 直線は $k^{-5/3}$ に比例しており, 多くの実験が Kolmogorov の $-5/3$ 乗則を示している . [パリティ 2002 年 10 月号 p.19 (丸善) より転載]

となる . これより, 2 点相関関数のフーリエ変換 $\bar{C}(\mathbf{k})$ は,

$$\bar{C}(\mathbf{k}) = \langle |\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2 \rangle_{\text{en}} \quad (2.131)$$

として与えられる . 式 (2.126) と式 (2.131) を比較すると, 系の等方性からアンサンブル平均した運動エネルギー Spektral は 2 点相関関数のフーリエ変換と等価であることがわかる . したがって, この量を調べることで, 流れ場の揺らぎの性質を知ることができる .

この運動エネルギー Spektral は実験的に観測が行われおり, 図 2.3 が実験で観測されたデータである . 両対数グラフで描かれているので, 直線領域はべき乗則を意味しており, 多くの実験でべき乗則が観測されている . ここで問題となるのが「このべき指数の値はいくつか?」である . これに対する答えは, 次項で述べる K41 理論の解説の中で示す .

2.2 古典流体の乱流理論

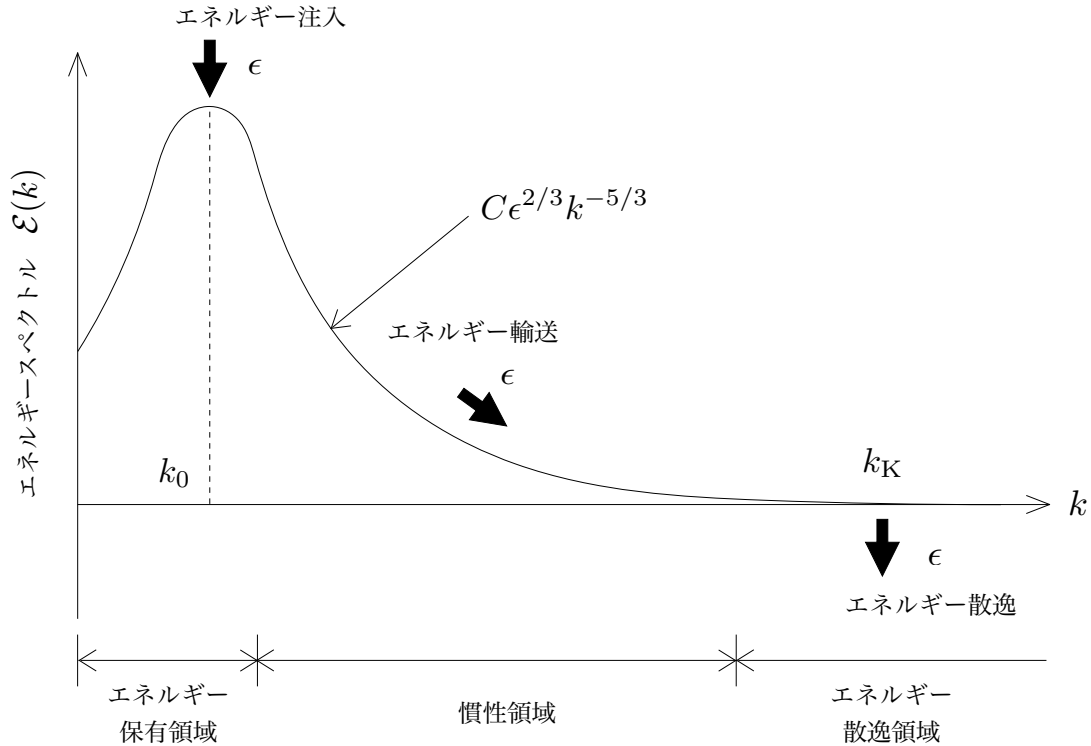


図 2.4: エネルギーダイレクトカスケードの模式図．この図は文献 [19] を参考にして，筆者が作成したものである．

2.2.3 K41 理論

Kolmogorov は乱流の小さなスケールに注目すると，そこにはシステムの詳細によらない普遍的な振る舞いが現れると推察し，その結果を 1941 年に発表した [94]．そこで構築された理論は K41 理論と呼ばれ，乱流理論の先駆的研究として認識されている．本項では運動エネルギースペクトルに重点を置き，K41 理論を解説する．より詳細な議論は文献 [18] に記述されている．

K41 理論は十分に発達した一様等方性乱流を対象としている．このような乱流は，系の境界などの影響を受けないようなシステムサイズよりも十分小さいスケールに注目すれば，実現していると期待できる．K41 理論では，このタイプの乱流を次の 2 つの仮説を用いて議論する．以下では，この仮説を用いて，運動エネルギースペクトルに $-5/3$ 乗則が現れることを示す．

Kolmogorov の第 1 仮説

Reynolds 数が大きい乱流において，全ての小スケールの統計的性質は，スケール l ，平均エネルギー散逸率 ϵ ，動粘性率 ν によって一意かつ普遍的に決定される．

ここでいう小スケールとは系のサイズに比べて小さなスケールを指す．第 1 仮説から運動エネルギースペクトルは，

$$\mathcal{E}(k) = \epsilon^{1/4} \nu^{5/4} F(k\epsilon^{-1/4} \nu^{3/4}) \tag{2.132}$$

2.2 古典流体の乱流理論

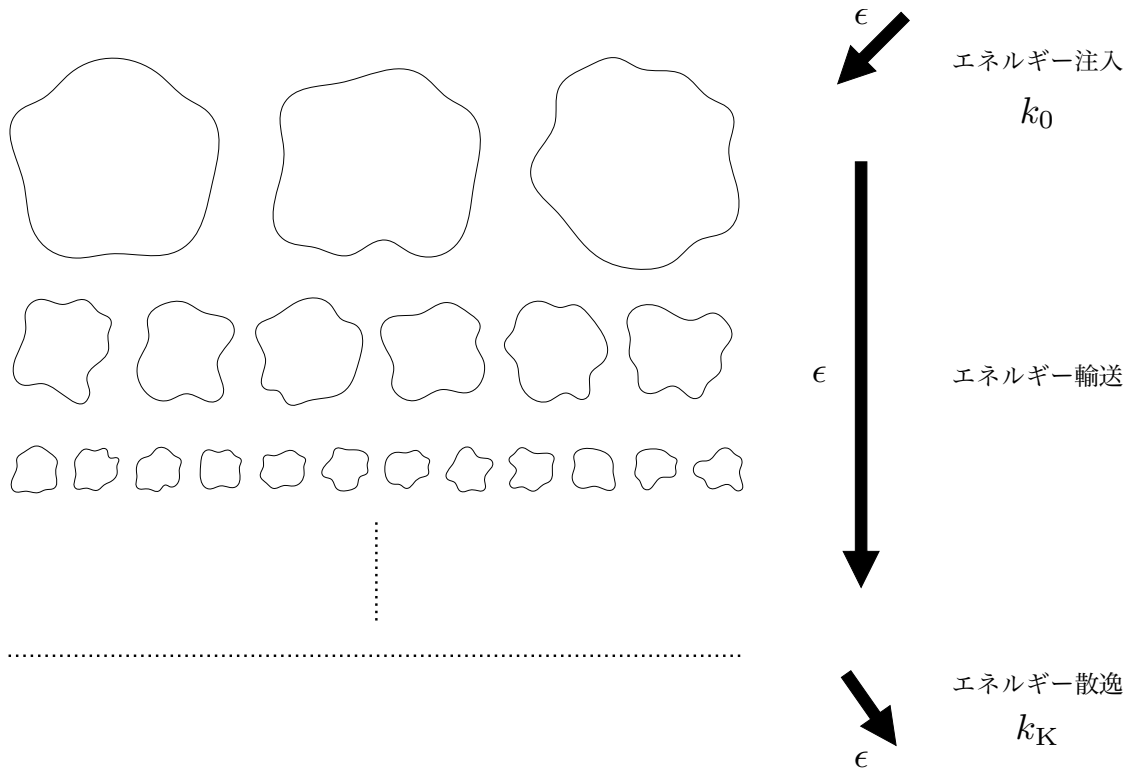


図 2.5: Richardson カスケードの模式図．この図は文献 [16] を参考にして，筆者が作成したものである．

と表される． F は無次元関数である．

Kolmogorov の第 2 仮説
 Reynolds 数が無限大の極限で，全てのスケールの統計的性質は，スケール l ，平均エネルギー散逸率 ϵ によって一意かつ普遍的に決定される．

これより，Reynolds 数が無限大の極限で運動エネルギースペクトルは動粘性率に依らないので， $F \propto (k\epsilon^{-1/4}\nu^{3/4})^{-5/3}$ が要請されて，

$$\mathcal{E}(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3} \tag{2.133}$$

が得られる．これは Kolmogorov の $-5/3$ 乗則と呼ばれており，多くの実験と数値計算で確認されている．図 2.3 中の実線はこのべき乗則を表しており，実験結果と良い一致を示していることがわかる．このような Kolmogorov 則が現れる領域は慣性領域と呼ばれている．そこでは，慣性項がエネルギー輸送に大きな寄与を与えており，Kolmogorov 長 $\eta = \epsilon^{-1/4}\nu^{3/4}$ に対応する波数 $k_K = 1/\eta$ よりも低波数側に現れる．

Kolmogorov の $-5/3$ 則が現れるときのエネルギー輸送を図にまとめると，図 2.4 のようになる．エネルギーがある波数 k_0 で注入され，慣性領域 ($k_0 \ll k \ll k_K$) でエネルギーが一様に流れ，この領域で $-5/3$ 乗則が現れる．そして，高波数領域 ($k_K \sim k$) で，運動エネルギーが散逸される．この

2.2 古典流体の乱流理論

ような過程をエネルギーダイレクトカスケードと呼ぶ。

このエネルギーカスケードは波数空間で議論しているため、直感的に何が起きているかが分かりにくい。このカスケード現象を実空間の言葉で焼き直した描像が Richardson カスケードである。このカスケードでは、まず波数 k_0 に対応したスケールの渦が生成され、それらが互いに相互作用をして、大きな渦が小さな渦へと分裂していく。この過程はおよそ Kolmogorov 長 η まで行われると考えられている。このカスケードを模式的に表したのが図 2.5 である。この実空間の描像はわかりやすいが、実はエネルギーダイレクトカスケードが Richardson カスケードに対応しているのかがどうかはよく理解されていない。

最後に、高次の相関関数についてコメントしておく。ここでの解説では K41 理論を速度場の 2 次相関関数に対して適用したが、より高次の相関関数に対しても K41 理論を用いて、べき乗則を導出することができる [18]。しかし、高次相関は揺らぎのより細かい構造の情報を含んでおり、間欠性の影響が顕著になると考えられている。その結果として、K41 理論から得られるべき指数は、高次相関関数に対しては大きくズレることが知られている。

2.2.4 弱波動乱流理論

前項では、NS 方程式の慣性項が支配的な強い乱流に関する内容について解説した。このとき速度場は非常に乱れており、局所的な渦度場は大きな値を持ちうる。このような強い乱流とは異なる弱い乱流がある。それは弱波動乱流と呼ばれており、非線形項が非常に弱く、線形波が互いに弱く相互作用している乱流である。もともとは、流体表面に現れる界面張力波、界面重力波やプラズマの波動の研究の中で発展してきた理論である [95, 96]。本論文では、冷却原子気体 BEC の弱波動乱流を扱うので、弱波動乱流理論を以下に解説する。

弱波動乱流理論は、正準形式の方程式に適用される理論である。一般に、波動の正準変数を $c(\mathbf{k})$ としたとき、その時間発展は次の正準方程式に従う。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c(\mathbf{k}) = \frac{\partial}{\partial c^*(\mathbf{k})} H \quad (2.134)$$

ここで H は波動のハミルトニアンであり、その具体的な表式は取り扱う問題に強く依存する。多くの場合、次のように正準変数を用いて展開することができる。

$$\begin{aligned} H = & \sum_{\mathbf{k}_1} \epsilon(\mathbf{k}_1) |c(\mathbf{k})|^2 \\ & + \sum_{\mathbf{k}_1=\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3} V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) (c^*(\mathbf{k}_1)c(\mathbf{k}_2)c(\mathbf{k}_3) + \text{c.c.}) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4} W(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) c(\mathbf{k}_1)c(\mathbf{k}_2)c^*(\mathbf{k}_3)c^*(\mathbf{k}_4) \\ & + \dots \end{aligned} \quad (2.135)$$

ここで、 $\epsilon(\mathbf{k})$, $V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$, $W(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$ は、線形波の分散関係、3 波相互作用係数、4 波相互作用係数である。

2.2 古典流体の乱流理論

弱波動乱流理論では、線形波が弱く相互作用する状況を想定しており、これは波動の相互作用ハミルトニアンが1体ハミルトニアンよりも小さいことを意味する。つまり、式(2.135)において最も支配的な項は1体ハミルトニアンである。

式(2.135)では、相互作用ハミルトニアンとして3, 4波相互作用までしか示していないが、どの種類の波動間相互作用が支配的であるかは系に強く依存する。具体例を挙げると、表面張力波乱流では3波相互作用、プラズマ中のLangmuir波乱流では4波相互作用、1次元光乱流では6波相互作用が支配的であることが知られている。多くの場合、3もしくは4波相互作用のみが支配的であるが、1次元系は特別でより高次の波動間相互作用が重要になる傾向がある。

さて、式(2.134)に具体的に弱波動乱流理論を適用するために、問題設定をより明確にする。まず、波動間相互作用は3波相互作用が支配的であると、線形波の分散関係は $\epsilon(k) \propto k^\alpha$ ($\alpha > 1$)を満たすとする。さらに、3波相互作用係数は、 β 次の同次関数であるとする。つまり、次式を仮定する。

$$V(\lambda \mathbf{k}_1, \lambda \mathbf{k}_2, \lambda \mathbf{k}_3) = \lambda^\beta V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \quad (2.136)$$

ここで、 λ は定数である。これらの条件を満たす系としては、例えば表面張力波の弱波動乱流がある。このとき、正準方程式は、

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c(\mathbf{k}) &= \epsilon(\mathbf{k})c(\mathbf{k}) \\ &+ \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} (V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})c(\mathbf{k}_1)c(\mathbf{k}_2) \\ &+ 2V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k} - \mathbf{k}_2)c(\mathbf{k}_1)c^*(\mathbf{k}_2)) \end{aligned} \quad (2.137)$$

となる。この方程式が解ければ、3波相互作用する波動の性質を理解することができる。しかし、この方程式は非線形の連立偏微分方程式であるので、このまま解析的に解くことは非常に難しい。

そこで、弱波動乱流理論では次式で定義する波動の波数分布に注目して、その時間発展方程式を導出する。

$$n(\mathbf{k}) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d \langle |c(\mathbf{k})|^2 \rangle_{\text{en}} \quad (2.138)$$

この分布は明らかに、正準変数の2次モーメントである。一般に、非線形方程式の2次モーメントの時間発展方程式を導出すると、必ず高次モーメントが入り込む(今の例では3次モーメントが入る)。そのため、方程式を解くためには、その高次モーメントの時間発展方程式が必要になるが、その中にさらに高次のモーメントが現れ、方程式が閉じなくなる。これはBBGKY階層という名で知られている問題であり、乱流研究では完結問題として古くから研究されている。弱波動乱流理論は、この完結問題を摂動論を用いて解決する方法論である。その理論の詳細は、文献[95, 96]に詳しく述べられている。ここでは、弱波動乱流理論を式(2.137)に適用した結果のみを示す。導出される方程式は、 $n(\mathbf{k})$ の時間発展方程式であり、それは、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{k}) &= I(\mathbf{k}) \\ &= \int (\mathcal{R}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) - \mathcal{R}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) - \mathcal{R}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1)) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \end{aligned} \quad (2.139)$$

2.2 古典流体の乱流理論

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) &= 2\pi |V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)|^2 \delta_d(\epsilon(k) - \epsilon(k_1) - \epsilon(k_2)) \delta_d(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \\ &\quad \times (n(\mathbf{k}_1)n(\mathbf{k}_2) - n(\mathbf{k}_2)n(\mathbf{k}) - n(\mathbf{k})n(\mathbf{k}_1)) \end{aligned} \quad (2.140)$$

と与えられる．ここで， $\delta_d(\dots)$ は Dirac のデルタ関数である．これは明らかに 2 次モーメントで閉じた方程式になっており，原理的に方程式を解くことができる．この運動論的方程式の定常解を求めることで，弱波動乱流の性質を調べることが可能となる．

ここでは，Zakharov 変換 [95, 96] を用いて定常解を求める．今，定常状態を仮定するので，解くべき方程式は，

$$0 = \int \left(\mathcal{R}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) - \mathcal{R}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) - \mathcal{R}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1) \right) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \quad (2.141)$$

となる．この方程式に Zakharov 変換を行うことで，次の 2 つの定常解が得られる．

$$n_T(k) \propto k^{-\beta-d} \quad (2.142)$$

$$n_E(k) \propto k^{-\alpha} \quad (2.143)$$

これらはそれぞれ乱流解 $n_T(k)$ と熱平衡解 $n_E(k)$ と呼ばれる．

このような名前で呼ばれる理由を理解するために，二つの解がどのような特徴をもっているかを示す．まず，熱平衡解は波動エネルギーの等分配則を表している．これは次のような考察から簡単に理解できる．線形波の波動エネルギー $\epsilon(k)$ は k^α に比例しているので，エネルギー等分配則を仮定すると，

$$n(k) \propto \epsilon(k)^{-1} \propto k^{-\alpha} \quad (2.144)$$

となる．これは式 (2.143) と一致しているので， $n_E(k)$ は熱平衡解と呼ばれる．一方，乱流解は波数に依存しない様なエネルギーフラックスを持つ解となっている．これを示すために，式 (2.139) から波動エネルギースペクトルの連続の式を導出する．波数 k の波動エネルギースペクトル $\mathcal{E}_w(k)$ は，波動エネルギー E_w を用いて，

$$\begin{aligned} E_w &= \int \epsilon(k)n(k)dk \\ &= \int \mathcal{E}_w(k)dk \end{aligned} \quad (2.145)$$

と定義される．乱流解では，波数空間の方向に関して波動の分布は等方的なので，波数空間の立体角積分を簡単に行える．その結果，

$$\mathcal{E}_w(k) = A_d k^{d-1} \epsilon(k)n(k) \quad (2.146)$$

が得られる．ただし， A_d は次元 d に依存した定数である．このとき，波動エネルギースペクトルの

2.2 古典流体の乱流理論

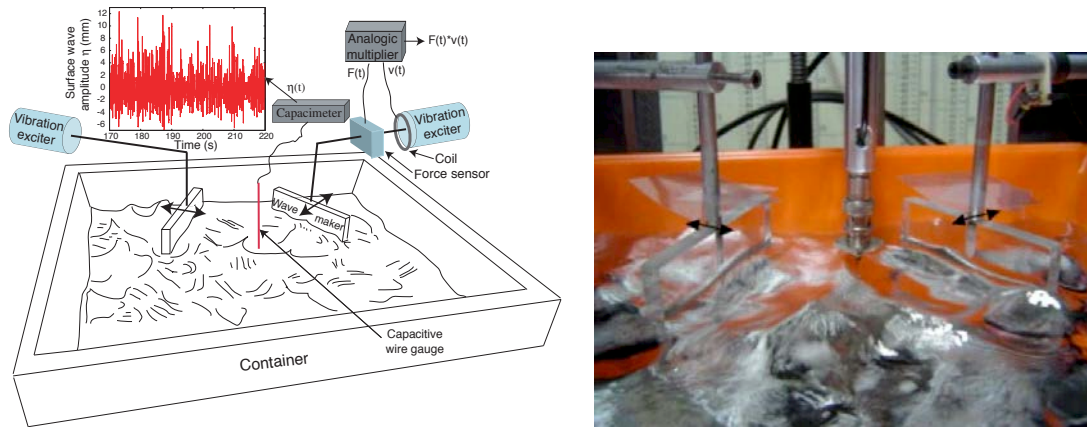


図 2.6: Falcon グループの弱波動乱流実験 [57, 58] . 左図は実験のスケッチである . Container に水もしくは水銀を入れ , Wave maker で波動を常時生成し続け , Capacitive wire gauge で表面波の波高を測定している . 右図は実際の実験の写真である . [Reprinted figure with permission from E. Falcon, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B* **13**, 819 (2010). Copyright (2010) by the American Institute of Mathematical Sciences.]

時間微分を計算すると , 式 (2.139) から次式が得られる .

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_w(k) + \frac{\partial}{\partial k} \Pi_w(k) = 0 \quad (2.147)$$

$$\Pi_w(k) = - \int_0^k A_d q^{d-1} \epsilon(q) I(q) dq \quad (2.148)$$

ここで , $\Pi_w(k)$ はエネルギーフラックスと呼ばれる量であり , 単位時間あたりに波数 k を通って流入する波動エネルギーと解釈できる . 乱流解でのエネルギーフラックスの振る舞いを調べるために , $q = kq'$ という変数変換を行うと ,

$$\begin{aligned} \Pi_w(k) &\propto k^{-d+2\beta} k^{3d} n_T(k)^2 \\ &= k^{-d+2\beta} k^{3d} k^{-2\beta-2d} \\ &= k^0 \end{aligned} \quad (2.149)$$

が導かれ , 解 $n_T(k)$ は波数 k に依存しないようなエネルギーフラックスを持つことがわかる . これは K41 理論に対応しているため , $n_T(k)$ は乱流解もしくは Kolmogorov-Zakharov 解と呼ばれる .

本項では 3 波相互作用する弱波動乱流に限定して , 弱波動乱流理論について解説したが , この理論は 4 波相互作用を持つ弱波動乱流などにも拡張することができる . ただし , 4 波相互作用では乱流解が 2 つ得られる場合があるので , 解の解釈に注意が必要である . この点に関しては , 第 6 章のスピンの波乱流で具体的に扱う .

ここで注意しなければならないことがある . Zakharov 変換では , 変換前後において式 (2.141) の

2.2 古典流体の乱流理論

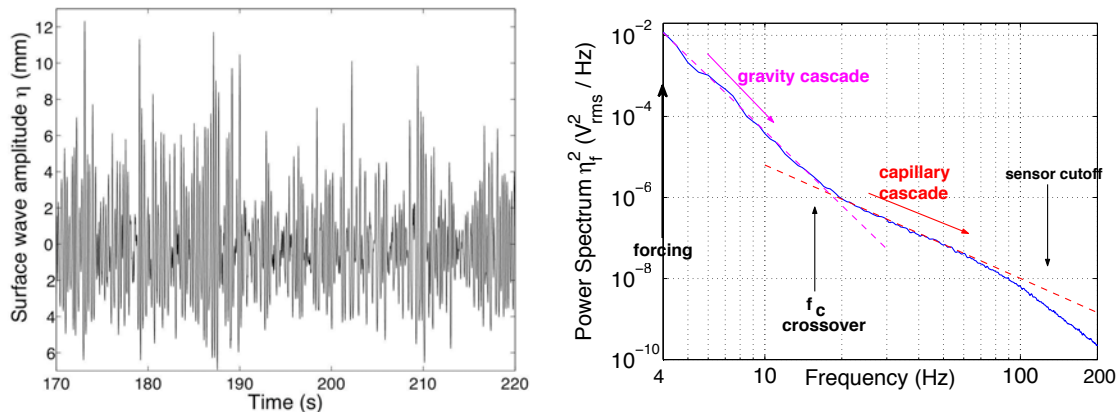


図 2.7: Falcon グループの弱波動乱流実験 [57, 58] . 左図は, 実験で得られた, ある固定された位置における波高 η の時間変化である . 右図は, 左図をフーリエ変換して得た波高のパワースペクトルである . 図中の破線は弱波動乱流理論から導出される表面重力波と表面張力波のべき乗則である . [Reprinted figure with permission from E. Falcon, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B* **13**, 819 (2010). Copyright (2010) by the American Institute of Mathematical Sciences.]

積分が発散しないことを仮定する . そのため, 得られたべき解を式 (2.141) に代入して, 積分が収束することを確認しなければならない . もし収束すれば, その解は数学的に正しい解となり, 波数空間において波動間相互作用に「局所性がある」という . 局所性がない場合は積分が発散してしまい, その解決には問題ごとに対処する必要がある . 例えば, 量子渦上に生じる Kelvin 波乱流では 6 波相互作用が支配的になるが, 素直に弱波動乱流理論を適用すると局所性のない解が得られる . この場合, 6 波相互作用から得られる波動の作用が保存しない 4 波相互作用のみを抽出することで局所性のある解を導出できる [97, 98] .

最後に, 弱波動乱流の実験結果について簡単に触れておく . パリ第 7 大学の Falcon グループは, 水と水銀を用いて表面重力波と表面張力波の弱波動乱流の実験を行っている [57, 58] . 実験では図 2.6 に示されているように Wave maker で波動を常時生成しつづけ, 定常的な弱波動乱流状態を得ている . このとき, 彼らはある固定された位置において波動の波高 $\eta(t)$ の時間変化を測定して, 弱波動乱流理論との比較を行っている . 図 2.7 の左図は, その実験結果で波高はとても複雑な時間変化をしている . これを時間に関してフーリエ変換して得た波高のパワースペクトルが図 2.7 の右図である ¹ . この実験では表面重力波と表面張力波が共存しているので, 2 つの分散関係のクロスオーバー領域 ($f_c \sim 17$ Hz) を境にスペクトルの振る舞いに変化している . グラフにある 2 つの破線は弱波動乱流理論から導かれる表面重力波と表面張力波のべき乗則であり, 実験結果と良い一致を示していることがわかる . このように, 弱波動乱流理論から予想されるべき乗則は実験で観測されている . これ以外の実験例としては, 強磁性流体の表面波乱流 [59], 弾性波乱流 [60], 光乱流 [61] などがある .

¹実験ではスペクトルの周波数依存性を観測している . このスペクトルは波の分散関係を用いて波数空間に変換可能である .

2.2.5 乱流の定義

本節の最後に乱流の定義について述べる．結論から述べると，現時点で乱流の定義は定まっておらず，研究者ごとに異なっている．今まで解説してきた乱流は，波数空間で物理量のフラックス（例えば，エネルギーフラックス）が一様に流れることを特徴としており，その結果としてべき乗則を示す．しかし，このような一様なフラックスを持たなくても，流れが一見すると乱れている状態をつくることは可能である．この具体例としては，乱流の非平衡転移などが考えられる．そのため，波数空間におけるフラックスが一定の状態を乱流と定義すると，狭義の定義となってしまう．このような状況のため，乱流の定義は不明瞭なままである．

本博士論文では，特にフラックスが一定となる乱流のみを対象として研究を行った．この種の乱流の理論は古典流体において比較的発達しており，原子気体 BEC の乱流研究においても，このような取り扱いやすい基礎的なところから理解していくべきと考えたためである．また，ここで議論した乱流は，基本的にエネルギー注入とエネルギー散逸が釣り合った統計的定常状態を想定している．しかし，エネルギー注入を初期だけ行い，その後乱流を減衰させる場合にも，局所的にはフラックス一定に付随するべき乗則は現れうる．そのため，本論文でも，このような減衰乱流を数値的に調べている．

2.3 冷却原子気体 BEC における乱流の先行研究

もともと量子流体の乱流研究は超流動ヘリウムを舞台として長年研究が行われてきた [20–23]。しかし、新しい量子流体である冷却原子気体 BEC の実現以降、この系を舞台とした乱流研究が行われるようになった。本節では、GP 方程式を用いた理論研究と冷却原子気体 BEC で行われてきた実験研究について概説する。

2.3.1 GP 方程式を用いた理論研究

古典乱流と同様に、量子乱流においても統計量の振る舞いが調べられている。超流動ヘリウムでは、初期の研究から第 2 音波を用いて測定される渦糸長密度などが調べられてきた [25]。しかし、1990 年代から量子乱流における Kolmogorov の $-5/3$ 乗則を模索する研究が行われるようになった。GP 方程式を用いた、この方向性のパイオニア的研究は、Nore 達により行われた [99]。この研究はもともとは超流動ヘリウムを想定した研究であるが、GP 方程式はこの系を定量的に扱えないため、あくまで定性的理解を得るために研究が行われた。GP 方程式でよく記述される冷却原子気体 BEC の乱流を研究するにあたって、この先行研究を理解することは重要であるので、以下その詳細について述べる。

Nore 達は Taylor–Green 渦を初期状態として 3 次元系の GP 方程式を数値的に解き、減衰乱流を生成して、運動エネルギースペクトルの時間変化を調べた。ここで、GP 方程式で記述される量子流体は圧縮性流体であることに注意しなければならない。このため、非圧縮性流体を基礎におく K41 理論をこの系に単純に適用することはできない。そこで、彼らは運動エネルギーを圧縮性運動エネルギーと非圧縮性運動エネルギーに分割することを試みた。GP 方程式から速度場の運動エネルギー E_{GP} は、

$$E_{GP} = \frac{M}{2} \int \rho v^2 dr \quad (2.150)$$

と書き下せる。ここで、 $A = \sqrt{\rho}v$ という量を定義して、そのフーリエ係数 $\bar{A}(k) = \mathcal{F}[A(r)]$ を用いてエネルギースペクトルを次式で定義する。

$$E_{GP} = \int \mathcal{E}_{GP}(k) dk \quad (2.151)$$

システムサイズが $L \times L \times L$ の有限系では、波数は離散化され、スペクトルは次式で書ける。

$$\mathcal{E}_{GP}(k) = \frac{L^3 M}{2\Delta k} \sum_{\mathbf{k}_1 \in \Omega_k} |\bar{A}(\mathbf{k}_1)|^2 \quad (2.152)$$

これは、明らかに、

$$E_{GP} = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{GP}(k) \Delta k \quad (2.153)$$

を満たす。本章では、以下波数が離散化された表式を用いる。次に、ベクトル A に対して Helmholtz

2.3 冷却原子気体 BEC における乱流の先行研究

分解を行うと,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_i + \mathbf{A}_c \quad (2.154)$$

となる. ただし, $\text{div}\mathbf{A}_i = 0$ と $\text{rot}\mathbf{A}_c = 0$ を満たす. すると, エネルギースペクトルは次のように非圧縮性成分と圧縮性成分に分解できる.

$$\mathcal{E}_{\text{GP}}(k) = \mathcal{E}_{\text{GP}}^i(k) + \mathcal{E}_{\text{GP}}^c(k) \quad (2.155)$$

$$\mathcal{E}_{\text{GP}}^i(k) = \frac{L^3 M}{2\Delta k} \sum_{\mathbf{k}_1 \in \Omega_k} |\bar{\mathbf{A}}_i(\mathbf{k}_1)|^2 \quad (2.156)$$

$$\mathcal{E}_{\text{GP}}^c(k) = \frac{L^3 M}{2\Delta k} \sum_{\mathbf{k}_1 \in \Omega_k} |\bar{\mathbf{A}}_c(\mathbf{k}_1)|^2 \quad (2.157)$$

ただし, $\bar{\mathbf{A}}_i(\mathbf{k}) = \mathcal{F}[\mathbf{A}_i(\mathbf{r})]$, $\bar{\mathbf{A}}_c(\mathbf{k}) = \mathcal{F}[\mathbf{A}_c(\mathbf{r})]$ である. 彼らは非圧縮性エネルギースペクトル $\mathcal{E}_{\text{GP}}^i(k)$ に Kolmogorov の $-5/3$ 乗則が現れると予想して, 数値的に $-5/3$ 乗則を確認した.

その後, Parker 達により冷却原子気体 BEC を想定した数値計算が行われた [100]. 彼らは捕獲ポテンシャルを回転させることで乱流状態を生成して, 非圧縮性エネルギースペクトルに $-5/3$ 乗則を見出した. 定常乱流に関しては, 小林達により数値計算が行われ, 現象論的な散逸項を導入することで定常量子乱流を作り出し, 非圧縮性エネルギースペクトルに $-5/3$ 乗則を確認した [101].

近年は, 超流動ヘリウムでは実験が難しい 2 次元量子乱流が活発に研究されている. 2 次元古典乱流は, 3 次元古典乱流とは異なり, エネルギーインバースカスケードとエンストロフィーダイレクトカスケードが起きる. この古典乱流とのアナロジーで, 2 次元量子乱流が注目されている. 現在のところ, このような 2 つのカスケードが起きるかどうかは議論がされている最中であり, 特にインバースカスケードが起きると主張するグループもあれば, そうでないグループもあり, 筆者にはこの問題の決着がついていないように思える [33–44].

2.3.2 冷却原子気体 BEC の実験研究

GP 方程式を用いた乱流の理論研究は 1990 年代後半から行われていたが, 冷却原子気体 BEC における乱流の実験研究は, 2009 年にサンパウロ大学の Bagnato グループにより初めて行われ, その後, アリゾナ大学の Anderson グループ, ソウル大学の Shin グループが実験を行うようになった. 本項では, この 3 つのグループで行われた乱流研究について概説する.

- サンパウロ大学の Bagnato グループ

Bagnato グループは, ^{87}Rb を磁気ポテンシャルで捕獲した細長い 3 次元の冷却原子気体 BEC を用意して, 捕獲トラップを回転, 振動させることで乱流状態を得た [13]. 実験パラメーターは, 全粒子数 $N = 1 \sim 2 \times 10^5$, 長軸方向のトラップ周波数 $\omega_z = 2\pi \times 23 / \text{s}$, 動径方向のトラップ周波数 $\omega_r = 2\pi \times 210 / \text{s}$ である. 図 2.8 の左図 (a) が得られた密度分布である. 彼らは, この密度分布から

2.3 冷却原子気体 BEC における乱流の先行研究

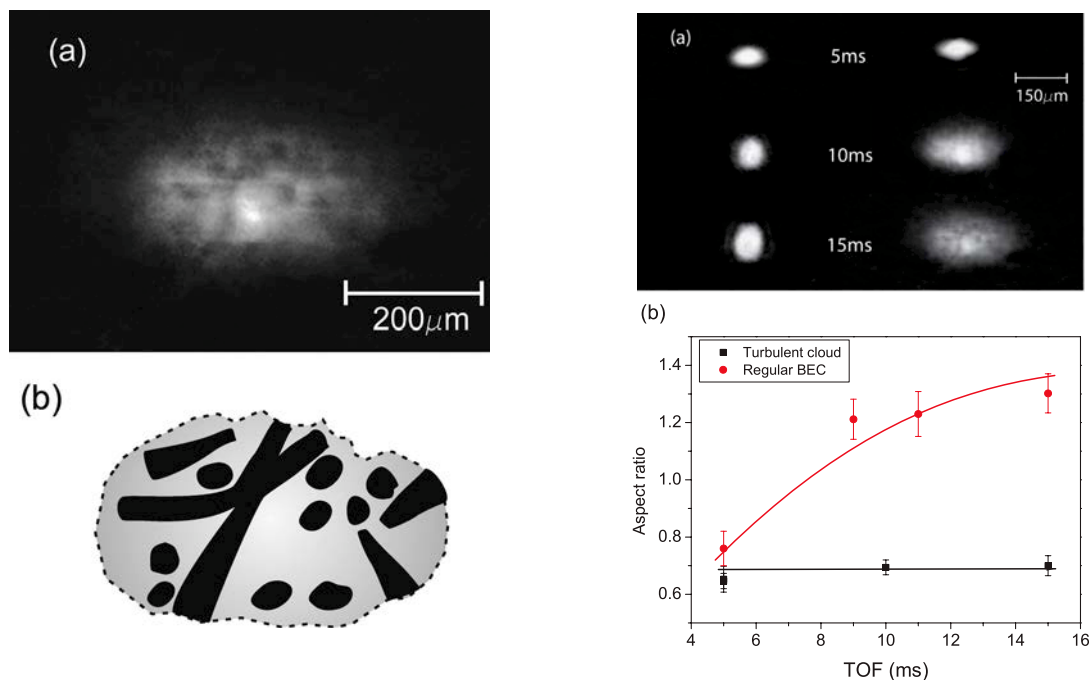


図 2.8: Bagnato グループの量子乱流実験 [13]. 左図 (a) は乱流状態の BEC を膨張させて得た密度分布であり．左図 (b) はこの分布から予想される量子渦 (黒領域) の配置図である．右図 (a) は定常状態 (左) と乱流状態 (右) の BEC における膨張ダイナミクスの時間変化を示した密度分布である．右図 (b) は，右図 (a) の密度分布から得た縦横比の時間変化を示すグラフである．[Reprinted figure with permission from E. A. L. Henn *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 045301 (2009). Copyright (2009) by the American Physical Society.]

図 2.8 の左図 (b) の黒領域のように量子渦が分布していると推察して，乱流状態を得たと結論づけている．

さらに乱流状態を生成しただけでなく，彼らは乱流状態に特有の振る舞いを，捕獲ポテンシャルから BEC を解放させた後の膨張ダイナミクスにおいて見出した．図 2.8 の右図 (a) がその実験結果であり，膨張ダイナミクスの時間変化が密度分布で示されている．この図において，左が定常状態の BEC，右が乱流状態の BEC の膨張ダイナミクスを示しており，密度分布の縦横比に明確な違いが生じていることがわかる．定常状態では，動径方向の捕獲トラップによる閉じ込めが強いため，縦横比が入れ替わるが，乱流状態では初期の縦横比が維持される．これを定量的に評価するために，縦横比が調べられ，図 2.8 の右図 (b) にその結果がまとめられている．この膨張ダイナミクスは，量子渦の速度場により引き起こされていると予想されているが [102, 103]，現時点で乱流状態の膨張ダイナミクスは数値的に調べられていない．

また，定常状態の運動量分布 $n(p)$ を測定する方法を用いて，乱流状態の $n(p)$ が観測された [104]．その結果，べき乗則的な振る舞いが観測されており，Komogorov の $-5/3$ 乗則との関係が議論されている．論文としては出版されていないが，同じような $n(p)$ の測定をケンブリッジ大学の Hadzibabic グループも学会で報告している [105]．ただ，定常状態の手法を用いて得た $n(p)$ が，本当の運動量分

2.3 冷却原子気体 BEC における乱流の先行研究

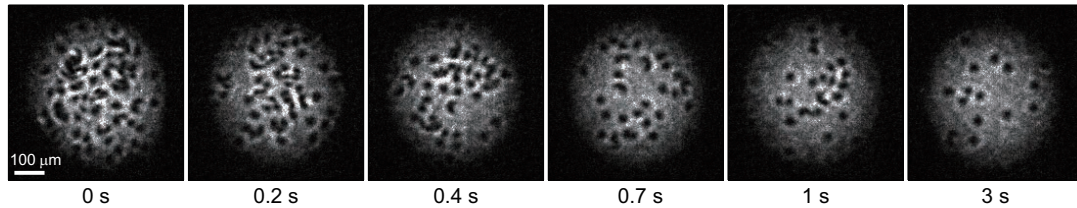


図 2.9: Shin グループの量子乱流実験 [15]. 2次元量子乱流における密度分布の時間変化. 黒い穴 (低密度領域) が量子渦と考えられている. 実験では量子渦の個数に注目して, 量子乱流の減衰が調べられている. [Reprinted figure with permission from W. J. Kwon *et al.*, *Phys. Rev. A* **90**, 063627 (2014). Copyright (2014) by the American Physical Society.]

布になっているかどうかは不明瞭らしく, 2 グループとも詳細な議論が必要と考えているようである.

- アリゾナ大学の Anderson グループ

Anderson グループは, 2次元量子乱流の研究を行っている. このタイプの量子乱流は, 超流動ヘリウムでは実現が困難であるため, 冷却原子気体に新奇な物理を発見できる可能性がある. 実験 [14] で用いた原子は ^{87}Rb で, 実験パラメータは全粒子数 $N \sim 2 \times 10^6$, 締め付け方向のトラップ周波数 $\omega_z = 2\pi \times 90 / \text{s}$, 動径方向のトラップ周波数 $\omega_r = 2\pi \times 8 / \text{s}$ である. このとき, 動径方向と締め付け方向の Thomas-Fermi 半径は, それぞれ $52 \mu\text{m}$, $5 \mu\text{m}$ であり, 締め付け方向の渦運動は抑制され, 2次元量子乱流を得ることできる.

乱流生成方法は, 捕獲ポテンシャル中の BEC に斥力型のガウシアンポテンシャルを導入した後, 捕獲ポテンシャルの原点を円運動させることで, 量子渦を生成し, 乱流状態を実現している. 彼らは, 渦が十分に生成した後にガウシアンポテンシャルを消して, 2次元量子乱流の減衰について調べている. その結果, 時間発展とともに系に大きなスケールの永久流が現れることを確認し, これはエネルギーインバースカスケードが起きた証左であると述べている.

- ソウル大学の Shin グループ

Shin グループは, Anderson グループと同様に 2次元量子乱流に焦点をあて, 量子渦のダイナミクスについて研究を行っている [15]. このグループでは, ^{23}Na を用いて, 全粒子数 $N = 1.8 \times 10^6$, 締め付け方向のトラップ周波数 $\omega_z = 2\pi \times 350 / \text{s}$, 動径方向のトラップ周波数 $\omega_r = 2\pi \times 15 / \text{s}$ の条件のもとで乱流状態を得た.

乱流生成方法としては, ガウシアン型の斥力ポテンシャルを導入して, それを固定した状態で捕獲ポテンシャルを水平方向に動かす方法が採用されている. このとき, 捕獲ポテンシャルを動かす速度に依存して, 生成する量子渦の個数が変化することが調べられている. 図 2.9 はこの方法で多数の量子渦を生成した後, 斥力ポテンシャルを消して, 密度分布の時間変化を観測した結果である. この実験では初期だけにエネルギー注入を行っているので乱流は減衰して, 時間経過とともに量子渦の個数が減少していく. 彼らは, 密度分布の凹みから, 量子渦の個数を数え上げ, その時間変化を調べた. その結果, 量子渦の減少には, 対消滅による過程と捕獲ポテンシャルの外に逃げていく過程が重要で

2.3 冷却原子気体 BEC における乱流の先行研究

あることが見出された。その後、Newcastle 大学の理論グループの Stagg 達が、2 次元 GP 方程式の数値計算を行い、この描像を確認した [44]。

第3章 強磁性スピノールBECのスピノール乱流

本章では、強磁性相互作用するスピン1スピノールBECにおける強磁性スピノール乱流をスピノールGP方程式を用いて調べる。初めに、捕獲ポテンシャルなしの一様系において、スピンと速度場の2点相関関数の振る舞いを解析・数值的に調べる。その後、実験を想定した捕獲ポテンシャル中の強磁性スピノール乱流の性質を議論する。

3.1 研究背景・動機

本論文の序論で既に述べたように、冷却原子気体BECは超流動ヘリウムにない特徴を持ち、量子乱流研究に新しい方向性を与える可能性を秘めている。本章では、この方向性の1つである「多成分量子流体の量子乱流」について述べる。

従来の冷却原子気体BECの乱流研究は基本的に1成分BECを舞台として行われてきた。そこでは、超流動速度場に注目して、古典乱流のKolmogorovの $-5/3$ 乗則 [16, 17] が、Nore達により減衰乱流の過程で、小林達により定常的に現れることをGP方程式の数値計算を用いて示された [99, 101]。実験も同じく、1成分BECの乱流に注目し、サンパウロ大学のBagnatoグループ、アリゾナ大学のAndersonグループ、ソウル大学のShinグループが量子渦が多数生成された状態を作ること成功している [13–15]。

このような量子乱流とは全く異なる乱流が、冷却原子気体BECでは実現できる可能性がある。それが内部自由度を持つ多成分BECにおける量子乱流である。実験で実現されている多成分BECとしては、2成分BEC、スピノールBECなどがある。特に2成分BECに関しては、流体力学的不安定性現象が実験と理論の両面から研究されている。例えば、古典流体 [106] で現れるKelvin-Helmholtz不安定性、Rayleigh-Taylor不安定性、Richtmyer-Meshkov不安定性や対向流不安定性が2成分BECで理論的に調べられている [107–110]。これらは2成分BECの乱流へとつながる研究であり、既にこの系の乱流研究は理論的に行われ始めている [110–115]。実験では、対向流不安定性などの性質が調べられている [11, 12, 51–53]。このように、現在、多成分BECにおいて流体力学的な研究が多く行われている。

一方、スピノールBECに関しては、流体力学の視点からの研究は多くなく、乱流現象に関する研究はない。この系は異なる磁気量子数を持つ巨視的波動関数で記述されるため、速度場とスピン場の2つの自由度が互いに相互作用する結合乱流が実現する。そのため、従来の量子乱流とは全く異なる新奇な乱流現象が期待できる。例えば、スピン場のような一見すると流体とは関係がない物理量が、乱流的な振る舞いを示すのかどうかという問題を提起し、そこに非自明な物理が潜んでいる可能性がある。この乱流では、速度場とともにスピン場が強く乱れるので、以下この乱流を「スピノール乱流」と

呼ぶ。

本章では、筆者の原著論文 [116–118] で取り扱った強磁性相互作用するスピン 1 スピノール BEC のスピン乱流について議論する。まず、3.2–3.5 節において捕獲ポテンシャルなしの一様系のスピン乱流の結果について示す。そこでは、まずスピン乱流を生成するために用いる対向流不安定性について述べる。その後、Kolmogorov 型の次元解析的スケーリングをスピノール GP 方程式に適用して、スピン相関関数に現れるべき乗則を導出し、それに対応する数値計算結果を示す。次に速度場の相関関数に関する結果を解説する。そして、3.6 節で実験を想定した捕獲ポテンシャル中の非一様系の数値計算結果を示す。最後の 3.7 節では、有限温度の効果について議論する。

3.2 研究手法

本研究では、絶対零度における印加磁場無しのスピン 1 強磁性スピノール BEC におけるスピン乱流を扱う。この系を定量的に記述する方程式は、第 1 章で述べたスピン 1 スピノール GP 方程式である。3.2–3.5 節では、捕獲ポテンシャルなしの一様系を考えるので、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_m = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi_m + c_0 \rho \psi_m + c_1 \sum_{n=-1}^1 \mathbf{F} \cdot (\mathbf{F}_{mn}) \psi_n \quad (3.1)$$

を基礎方程式とする。3.6 節では捕獲ポテンシャルがある場合を議論するため、上式の右辺にスピンに依存しないポテンシャル項 $V_{\text{trap}} \psi_m$ を付け加える。粒子間相互作用としては、強磁性相互作用を考えているので、 $c_0 > 0$ 、 $c_1 < 0$ である。

式 (3.1) は偏微分方程式なので方程式を解くためには、初期状態と境界条件を決める必要がある。本研究では、スピン乱流を生成するために初期状態として不安定な状態を用意し、その状態から乱流を生成して減衰させる。境界条件は周期境界条件とする。ここでは、まず 3.2–3.5 節で初期状態として用いる対向流状態について述べる。この状態は数式で書くと、

$$\begin{pmatrix} \psi_1^{\text{ini}} \\ \psi_0^{\text{ini}} \\ \psi_{-1}^{\text{ini}} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\rho_0}{2}} \begin{pmatrix} \exp\left[i\left(\frac{M}{2\hbar} \mathbf{V}_R \cdot \mathbf{r} - \frac{\mu_1}{\hbar} t\right)\right] \\ 0 \\ \exp\left[-i\left(\frac{M}{2\hbar} \mathbf{V}_R \cdot \mathbf{r} + \frac{\mu_{-1}}{\hbar} t\right)\right] \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

と表される。ここで、 V_R は対向流の相対速度、 ρ_0 は一様な粒子数密度 N/V 、 μ_1, μ_{-1} は $c_0 \rho_0 + MV_R^2/8$ で定義される化学ポテンシャルである。この式から明らかであるが、この状態は $m = 1$ と $m = -1$ の成分が反対方向に運動している状態である。

本章では、スピノール GP 方程式 (3.1) 及び初期状態 (3.2) に基づいて一様系のスピン 1 スピノール BEC の対向流不安定性とそれから得られるスピン乱流を調べた。その結果を 3.2–3.5 節で示す。捕獲ポテンシャルがある場合の初期状態については、3.6 節で詳しく説明する。

3.3 対向流不安定性

本節では，スピン乱流に至るまでの過程で重要なスピン 1 スピノール BEC の対向流不安定性を議論する．ここでは，線形解析を用いて不安定性の性質を明らかにする．初期状態 (3.2) からの微小な揺らぎの性質を調べるために巨視的波動関数を，

$$\psi_m = \psi_m^{\text{ini}} + \delta\psi_m \quad (3.3)$$

とおく． $\delta\psi_m$ が微小揺らぎに対応している．今，一様系を考えているので微小ゆらぎを，

$$\delta\psi_m = (u_m e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} - v_m^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}) e^{-iA_m} \quad (3.4)$$

のように平面波で展開する．ここで，式 (3.4) の位相 A_m は，

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_0 \\ A_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_1}{\hbar} t - \frac{M}{2\hbar} \mathbf{V}_R \cdot \mathbf{r} \\ \frac{\mu_0}{\hbar} t \\ \frac{\mu_{-1}}{\hbar} t + \frac{M}{2\hbar} \mathbf{V}_R \cdot \mathbf{r} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

である．式 (3.3) を GP 方程式 (3.1) に代入して，微小ゆらぎの一次の項まで残すと，

$$M_0 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \hbar\omega \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$M_{1,-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_{-1} \\ v_{-1} \end{pmatrix} = \hbar\omega \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_{-1} \\ v_{-1} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} \epsilon_0(k) + c_1\rho_0 - \frac{MV_R^2}{8} & -c_1\rho_0 \\ c_1\rho_0 & -\epsilon_0(k) - c_1\rho_0 + \frac{MV_R^2}{8} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$M_{1,-1} = \begin{pmatrix} h_+ & -\frac{\rho_0(c_0+c_1)}{2} & \frac{\rho_0(c_0-c_1)}{2} & -\frac{\rho_0(c_0-c_1)}{2} \\ \frac{\rho_0(c_0+c_1)}{2} & -h_- & \frac{\rho_0(c_0-c_1)}{2} & -\frac{\rho_0(c_0-c_1)}{2} \\ \frac{\rho_0(c_0-c_1)}{2} & -\frac{\rho_0(c_0-c_1)}{2} & h_- & -\frac{\rho_0(c_0+c_1)}{2} \\ \frac{\rho_0(c_0-c_1)}{2} & -\frac{\rho_0(c_0-c_1)}{2} & \frac{\rho_0(c_0+c_1)}{2} & -h_+ \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

が得られる．ただし， $\epsilon_0(k) = \hbar^2 k^2 / 2M$ and $h_{\pm} = \epsilon_0(k) + \rho_0(c_0 + c_1)/2 \pm \hbar \mathbf{V}_R \cdot \mathbf{k} / 2$ である．これらより， $m = \pm 1$ 成分の微小ゆらぎは互いに相互作用しているが， $m = 0$ 成分のそれは独立であることがわかる．これは初期状態 (3.2) に $m = 0$ 成分の凝縮体がないことに対応している．

この固有値方程式 (3.6)，(3.7) を解くと，その固有値が以下の分散関係を与える．

$$(\hbar\omega_0)^2 = (\epsilon_0(k) + c_1\rho_0 - \frac{1}{8}MV_R^2)^2 - c_1^2\rho_0^2 \quad (3.10)$$

3.4 スピン乱流におけるスピン相関関数

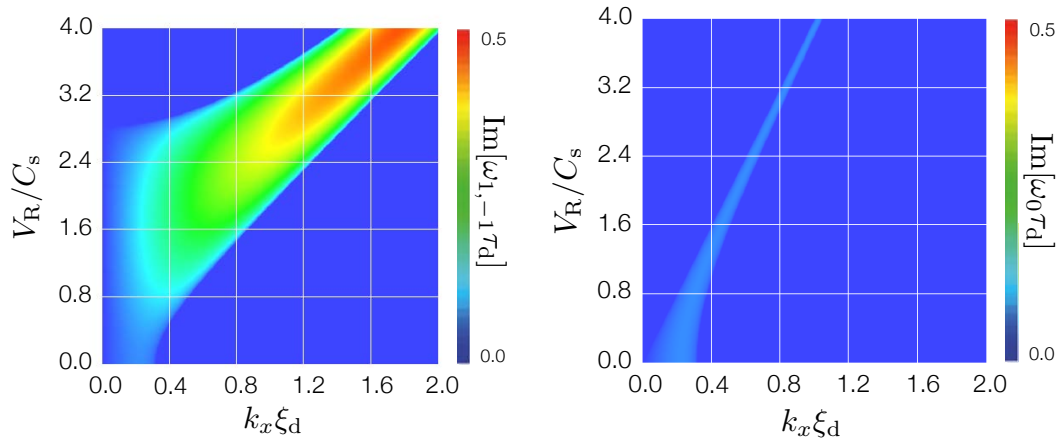


図 3.1: スピン 1 強磁性スピノール BEC における対向流状態まわりの揺らぎの分散関係の虚部．左図と右図はそれぞれ，横軸，縦軸を波数，相対速度にとり， $\text{Im}[\omega_{1,-1}]$ ， $\text{Im}[\omega_0]$ の大きさをカラーマップしたグラフである．パラメータとして， $c_0/c_1 = -20$ ， $c_0 > 0$ を用いた．[Reprinted figure with permission from K. Fujimoto *et al.*, *Phys. Rev. A* **85**, 033642 (2012). Copyright (2012) by the American Physical Society.]

$$\begin{aligned}
 (\hbar\omega_{1,-1})^2 &= \epsilon_0(k)^2 + (c_0 + c_1)\rho_0\epsilon_k + \frac{1}{4}(\mathbf{V}_R \cdot \hbar\mathbf{k})^2 \\
 &\pm \sqrt{(\mathbf{V}_R \cdot \hbar\mathbf{k})^2\epsilon_0(k)(\epsilon_0(k) + c_0\rho_0 + c_1\rho_0) + \rho_0^2(c_0 - c_1)^2\epsilon_0(k)^2} \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

この分散関係にはいくつかの特徴があり，それは振動数 $\omega_{1,-1}$ ， ω_0 の虚部に現れる．以下，対向流の相対速度を $\mathbf{V}_R = V_R \hat{e}_x$ とする．

図 3.1 は，式 (3.10) と式 (3.11) の虚部の大きさを，横軸に波数 k_x ，縦軸に相対速度 V_R として表したグラフである．ただし，横軸，縦軸，およびカラーマップは，それぞれ $\xi_d = \hbar/\sqrt{2Mc_0\rho_0}$ ， $C_s = \sqrt{c_0\rho_0/2M}$ ， $\tau_d = \hbar/c_0\rho_0$ で無次元化している．この図より，相対速度がゼロであっても初期状態は不安定性を起こすことがわかる．これは，粒子間相互作用が強磁性であるにもかかわらず，初期の対向流状態が完全な反強磁性状態をとっていることを反映している．この場合， $\text{Im}[\omega_{1,-1}]$ ， $\text{Im}[\omega_0]$ は同じ大きさを持つため，不安定性はどの成分も同じように現れる．しかし，有限の相対速度を持つと， $m = 1$ 成分と $m = -1$ 成分間の不安定性が強くなり，ダイナミクスとしては，初めに $m = \pm 1$ 成分に不安定性が起こり，その後 $m = 0$ 成分の不安定性が遅れて現れる．

この不安定性を利用することで，相対速度を制御して系に励起を起こしたい波数領域を調節することができる．スピン乱流においてダイレクトカスケードを起こしたいときには，相対速度を小さくして低波数領域に不安定性を引き起こせば良いことになる．

3.4 スピン乱流におけるスピン相関関数

前節の不安定性を用いて，スピン乱流状態を用意することができる．本節では，この乱流がどのように特徴付けられるかをスピン相互作用エネルギースペクトルを用いて議論する．

3.4 スピン乱流におけるスピン相関関数

単位質量あたりのスピン相互作用エネルギー E_s は,

$$E_s = \frac{c_1}{2NM} \int \mathbf{F}(\mathbf{r})^2 d\mathbf{r} \quad (3.12)$$

と定義される．これより，エネルギースペクトル $\mathcal{E}_s(k)$ は,

$$\mathcal{E}_s(k) = \frac{c_1}{2M\rho_0\Delta k} \sum_{\mathbf{k}_1 \in \Omega_k} |\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k}_1)|^2 \quad (3.13)$$

で与えられる．ここで， $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}[\mathbf{F}(\mathbf{r})]$ である．この表式より，エネルギースペクトルはスピン相関関数のフーリエ係数に対応していることがわかる．なぜなら，スピン相関関数 C_s を，

$$C_s(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int \mathbf{F}(\mathbf{r} + \mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (3.14)$$

と定義して，右辺をフーリエ係数で表現することで，

$$C_s(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} |\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k})|^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.15)$$

が得られるからである．

このエネルギースペクトルは実験的に観測できうることを強調しておく．スペクトルの表式 (3.13) から明らかなように，スピン密度ベクトルの空間分布が観測できれば，実験的に求められる．スピノール BEC の実験では，位相コントラスト法 [4, 49, 56] を用いて，スピン密度ベクトルが測定できるので，このスペクトルは十分観測できると考えられる．

以下の項では，Kolmogorov 型の次元解析的スケーリングをスピン流体方程式に適用することで，スピン相互作用エネルギースペクトルに現れるべき乗則を導出する．その後，数値計算を用いてこのべき乗則を確認したことを示す．

3.4.1 次元解析的スケーリングによる考察

スピン 1 スピノール GP 方程式に Kolmogorov 型の次元解析的スケーリングを適用して，スピン相互作用エネルギースペクトルに $-7/3$ 乗則が現れることを示す．本項の計算では次の 3 つの近似を用いて，解析を行う．

近似 (1)：巨視的波動関数は強磁性状態である．

近似 (2)：全粒子数密度は一定とみなせる．

近似 (3)：速度場は音速よりも十分に小さい．

今考察している系は，強磁性相互作用を持つスピノール BEC である．そのため，巨視的波動関数は第 1 章で述べた強磁性状態がよく記述される (近似 (1))．このとき，スピン流 (2.120) を式 (2.119) に代入することで，以下のスピンベクトルの運動方程式が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho f_\mu + \nabla \cdot \left(\rho f_\mu \mathbf{v} - \frac{\hbar}{2M} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \rho f_\nu \nabla f_\lambda \right) = 0 \quad (3.16)$$

3.4 スピン乱流におけるスピン相関関数

ここで、多くの実験において、 $|c_0/c_1| \gg 1$ であることに注目する。このことは、系の全粒子数密度を変化させるためには、大きなエネルギーが必要であることを意味している。そのため、今想定しているスピンだけが乱れている状況では、密度の揺らぎはとて小さいと考えられる。よって、 $\rho \simeq \rho_0$ と近似できる (近似 (2))。その結果、上式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} f_\mu + \nabla \cdot \left(f_\mu \mathbf{v} - \frac{\hbar}{2M} \epsilon_{\mu\nu\lambda} f_\nu \nabla f_\lambda \right) = 0 \quad (3.17)$$

となる。つづいて、速度場がスピン場にどれくらい影響を与えるかを評価するために、式 (3.17) を無次元化する。空間と時間を $t' = t/\tau_d$ 、 $\nabla' = \xi_d \nabla$ を用いて、規格化すると、

$$\frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{f} + \left(\frac{\mathbf{v}}{C_s} \cdot \nabla' \right) \mathbf{f} = \mathbf{f} \times \nabla'^2 \mathbf{f} \quad (3.18)$$

が得られる。ただし、全粒子数密度が一定であること、及びその連続の式より、 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ が成り立つことを用いた。ここで、速度場が音速と比較して、どの程度の大きさになるかを考察してみる。一般に、渦やソリトンのような構造ができると、それらの近傍で速度場 \mathbf{v} は C_s 以上の大きな値を持ちうる。しかし、乱流状態では、それ以外の場所で速度場は音速よりも十分小さくなるのが期待できる。次節で示すが、数値計算によると、速度場 \mathbf{v} の大きさの平均値はほぼ音速 C_s の 15% 程度になる。この事実と $|f| \simeq 1$ を組み合わせると、式 (3.18) の速度場を含む項はスピンの非線形項よりも寄与が小さくなる (近似 (3))¹。つまり、

$$\frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{f} = \mathbf{f} \times \nabla'^2 \mathbf{f} \quad (3.19)$$

を用いて、スピン乱流の性質を理解できることになる。

ここで、強磁性状態が維持されると、スピン相互作用エネルギーが保存することに注目する。このため、このエネルギーは古典乱流のようにエネルギーが波数空間で散逸されずに輸送されうる。そのため、K41 理論のような一様なエネルギーフラックスが存在する可能性がある。このような考察から、式 (3.19) に Kolmogorov 型の次元解析的スケールリング [119, 120] を適用する。

初めに、スケール変換 ($\mathbf{r} \rightarrow \alpha \mathbf{r}$, $t \rightarrow \beta t$) を行い、式 (3.19) がこの変換に対して不変であることを要請する。すると、 \mathbf{f} が $\alpha^2 \beta^{-1} \mathbf{f}$ となれば不変となることがわかる。これより、 \mathbf{f} のスケールリング次元は、

$$\mathbf{f} \sim \Lambda_f k^{-2} t^{-1} \quad (3.20)$$

となる。ただし、 Λ_f は次元を持つ定数である。このスケールリング次元と次元解析により、エネルギーフラックス ϵ_s の大きさは、

$$\begin{aligned} \epsilon_s &\sim \frac{|c_1|(\rho_0 \mathbf{f})^2}{M \rho_0 t} \\ &\sim \frac{|c_1| \rho_0 \Lambda_f^2}{M} k^{-4} t^{-3} \end{aligned} \quad (3.21)$$

と書ける。ここで、K41 理論と同様にエネルギーフラックス ϵ_s が波数によらないと仮定する。その

¹ 2 つの非線形項は微分の階数が異なるため、どちらの項が支配的になるかは波数に依存してくる。今の場合、荒く評価すると $|v/C_s| \sim 0.15 \lesssim k \xi_d$ を満たす波数領域において、式 (3.18) の速度場を含む項が無視できうる。

3.4 スピン乱流におけるスピン相関関数

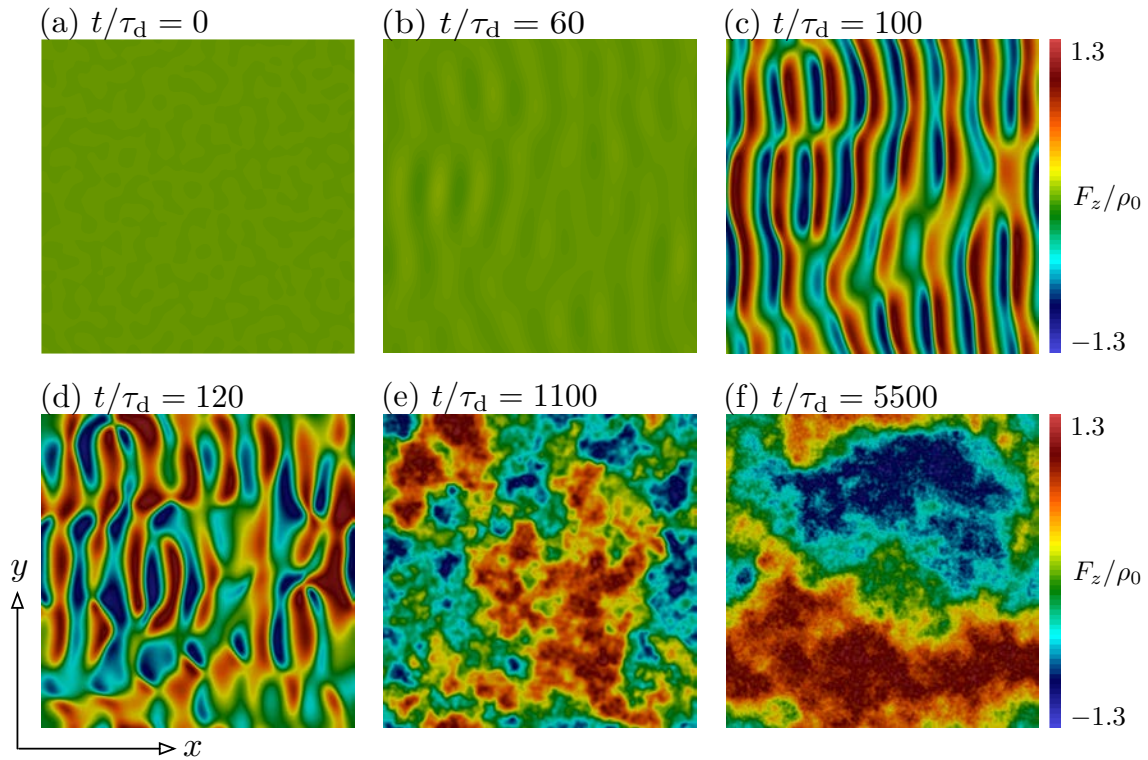


図 3.2: スピン密度ベクトルの z 成分 F_z の時間変化．図のサイズはシステムサイズと同じ $128\xi_d \times 128\xi_d$ である．対向流不安定性が (b) $t/\tau_d = 60$ で現れ，時間発展とともに細かい構造が形成され，スピン乱流が実現する．

結果，式 (3.13)，(3.20)，(3.21) より，スピン相互作用エネルギースペクトルは次元解析から，

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{E}_s(k)| &\sim \frac{|c_1|(\rho_0 \mathbf{f})^2}{M\rho_0 k} \\
 &\sim \Lambda_s^{2/3} \epsilon_s^{2/3} k^{-7/3}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

となる．ここで， $\Lambda_s = \Lambda_f \sqrt{|c_1| \rho_0 / M}$ とおいた．この結果は，スピン乱流中で一様なエネルギーフラックスを持つ状態が実現すれば，スピン相互作用エネルギースペクトルが $-7/3$ 乗則を示すことを意味している．

今回，導出した $-7/3$ 乗則は古典流体の Kolmogorov 則の指数である $-5/3$ と異なる．この違いは，系を記述する基礎方程式の非線形項の違いから生まれている．古典流体が従う NS 方程式の非線形項は微分 1 階の 2 次の非線形項であるのに対して，式 (3.19) の非線形項は微分 2 階の 2 次の非線形項である．このような非線形項の性質を $-7/3$ 乗則は強く反映している．

3.4 スピン乱流におけるスピン相関関数

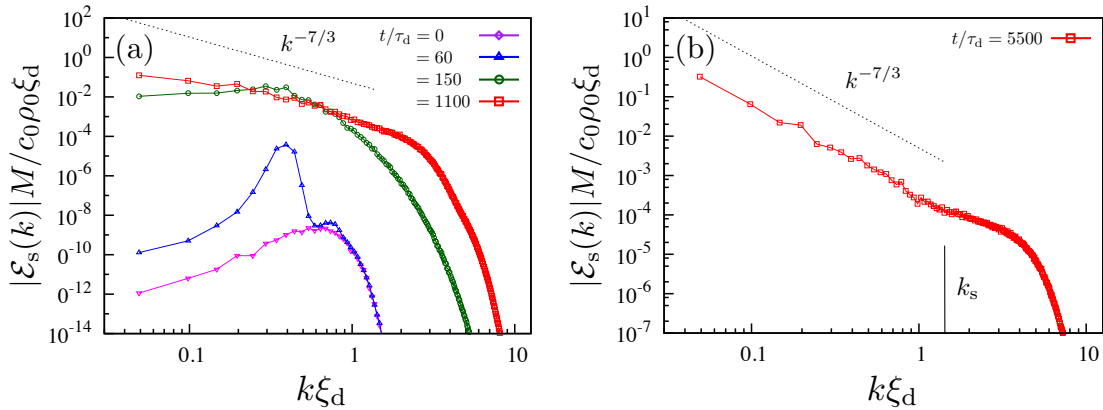


図 3.3: スピン相互作用エネルギースペクトルの時間変化。(a) は初期状態から不安定性を経て、高波数側にエネルギーが流れるまでの時間変化が示されている。(b) は十分時間が経過したときのスペクトルであり、 $-7/3$ 乗則がはっきりと確認できる。 $k_s = 2\pi/\xi_s$ はスピンコヒーレンス長 ξ_s に対応する波数であり、スピン渦のコアサイズと同程度のスケールである。

3.4.2 数値計算結果

本節では、前節で述べた対向流不安定性とスピン乱流中の $-7/3$ 乗則に関する数値計算結果を示す。初めに、数値計算の条件・手法について説明する。解く方程式は印加磁場無しの一様な 2 次元スピノール GP 方程式 (3.1) である。初期状態は式 (3.2) で表される対向流状態である。パラメータとしては、 $|c_0/c_1| = 20$, $V_R/C_s \simeq 0.785$ を用いた。システムサイズは $128\xi_d \times 128\xi_d$ で、空間、時間分解能は、 $dx/\xi_d = 0.25$, $dt/\tau_d = 10^{-3}$ である。この条件のもと擬スペクトル法 [121] を用いて、GP 方程式を数値的に解いた。

図 3.2 は、スピン密度ベクトルの z 成分 F_z の時間変化を示している。初期状態に微小なガウシアン型のノイズを加えているので、 $t/\tau_d = 0$ に非常に弱い揺らぎが存在している。この状態から時間発展すると、 x 軸方向に対向流があるので不安定性が生じて、 $t/\tau_d = 60$ のような縞模様が現れる。この模様の波数はおよそ $k\xi_d \sim 0.35$ であり、これは図 3.1 から予想される最も不安定性が強いモードに対応している。その後、 $t/\tau_d = 100$ に示されているように F_z の揺らぎが十分に成長し、縦長のドメイン構造が形成される。しかし、このドメインはすぐに崩壊し、 $t/\tau_d = 120$ のように複雑な振る舞いを示す。さらに時間が経過すると、 $t/\tau_d = 1100, 5500$ のようにより細かい構造が現れ、スピノールが強く乱れたスピン乱流状態が得られる。

ここで、スピン密度ベクトルの x, y 成分についてコメントしておく。図 3.1 からわかるように、 ψ_0 の不安定性は、他の成分と異なる。そのため、 F_x, F_y の初期の不安定性は、 F_z と異なる振る舞いを示す。しかし、スピン乱流状態になると初期状態の記憶はなくなり、全成分とも同じような振る舞いを示し、細かな構造が時間とともに現れ、系は等方的な乱流へと向かう。

次に、スピン密度ベクトルの 2 点相関関数であるスピン相互作用エネルギースペクトルの数値計算結果について示す。図 3.3 がスペクトルの時間変化を示したグラフである。初期のスペクトルはガウシアン型のノイズを入れたことを反映して、高波数成分はほぼゼロになっている。時間発展すると、初期の対向流不安定性に対応して、 $k\xi_d \sim 0.35$ 付近にスペクトルがピークを持つ。その後、図 3.2(b) と

3.4 スピン乱流におけるスピン相関関数

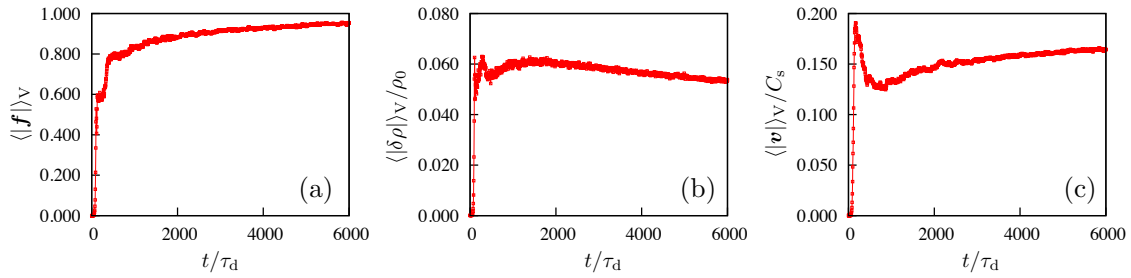


図 3.4: スピンベクトル, 密度揺らぎ, 速度場の大きさの空間平均 $\langle |f| \rangle_V$, $\langle |\delta\rho| \rangle_V$, $\langle |v| \rangle_V$ の時間変化. $-7/3$ 乗則を導出するために用いた近似 (1), (2), (3) の妥当性を確認するために, これらの量を計算した. 詳細は本文参照.

(c)にある縦長のドメイン構造が壊れるにともない, 時刻 $t/\tau_d = 150$ のスペクトルに示されているように, 異なる波数モードにエネルギーが輸送されてゆく. そして, さらに時間が経過すると, 時刻 $t/\tau_d = 1100$ のようにより高波数側にエネルギーが流れ, べき乗則の振る舞いが現れてくる. 図 3.3 中の破線は, 前節で導出した $-7/3$ 乗則であり, 数値データはそれと近い振る舞いを示している. より時間発展させると, 高波数側へのダイレクトカスケードがさらに進み, 図 3.3(b) のように, はっきりと $-7/3$ 乗則の出現を確認できた.

べき乗則が現れているスケール領域の上限は, スピンコヒーレンス長 $\xi_s = \hbar / \sqrt{2M|c_1|\rho_0}$ に対応する波数 $k_s = 2\pi/\xi_s$ となる. なぜなら, このスケールがおよそスピン渦のコアサイズやスピンドメインの壁サイズと同程度だからである. より詳細に述べると, ξ_s より小さいスケールでは, スピンの特徴的な構造が強く現れてしまい, べき乗則を導出するときに用いたエネルギーフラックス一定の仮定に抵触する可能性がある. その結果, この仮定を用いて導出したべき乗則が現れなくなると考えられる. 実際, 図 3.3 を見ると, $k_s < k$ の高波数領域では $-7/3$ 乗則からずれていることがわかる.

最後に, $-7/3$ 乗則を導出したときに用いた近似が妥当であるかどうかを議論する. 使用した近似は 3.4.1 項で既に示したが, 以下に再掲する.

近似 (1): 巨視的波動関数は強磁性状態である.

近似 (2): 全粒子数密度は一定とみなせる.

近似 (3): 速度場は音速よりも十分に小さい.

まず, 近似 (1) の妥当性を確かめるために, スピンベクトル $f = F/\rho$ の空間平均 $\langle |f| \rangle_V$ を計算した. なぜならば, 強磁性状態であれば $|f| = 1$ が成り立つからである. 図 3.4(a) がその数値計算結果である. 初期状態は反強磁性状態なので, ダイナミクスの初期では $\langle |f| \rangle_V$ は小さな値をとるが, $-7/3$ 乗則を示す時刻 $t/\tau_d = 5500$ 頃になると, 値はおよそ 0.95 になり, ほぼ強磁性状態となっていることが確認でき, 近似 (1) は良い近似になっていることがわかる. 次に, 近似 (2) の妥当性を確かめるために, 一様な粒子数密度 ρ_0 からの揺らぎ

$$\delta\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) - \rho_0 \quad (3.23)$$

を計算し, その大きさの空間平均 $\langle |\delta\rho| \rangle_V$ を図 3.4(b) に示す. この結果より, 密度揺らぎはおよそ

3.5 スピン乱流における速度相関関数

5%であり、とても小さいことがわかる。最後に、近似 (3) の妥当性を確かめるため、速度場の空間平均 $\langle |v| \rangle_V$ を計算した。図 3.4(c) がその結果であり、スピン乱流中で速度場は音速の 15% 程度となり、比較的小さいことがわかる。以上より、ここで示した数値計算の状況では、前節で行った近似 (1), (2), (3) は満たされていると考えられる。

本項で得られた結果を簡単にまとめると、スピン 1 強磁性スピノール BEC のスピン乱流を対向流不安定性を用いて生成して、スピン相互作用エネルギースペクトルを計算した。その結果、前項で導出した $-7/3$ 乗則とともに、その導出の際に用いた近似の妥当性を確認できた。

3.5 スピン乱流における速度相関関数

本節では、スピン乱流における速度場の 2 点相関関数の振る舞いについて議論する。前節までは、スピン自由度のみに注目してきたが、スピン乱流では勿論、速度場も乱れている。古典流体の乱流では速度場の相関関数に Kolmogorov の $-5/3$ 乗則が実験・理論研究で見出され、1 成分 BEC においても理論研究だけではあるが、同じべき乗則が確認されている。スピン乱流でも Kolmogorov 則が現れるかどうかは重要な問題である。

本節で注目する速度場の相関関数は、1 成分 BEC と同じく運動エネルギースペクトルである。スピン 1 スピノール GP 方程式では、速度場の単位質量あたりの運動エネルギーは、

$$E_v = \frac{1}{2N} \int dr A_v(\mathbf{r})^2 \quad (3.24)$$

で与えられる。ただし、 $A_v = \sqrt{\rho} v$ である。速度場 v_μ は、式 (2.105) で定義されているように、

$$v_\mu = \frac{\hbar}{2M\rho i} \left(\psi_m^* \nabla_\mu \psi_m - \psi_m \nabla_\mu \psi_m^* \right)$$

と書ける。これより、フーリエ係数 $A_v(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{A}_v(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ を用いると、運動エネルギースペクトルは、

$$\mathcal{E}_v(k) = \frac{1}{2\rho_0 \Delta k} \sum_{\mathbf{k}_1 \in \Omega_k} |\tilde{A}_v(\mathbf{k}_1)|^2 \quad (3.25)$$

となる。

以下、このスペクトルがどのような振る舞いをするかを Kolmogorov 型の次元解析的スケーリングを用いて考察し、その理論結果を数値計算で調べる。

3.5.1 次元解析的スケーリングによる考察

スピン 1 スピノール GP 方程式から得られるスピン流体方程式 (2.108)–(2.113) に Kolmogorov 型の次元解析的スケーリングを適用して、運動エネルギースペクトルについて議論する。

第 1 章で解説したように、スピン流体方程式はとても複雑な方程式である。このままではスケーリングの方法が使えないので、まず前節と同じ 3 つの近似を用いて、スピン流体方程式を単純化する。

3.5 スピン乱流における速度相関関数

その結果,

$$\frac{\partial}{\partial t} f_\mu \simeq \frac{\hbar}{2M} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \nabla \cdot [f_\nu (\nabla f_\lambda)] \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_\mu + v_\nu \nabla_\nu v_\mu \simeq -\frac{\hbar^2}{4M^2} \nabla_\nu \left\{ (\nabla_\mu f_\lambda) (\nabla_\nu f_\lambda) - f_\lambda (\nabla_\mu \nabla_\nu f_\lambda) \right\} \quad (3.27)$$

が得られる．ここで，式 (3.27) の左辺第 2 項の $v_\nu \nabla_\nu v_\mu$ は寄与が小さいが，後々の議論のために残しておく．

それでは，式 (3.26) と式 (3.27) に Kolmogorov 型の次元解析的スケーリング [119, 120] を適用する．スケール変換 $r \rightarrow \alpha r$, $t \rightarrow \beta t$ に対して，式 (3.26) と式 (3.27) が不変であることを要請すると，スピンベクトル f_μ と速度場 v_μ は， $f_\mu \rightarrow \alpha^2 \beta^{-1} f_\mu$, $v_\mu \rightarrow \alpha \beta^{-1} v_\mu$ のように変換されればよいことがわかる．つまり，スピンベクトルと速度場のスケーリング次元は， $f_\mu \sim \Lambda_f r^2 t^{-1}$, $v_\mu \sim \Lambda_v r t^{-1}$ となる．ここで， Λ_f , Λ_v は次元を持った定数である．

このスケーリング次元を用いて，運動エネルギースペクトルを考察する．今，近似 (2) より密度は一定としているので， $(A_v)_\mu \sim \Lambda_A r t^{-1}$ が成り立つ．ただし， $\Lambda_A = \sqrt{\rho_0} \Lambda_v$ である．ここで，運動エネルギーが一様なフラックス ϵ_v を持つとすると，次元解析より，

$$\begin{aligned} \epsilon_v &\sim \frac{A^2}{\rho_0 t} \\ &\sim \frac{\Lambda_A^2 k^{-2} t^{-2}}{\rho_0 t} \end{aligned} \quad (3.28)$$

が得られ，これを用いると，運動エネルギースペクトルは，

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_v(k) &\sim \frac{A^2}{\rho_0 k} \\ &\sim \Lambda_v^{2/3} \epsilon_v^{2/3} k^{-5/3} \end{aligned} \quad (3.29)$$

となる．このようにして，近似 (1), (2), (3) と一様な運動エネルギーフラックスを仮定することで， $-5/3$ 乗則を導出できる．

また，同じ計算をスピン相互作用エネルギーに対して行くと，

$$\mathcal{E}_s(k) \sim \Lambda_s^{2/3} \epsilon_s^{2/3} k^{-7/3} \quad (3.30)$$

が得られる．これは前節と同じ $-7/3$ 乗則である．この結果は，速度場の $-5/3$ 乗則とスピン場の $-7/3$ 乗則が共存する可能性を示している．しかし，この解析から 2 つのべき乗則の共存が保証されるわけではない．なぜなら，導出からわかるように $-7/3$ 乗則は速度場に関係なく，スピンの非線形項のみから生じているためである．

最後に，スピン乱流の $-5/3$ 乗則は K41 理論のそれとは根本的に異なることを強調しておく．本節の導出において，式 (3.27) の慣性項とスピンの非線形項の大きさをオーダー評価する．すると， $k\xi_d \gtrsim 0.1$ を満たす高波数領域において，スピンの非線形項が支配的になることがわかる¹．つまり，

¹ $|v|/C_s$ が 0.1 のオーダーであるため．

3.5 スピン乱流における速度相関関数

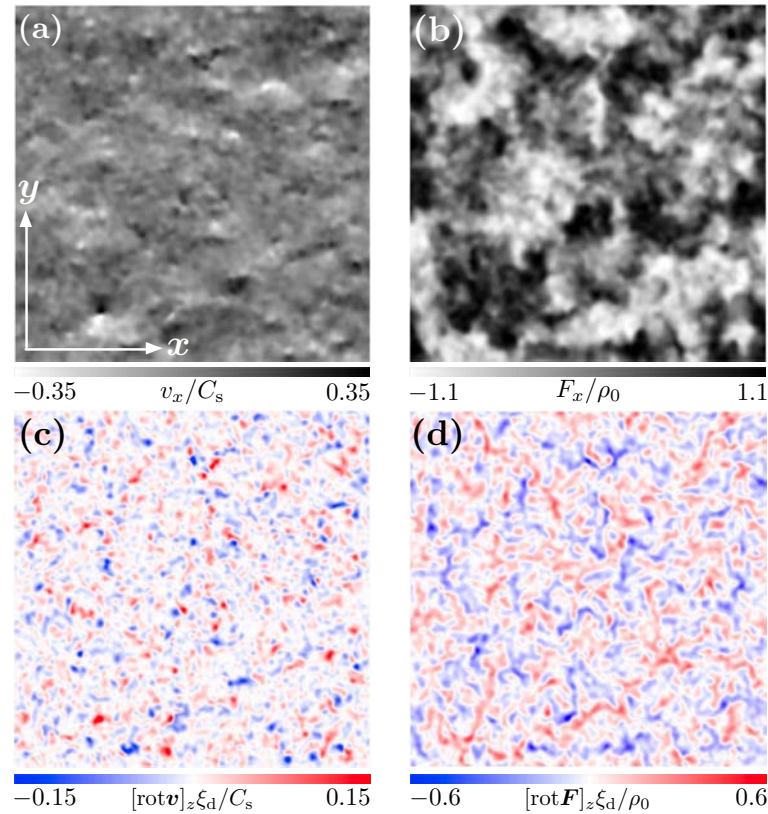


図 3.5: 時刻 $t/\tau_d = 700$ における (a) 速度場 v と (b) スピン密度ベクトル F の x 成分, (c) $[\text{rot}v]_z$, (d) $[\text{rot}F]_z$ の空間分布. 図のサイズはシステムサイズと同じ $256\xi_d \times 256\xi_d$ である. (a) と (b) から速度場とスピン密度ベクトルが乱れていることがわかる. 一方, (c) と (d) からは, 乱れつつ, それぞれのベクトルが至るところで回転を持っていることがわかる. 1 成分 BEC では循環の量子化を反映して渦度はデルタ関数型となり, とびとびの値を示すが, スピノール BEC では量子渦は存在せず, (c) のように渦度は連続的に分布する. [Reprinted figure with permission from K. Fujimoto *et al.*, *Phys. Rev. A* **90**, 013629 (2014). Copyright (2014) by the American Physical Society.]

この領域において, スピン乱流の $-5/3$ 乗則はスピンの非線形項から生じていることになる. 従来の古典流体と量子流体では慣性項が Kolmogorov 則を生み出していると考えられているので, スピン乱流の $-5/3$ 乗則が現れる機構は, 従来の系とは根本的に異なることを意味している.

3.5.2 数値計算結果

前項で考察した運動エネルギースペクトルの振る舞いを議論するために, スピン 1 スピノール GP 方程式の数値計算を行った. 基本的に数値計算方法は, 前節 3.4.2 と同じであるが, 1 つだけ異なる点がある. それは現象論的な散逸項を GP 方程式に取り入れた点である. まず, これら数値計算の条件・手法について解説する.

解く方程式は印加磁場無しの一様な 2 次元スピン 1 スピノール GP 方程式 (3.1) である. 初期状態は対向流状態である. パラメータとしては, $|c_0/c_1| = 20$, $V_R/C_s \simeq 0.294$ を用いた. システムサイ

3.5 スピン乱流における速度相関関数

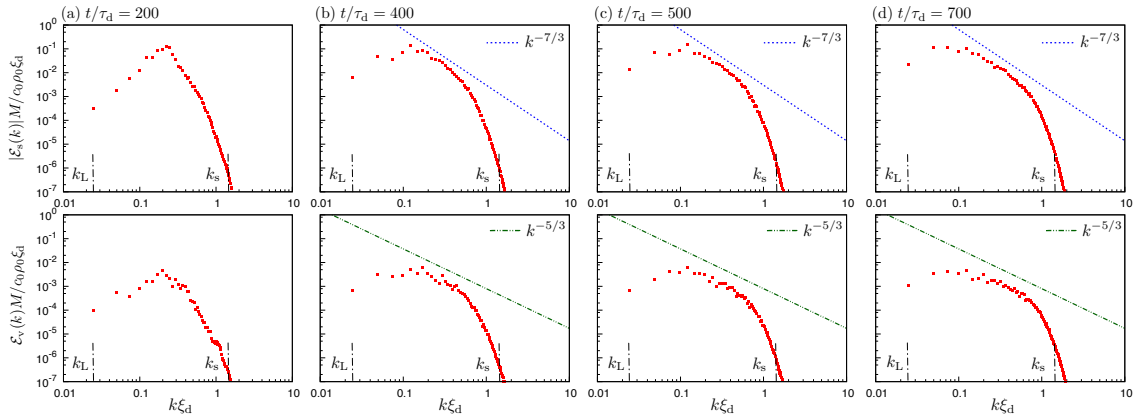


図 3.6: (上) スピン相互作用エネルギー・スペクトルと (下) 速度場の運動エネルギー・スペクトルの時間変化．青と緑の破線はそれぞれ $k^{-7/3}$ と $k^{-5/3}$ に比例した曲線である．時間発展とともに，高波数方向にエネルギーが輸送され，その結果として $k^{-7/3}$ と $k^{-5/3}$ 乗則の振る舞いが現れる．ただし，スケール領域は広くなく，およそ $0.1 \lesssim k\xi_d \lesssim 0.6$ 程度である．[Reprinted figure with permission from K. Fujimoto *et al.*, *Phys. Rev. A* **90**, 013629 (2014). Copyright (2014) by the American Physical Society.]

ズは $256\xi_d \times 256\xi_d$ で，空間，時間分解能は， $dx/\xi_d = 0.5$ ， $dt/\tau_d = 2 \times 10^{-4}$ である．この条件のもと擬スペクトル法を用いて，GP 方程式を数値的に解いた．

本計算では，現象論的な散逸を導入するため，以下のように波数空間の GP 方程式に $\gamma(\mathbf{k})$ の項を追加した．

$$(i - \gamma(\mathbf{k}))\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}_m(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \tilde{\psi}_m(\mathbf{k}) - \mu \tilde{\psi}_m(\mathbf{k}) + h_m(\mathbf{k}) \quad (3.31)$$

$$h(\mathbf{k}) = \mathcal{F}[c_0 \rho(\mathbf{r}) \psi_m(\mathbf{r}) + c_1 \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{F}_{mn} \psi_n(\mathbf{r})] \quad (3.32)$$

$$\gamma(\mathbf{k}) = \theta(k - k_s) \quad (3.33)$$

この散逸項により，高波数領域 $k_s < k$ のモードのみに散逸の効果が入り，系の全エネルギーと全粒子数が時間とともに減少していく．多くの先行研究では，粒子数を保存させるために，化学ポテンシャルを時間変化させる．しかし，本計算ではそのような操作は行わず，粒子数を減少させる計算を行った．

本計算で散逸項を導入した理由は，速度場の圧縮性成分を抑えるためである．1成分 BEC の先行研究で述べたように，量子流体は圧縮性量子流体であるため，運動エネルギー・スペクトルを考えるときに，圧縮性成分と非圧縮性成分に分ける必要があった．今のスピノール BEC では，密度はほぼ一定であるが，それでも微小な密度揺らぎは存在する．この密度変化は， $-5/3$ 乗則を壊す方向に働くと考えられるため，本計算では，現象論的な散逸項を導入した．

図 3.5 は，数値計算で得られた時刻 $t/\tau_d = 700$ における速度場とスピン密度ベクトルの x 成分とそれぞれの回転の z 成分を表している．これより系が強く乱れていることがわかる．また，図 3.5(c)

3.5 スピン乱流における速度相関関数

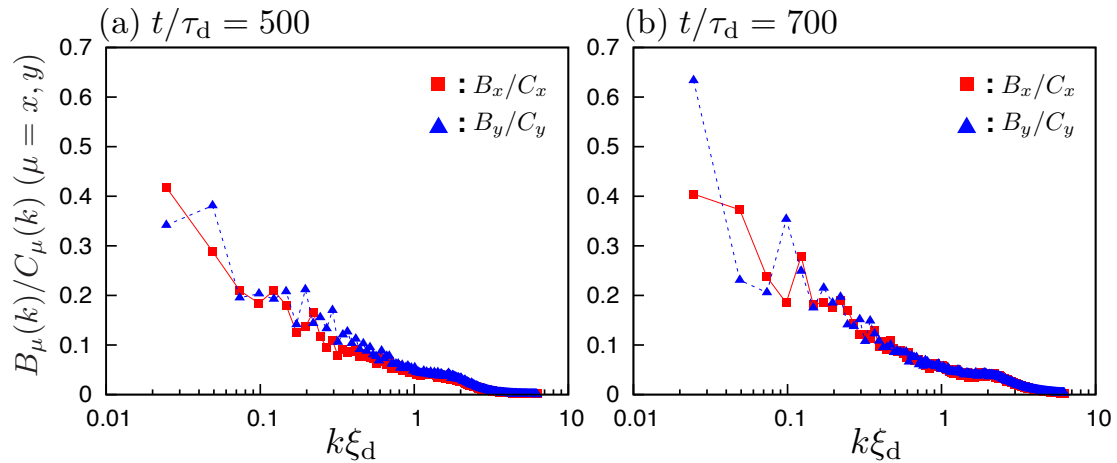


図 3.7: 波数空間におけるスピンの非線形項と慣性項の大きさの比較．ベキ乗則の振る舞いが始まる時刻 $t/\tau_d = 500, 700$ において, 2 つの非線形項の大きさを比較している．基本的にスピンの非線形項が大きい．特に, ベキ乗則が現れる $0.1 \lesssim k\xi_d \lesssim 0.6$ のみに限定すると, 3 ~ 10 倍程度, スピンの非線形項が慣性項よりも大きい．[Reprinted figure with permission from K. Fujimoto *et al.*, *Phys. Rev. A* **90**, 013629 (2014). Copyright (2014) by the American Physical Society.]

と (d) より, それぞれのベクトル場に回転している場所が多数現れていることがわかる．

ここで, 強磁性スピノール BEC では循環が量子化しないことに注意する必要がある．1 成分 BEC では, 速度場が位相の勾配に比例するのに対して, スピノール BEC では, 一般にスピンベクトルの向きと位相の勾配に依存する．今の場合, スピン 1 強磁性スピノール BEC なので,

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{M} \left(\nabla\phi - \cos\beta \nabla\alpha \right) \quad (3.34)$$

となる．そのため, 循環は量子化されず, 渦度は発散しない．実際, 図 3.5(c) では, そのような発散は見えていない．

速度場の運動エネルギースペクトルとスピン相互作用エネルギースペクトルの時間変化を図 3.6 に示している．基本的な振る舞いは前節と同じで, 対向流不安定性に対応した最も不安定なモード $k\xi_d \sim 0.3$ が成長し, その後, 高波数方向にエネルギーが輸送されていく．スピン相互作用エネルギースペクトルは前節と同様に $-7/3$ 乗則が狭い範囲だが, 現れている．このスケーリング領域の狭さは, 十分に時間発展をしていないためである．一方, 運動エネルギースペクトルは, 同じように初期に不安定モードの励起を反映したピークを持つ．その後, 高波数方向にエネルギーカスケードが起こるとともに, $-5/3$ 乗則が現れてくる．このスケーリング領域もそれほど広くはなく, およそ $0.1 \lesssim k\xi_d \lesssim 0.6$ 程度である．このようにスケーリング領域は広くはないが, 数値計算結果は, 理論的に導出した結果と矛盾していないため, 式 (3.29) の $-5/3$ 乗則が現れたと考えられる．

次に, この $-5/3$ 乗則がスピンの非線形項から生み出されているかどうかを確認するため, 次式で定義される量を計算した．

$$B_\mu(k) = \sum_{\mathbf{k}_1 \in \Omega_k} |b_\mu(\mathbf{k}_1)| \quad (3.35)$$

3.5 スピン乱流における速度相関関数

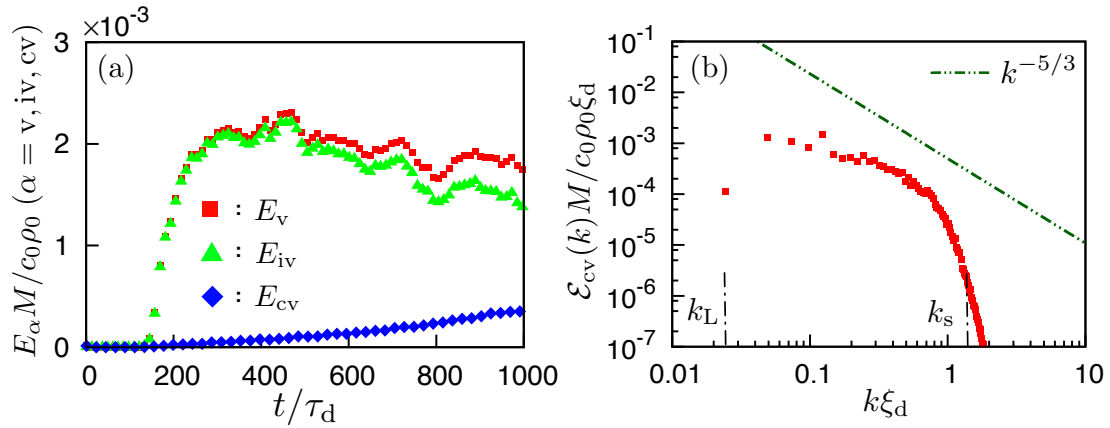


図 3.8: (a) 速度場の運動エネルギー E_α ($\alpha = v, iv, cv$) の時間変化と (b) 時刻 $t/\tau_d = 700$ における圧縮性運動エネルギースペクトル $\mathcal{E}_{cv}(k)$. (a) より運動エネルギーの大部分は非圧縮性成分が占めていることがわかる. (b) より圧縮性成分のスペクトルは $-5/3$ 乗則を示していないことがわかる. これらより, 図 3.6(d) における $-5/3$ 乗則は非圧縮性成分が生み出していると考えられる. [Reprinted figure with permission from K. Fujimoto *et al.*, *Phys. Rev. A* **90**, 013629 (2014). Copyright (2014) by the American Physical Society.]

$$C_\mu(k) = \sum_{\mathbf{k}_1 \in \Omega_k} |c_\mu(\mathbf{k}_1)| \quad (3.36)$$

ここで, $b_\mu(\mathbf{k})$ と $c_\mu(\mathbf{k})$ は,

$$b_\mu(\mathbf{k}) = \mathcal{F}[v_\nu \nabla_\nu v_\mu] \quad (3.37)$$

$$c_\mu(\mathbf{k}) = \mathcal{F} \left[\frac{\hbar^2}{4M^2} \nabla_\nu \left\{ (\nabla_\mu f_\lambda)(\nabla_\nu f_\lambda) - f_\lambda (\nabla_\mu \nabla_\nu f_\lambda) \right\} \right] \quad (3.38)$$

で与えられる. これらは, 式 (3.27) の慣性項とスピンの非線形項をフーリエ変換した量である. 一般に, 波数領域に依存して支配的な非線形項が変化するため, これら 2 つの量を比較する.

図 3.7 が, 時刻 $t/\tau_d = 500, 700$ における $B_\mu(k)/C_\mu(k)$ の計算結果である. この結果より, 全領域でスピンの非線形項が大きいことがわかる. 特に, $-5/3$ 乗則が支配的な領域 $0.1 \lesssim k \xi_d \lesssim 0.6$ のみに限定すると, 3 ~ 10 倍程度, スピンの非線形項が慣性項よりも大きい. この結果より, 本計算で得られた $-5/3$ 乗則は, スピンの非線形が生み出したべき乗則であると考えられる. これは従来の $-5/3$ 乗則が現れる原因と根本的に異なる機構である.

最後に, 速度場の圧縮性成分について述べる. 上で示した結果は, 運動エネルギースペクトルを圧縮性成分と非圧縮性成分に分割していない. なぜならば, 密度がほぼ一定なので圧縮性成分の寄与が小さいと予想したからである. この予想が妥当かどうかを確認するため, 以下のように運動エネルギーを分割する.

$$E_v = E_{iv} + E_{cv} \quad (3.39)$$

3.6 捕獲ポテンシャル系のスピン乱流

ただし、ヘルムホルツ分解を用いて、 $\text{div} \mathbf{A}_{iv} = 0$ 、 $\text{rot} \mathbf{A}_{cv} = 0$ を満たすように、 $\mathbf{A}_v = \mathbf{A}_{iv} + \mathbf{A}_{cv}$ と分離して、

$$E_\alpha = \frac{1}{2N} \int \mathbf{A}_\alpha^2 dr \quad (3.40)$$

を用いて圧縮性成分と非圧縮性成分の運動エネルギー E_{cv} 、 E_{iv} を定義した。ただし、 $\alpha = iv, cv$ である。また、それぞれの運動エネルギースペクトルは、

$$\mathcal{E}_\alpha(k) = \frac{1}{2\rho_0 \Delta k} \sum_{\mathbf{k}_1 \in \Omega_k} |\tilde{\mathbf{A}}_\alpha(\mathbf{k}_1)|^2 \quad (3.41)$$

となる。ここで、 $\mathbf{A}_\alpha(\mathbf{r}) = \sum \tilde{\mathbf{A}}_\alpha(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ ($\alpha = iv, cv$) である。図 3.8(a) が、圧縮性成分と非圧縮性成分の運動エネルギーの時間変化を表しており、圧縮性成分は十分小さいことがわかる。図 3.8(b) は、時刻 $t/\tau_d = 700$ における圧縮性成分の運動エネルギースペクトルであり、これは明らかに $-5/3$ 乗則を示していない。つまり、図 3.6 の $-5/3$ 乗則は、非圧縮性成分が生み出していることを意味している。この結果は 1 成分 BEC と同じ結論であり、Kolmogorov の $-5/3$ 乗則は回転を持つ速度場から生み出されていることを示唆している。

3.6 捕獲ポテンシャル系のスピン乱流

本節では、実験を想定した捕獲ポテンシャル系におけるスピン乱流について述べる。前節までは、理論的研究の簡便さから一様系におけるスピン乱流を解析してきた。しかし、実験を想定する場合、捕獲ポテンシャルが生み出す非一様性を考慮する必要がある。ここでは、どのような条件が満たされれば、前節で得たべき乗則が観測できうるかを議論する。その後、捕獲ポテンシャル系においてスピン相関関数が $-7/3$ 乗則を示す数値計算結果を報告する。

ほぼ自明であるが、捕獲ポテンシャル系において、一様系を前提とした前節の結果を得るためには、スピンコヒーレンス長 ξ_s とシステムサイズ L の比が重要となってくる (捕獲ポテンシャルとして、調和振動子型を選べば、システムサイズは Thomas-Fermi 半径 R_{TF} と同程度である)。なぜならば、基本的にスケーリング領域は $k < k_s = 2\pi/\xi_s$ の低波数領域に現れるからである。もしシステムサイズが小さければ、このスケーリング領域は狭まり、加えて捕獲ポテンシャルの非一様性が、スペクトルに大きな変化を起こしうる。そのため、一様系の結果を観測するためには、 $L/\xi_s > 10$ の条件が必要となってくると推察できる。

この事実を確認するために、次のような条件で捕獲ポテンシャル系のスピン 1 スピノール GP 方程式の数値計算を行った。捕獲ポテンシャルとして、 $V = M\omega^2(x^2 + y^2)/2 + M\omega_z^2 z^2/2$ を選び、⁸⁷Rb を想定して、質量 $M = 1.42 \times 10^{-25}$ kg, s 波散乱長 $a_0 = 5.39 \times 10^{-9}$ m, $a_2 = 5.31 \times 10^{-9}$ m, 全粒子数 $N = 3 \times 10^5$, トラップ周波数 $\omega = 2\pi \times 20/\text{s}$, $\omega_z = 2\pi \times 600/\text{s}$ のパラメータを用いた。この条件のもと z 方向の波動関数を一粒子の調和振動子基底波動関数で近似することで、3 次元 GP 方程式を 2 次元 GP 方程式に書き直し、数値計算を行った。システムサイズは、 a_h をトラップ長 $\sqrt{\hbar/2M\omega} \simeq 1.72 \mu\text{m}$ として $80a_h \times 80a_h$ で、格子点数は 1024×1024 である。数値計算方法は Crank-Nicolson 法である。

3.6 捕獲ポテンシャル系のスピン乱流

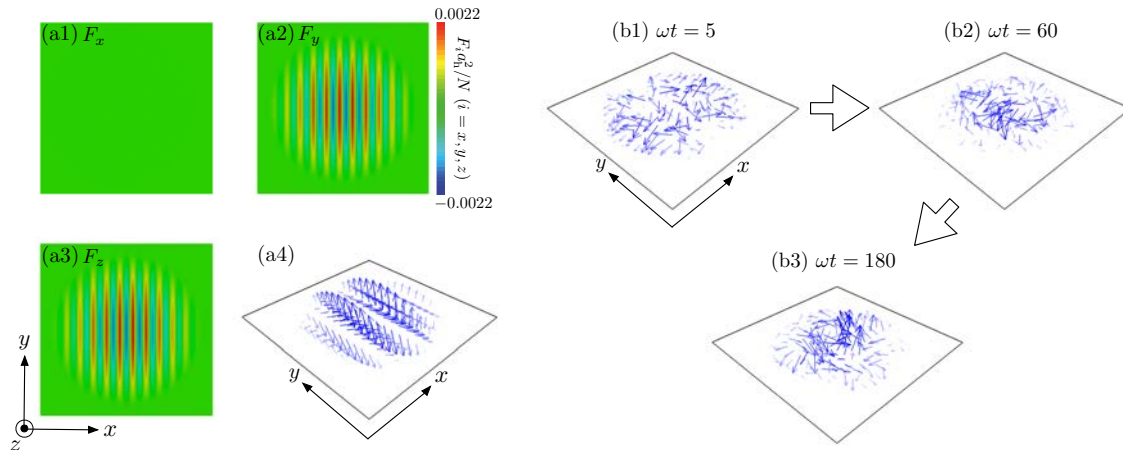


図 3.9: (a1)–(a4) 初期状態 (螺旋スピン状態) におけるスピン密度ベクトルの空間分布と (b1)–(b3) スピン密度ベクトルの時間変化．図のサイズは $40a_h \times 40a_h$ である．初期状態は波長 $2\pi/k_h$ でスピン密度ベクトルが周期的に変調している．この状態から時間発展すると、スピン場が乱れていくことが (b1)–(b3) からわかる．[Reprinted figure with permission from K. Fujimoto *et al.*, *Phys. Rev. A* **85**, 053641 (2012). Copyright (2012) by the American Physical Society.]

初期状態はスピンの捻じれた螺旋スピン状態を用いた．数式で書くと，

$$\begin{pmatrix} \psi_1^{\text{hel}} \\ \psi_0^{\text{hel}} \\ \psi_{-1}^{\text{hel}} \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} -i\cos^2(k_h x/2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(k_h x) \\ i\sin^2(k_h x/2) \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

である．ただし， ϕ は $\psi_0 = 0$ ， $\psi_{-1} = 0$ としてスピン 1 スピノール GP 方程式を虚時間発展して求めた波動関数である．この表式は，強磁性状態のオイラー角として $\alpha = \pi/2$ ， $\beta = k_h x$ ， $\gamma = 0$ と選ぶことで求められる．螺旋スピン構造の波長としては $k_h a_h \simeq 2.1$ を用いた．この状態のスピン分布は，図 3.9(a1)–(a4) に示されている．それらより，スピン密度ベクトルの y ， z 成分が波長 $2\pi/k_h$ で変化していることが一目でわかる．このタイプの初期状態を選んだ理由は，既にスピン 1 スピノール BEC の実験においてスピン螺旋状態が実現しているためである [4, 56]．実験では，空間依存する磁場を系に印加し，Larmor 振動数に空間依存性を持たせることで，このような状態を作り出している．

このスピン螺旋状態から時間発展すると不安定性が起きて，スピン乱流状態が得られる．図 3.9(b1)–(b3) はスピン密度ベクトルの時間変化を表しており，時間発展とともにスピンが乱れていくのがわかる．この不安定性は詳細に調べていないが，初期ダイナミクスにおいて，密度の低い外縁部のスピン密度ベクトルが不安定性を示し，それが系全体に広がるような振る舞いがみられた¹．時間が十分に経過すると，初期の螺旋構造は完全に失われる．これは，次に示すスピン相互作用エネルギースペ

¹螺旋スピン構造の不安定性は川口達により調べられている [122]．この研究は M. Vengalattore 達の実験 [56] を再現するために，磁気双極子双極子相互作用を含めたスピン 1 スピノール GP 方程式を用いている．彼らは基本的に磁気双極子双極子相互作用により不安定性が生じていると結論づけている．この結果は本節で示した磁気双極子双極子相互作用なしの結果と矛盾するよう見えるが，先行研究では螺旋構造の波数があまり大きくなかったため，不安定性が生じるために磁気双極子双極子相互作用が必要だったのだと推察される．

3.6 捕獲ポテンシャル系のスピン乱流

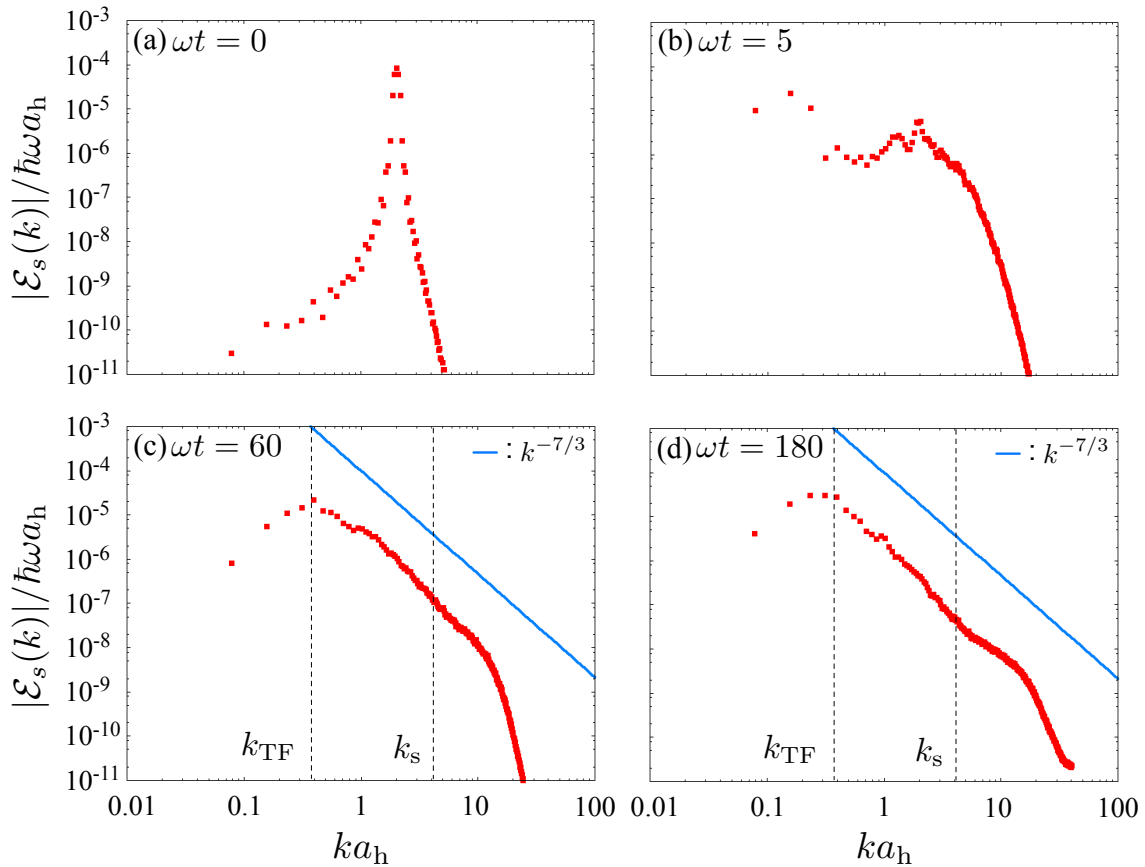


図 3.10: スピン相互作用エネルギー・スペクトルの時間変化．初期のスペクトルは螺旋スピン構造を反映して、 $k = k_h$ を中心に急峻なピークを持つ．その後、時間発展とともに不安定性が起き、時刻 $\omega t = 60 \sim 180$ にかけて、 $-7/3$ 乗則が現れる． $k_{TF} = 2\pi/R_{TF}$ は Thomas-Fermi 半径 R_{TF} に対応する波数である．[Reprinted figure with permission from K. Fujimoto *et al.*, *Phys. Rev. A* **85**, 053641 (2012). Copyright (2012) by the American Physical Society.]

クトルの振る舞いからも明らかである．

図 3.10 にスピン相互作用エネルギー・スペクトルの時間変化を示している． $\omega t = 0$ は、初期状態の螺旋スピン構造を反映して、 $k = k_h$ に急峻なピークがある．これがエネルギー注入に対応している．この後、スピン相互作用エネルギーは低波数と高波数の両方向に輸送される．このとき、不安定性が特に低波数側で強く起き、初期のピークは失われる．その後、エネルギーが高波数方向にカスケードするにともない、 $-7/3$ 乗則が現れる．時刻 $\omega t = 180$ のとき、スケーリング領域はおよそ $2\pi\xi_d/R_{TF} \simeq 0.3 < k\xi_d < 2\pi\xi_d/\xi_s \simeq 3$ である²．このように、システムサイズとスピンコヒーレンス長の比を大きくすることで、一様系で得た $-7/3$ 乗則を捕獲ポテンシャル系でも確認できた． $-7/3$ 乗則が現れた理由は、スケーリング領域の波数がシステムサイズの波数 $2\pi/R_{TF}$ よりも大きいいため、その波数領域のスピン密度ベクトルがほぼ一様系の振る舞いをするためだと考えられる．

一方、速度場に関しては、計算を行っておらず、今後の課題として残っている．

² k_s 近傍をみると、 $-7/3$ 乗則が少しずれているように見えるが、この原因はわかっていない．

3.7 非凝縮成分の効果

本章の全ての結果は GP 方程式に基づいており、非凝縮成分の効果を見逃している。しかし、実験においてこの効果を見逃できるかどうかは一般に非自明である。この問題を定量的に扱うためには有限温度の理論が必要となるが、それが乱流状態を記述できるかどうかは現時点で不明瞭である。そこで、本節では、この問題について「定性的に」議論する。

考えるべき問題は次の2つである。1つめは「乱流状態を生成したときに非凝縮成分が増加しないかどうか」、2つめは「非凝縮成分の粒子が乱流の性質に影響を与えるかどうか」である。

まず、1つめの問題を全粒子数 N の相互作用しない理想 Bose 気体を用いて議論する。基本的に非凝縮成分として振る舞う粒子は熱的に励起している。これらの粒子数 N_{ex} を統計力学の処方箋を用いて計算すると、

$$N_{\text{ex}} = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \right] \quad (3.43)$$

$$T_c = \frac{\hbar}{k_B} \left(\frac{N\omega_x\omega_y\omega_z}{\zeta(3)} \right) \quad (3.44)$$

が得られる。ここで、 ω_i ($i = x, y, z$) はトラップ周波数である。例えば、全粒子数 $N = 3 \times 10^5$ の ^{87}Rb をトラップ周波数 $\omega_x = \omega_y = 2\pi \times 20$ /s、 $\omega_z = 2\pi \times 600$ /s の捕獲ポテンシャルに閉じ込めたとすると、転移温度は $T_c \sim 188$ nK となる。もし、実験の温度が転移温度の 0.4 倍以下であれば、非凝縮成分の粒子数は $N_{\text{ex}} < 0.06N$ となり、凝縮粒子数 $N - N_{\text{ex}}$ と比較すると十分に小さくなる。したがって、転移温度よりもある程度温度が低ければ、非凝縮成分の粒子数は小さくなる。

この状況で1つめの問題である「乱流状態を生成したときに非凝縮成分が増加しないかどうか」を議論する。この計算では本章で考えた螺旋スピン構造から得たスピン乱流を想定する。この状態のエネルギー E_h は、基底状態のエネルギー E_g よりも高い。ここでは、このエネルギーが高い初期状態から時間発展して、熱平衡状態に達したとする。このときの温度を理想 Bose 気体の比熱を用いて評価することで、非凝縮成分がどの程度増加するかを考察する。問題設定 (理想 Bose 気体など) と実験パラメータは上述したものと同一である。このとき、比熱 C は、

$$C = \frac{12\zeta(4)Nk_B}{\zeta(3)} \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \quad (3.45)$$

と与えられる。これより、基底状態 ($k_h = 0$) とのエネルギー差 ΔE と比熱から温度上昇 ΔT を粗く評価できる。例えば、 $T = 0.4T_c$ では、 $\Delta T \sim 2.8$ nK となる。これは、明らかに転移温度 $T_c \sim 188$ nK よりも十分小さく、式 (3.43) より非凝縮成分はほとんど増加しない。よって、乱流状態が得られたとき、非凝縮成分はほとんど変化しないと予想される。

最後に、2つめの問題について考察する。1つめの問題で考えたように温度が低ければ、非凝縮成分の粒子数は十分に小さくなるので、このとき非凝縮成分の効果が弱く考えられる。しかし、これで非凝縮成分が乱流状態に影響を与えないとは言いきれない。なぜならば、Landau 減衰のような非凝縮成分による減衰の振る舞いは時間経過とともに現れてくるからである。したがって、非凝縮成分が乱流の性質に影響を与えないためには、少なくとも非凝縮成分の効果が現れる時間スケール T_{dam} が乱流生成とカスケードに伴う時間スケール T_{tur} よりも長いことが要求される。

ここで、非凝縮成分の効果が現れる現象としては、集団励起、1粒子励起や渦運動の減衰が挙げら

3.8 まとめと課題

れる．これらの現象の減衰時間は，1成分 BEC において Zaremba-Nikuni-Griffin 理論や Projected GP 方程式を用いて調べられている [123, 124]．しかし，これらの時間スケールが乱流中でどのように変更を受けるかは調べられていない．現在のところ，スピン乱流において T_{dam} と T_{tur} がどのように評価されるべきかは議論の最中であり，明確な結論に達していない．

以上の考察をまとめると，考えるべき問題は次の2つに分類される．

- (1)：乱流状態を生成したときに非凝縮成分が増加しないかどうか．
- (2)：非凝縮成分の粒子が乱流の性質に影響を与えるかどうか．

(1) に関しては，上述の問題設定において温度が $T \sim 0.4T_c$ とすれば，問題ないと考えられる．一方，(2) に関しては，現時点で十分に議論できておらず，今後更なる検討が必要となる．

また，ここでは理想ボース気体を用いて議論したため，粒子間相互作用により生じる非凝縮成分は無視した．この粒子数は基底状態において，全粒子数の数%のオーダーで存在しているので， $T < 0.4T_c$ では熱励起している粒子数と同程度になる．そのため，この非凝縮成分の乱流への影響も考える必要があるかもしれない．しかし，こちらも現状では十分に理解できておらず，今後の課題となっている．

3.8 まとめと課題

本章では，スピン1強磁性スピノール BEC におけるスピン乱流の研究について述べた．基礎方程式としてスピン1スピノール GP 方程式を用いて，一様系では対向流不安定性，トラップ系ではスピン螺旋構造の不安定性を利用して，スピン乱流状態を数値的に生成した．その結果，スピン相関関数に対応するスピン相互作用エネルギースペクトルに $-7/3$ 乗則が現れることを数値的に確認し，スピン流体方程式に Kolmogorov 型の次元解析的スケーリングを適用することで， $-7/3$ のべき指数を導出した．一様系だけではあるが，速度場の相関関数も調べて，スケーリング領域は狭いが運動エネルギースペクトルに $-5/3$ 乗則が現れること確認した．これも同様に Kolmogorov 型の次元解析的スケーリングを用いて， $-5/3$ のべき指数を導出した．この導出の特筆すべき点は，従来の古典乱流と異なり，この $-5/3$ 乗則はスピンの非線形項から生まれることを明らかにしたところにある．実際，数値計算でもこの非線形項が支配的であることを確認した．

今後の課題は，これらべき乗則を生み出している構造を明らかにすることである．重要な構造としては，スピンドメインや \mathbb{Z}_2 渦が挙げられる．現在，スピン乱流中において，これらの構造がどのような役割を果たすのかは理解できていない．

第4章 微小スピン振幅を持つスピノールBEC のスピン乱流

本章では、スピン振幅が小さいスピン乱流をスピン1スピノールGP方程式を用いて調べる。このようなスピン乱流は、反強磁性相互作用を持つ系や磁場印加した強磁性相互作用を持つ系で実現できる。ここでは、捕獲ポテンシャルなしの一様系において、このスピン乱流の性質をスピン相関関数を用いて議論する。

4.1 研究背景・動機

前章では、強磁性相互作用するスピン1スピノールBECにおける強磁性スピン乱流の性質を明らかにしてきた。そこでは、スピン密度ベクトルと速度場の2点相関関数に対応するスピン相互作用エネルギーと運動エネルギーのスペクトルに注目して、べき乗則が現れることをKolmogorov型の次元解析的スケージングで議論し、数値計算で確認した。このスピン乱流の特徴は、強磁性相互作用によりスピン振幅 $|f|$ が大きくなることにあり、このような強磁性スピン乱流が実現できる原子種としては、合成スピン $F=1$ の ^{87}Rb がある。

しかし、冷却原子気体BECでは、このスピン乱流と正反対の微小スピン振幅を持つスピン乱流が実現できる。その一例が、合成スピン $F=1$ を持つ ^{23}Na の冷却原子気体である。この原子は、s波散乱長 a_0, a_2 の大小関係が ^{87}Rb とは正反対になっており、スピン相互作用係数 $c_1 \propto a_2 - a_0$ の符号が正となり、反強磁性的な相互作用を持つ。この場合、基底状態は式(2.90)で書けるポーラー状態であり、スピン振幅 $|f|$ はゼロである。強磁性状態のスピン振幅が1であるのとは対照的である。このようなスピン振幅が小さい場合、前章の強磁性スピン乱流の解析は全て破綻する。そのため、微小スピン振幅を持つスピン乱流は、強磁性スピン乱流とは本質的に異なると考えられる。

強磁性スピン乱流と同様に、この ^{23}Na を用いたスピノールBECの乱流を実験研究しているグループは現在のところない¹。しかし、近年、このシステムを用いた非平衡現象の研究が行われている[126, 127]。そこでは、磁場クエンチにより不安定性を誘起し、その後の緩和ダイナミクスを調べている。この研究は乱流の視点では解析されていないが、乱流と深く関連しているように思われる。このように反強磁性相互作用する系でも、乱れた振る舞いが実験で実現していることから、微小スピン振幅を持つスピン乱流の実現が期待される。

本章では、この微小スピン振幅を持つスピン乱流に注目して、スピン相関関数の振る舞いに関する

¹2015年12月に ^{23}Na を用いた半整数量子渦の衝突に関連する実験の論文がarXiv上で公開された[125]。この論文では、多数の半整数量子渦が生成されており、スピン乱流に近い状態が実現している可能性がある。現時点では、スピン相関関数は調べられていないが、この量に乱流状態に特徴的な振る舞いが現れているかもしれない。

研究結果について報告する．本研究でも同じく，対向流不安定性を用いてスピン乱流を作るので，反強磁性相互作用する場合の不安定性について簡単に触れる．その後，Kolmogorov 型の次元解析的スケールリングを用いて，スピン相関関数の振る舞いについて議論する．この議論の中で示されるが，微小スピン振幅を持つスピン乱流においては，強磁性スピン乱流で重要でなかったネマティックテンソルが，本質的な役割を果たすことが明らかになる．その結果，新しいべき乗則が導出される．最後に，このべき乗則を確認するために行った数値計算結果を示す．この研究結果は筆者の原著論文 [128] の中にまとめられている．

4.2 研究手法

本研究では，絶対零度におけるスピン 1 スピノール BEC における乱流を扱う．この系を定量的に記述する方程式は，第 1 章で述べたスピン 1 スピノール GP 方程式である．ここでは，捕獲ポテンシャルなしの一様系を考えるので，

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_m = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi_m + c_0 \rho \psi_m + c_1 \sum_{n=-1}^1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}_{mn} \psi_n \quad (4.1)$$

を基礎方程式とする．粒子間相互作用は特に断らない限り反強磁性相互作用であり， $c_0 > 0$ ， $c_1 > 0$ である．しかし，4.5.2 節では強磁性相互作用する系について考える．この詳細は後ほど示す．

初期状態は，前章と同じ以下の対向流状態である．

$$\begin{pmatrix} \psi_1^{\text{ini}} \\ \psi_0^{\text{ini}} \\ \psi_{-1}^{\text{ini}} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\rho_0}{2}} \begin{pmatrix} \exp[i(\frac{M}{2\hbar} \mathbf{V}_R \cdot \mathbf{r} - \frac{\mu_1}{\hbar} t)] \\ 0 \\ \exp[-i(\frac{M}{2\hbar} \mathbf{V}_R \cdot \mathbf{r} + \frac{\mu_{-1}}{\hbar} t)] \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

ここで， \mathbf{V}_R は対向流の相対速度である．以下の項では GP 方程式 (4.1) 及び初期状態 (4.2) を基礎に対向流不安定性とそれから得られるスピン乱流を調べる．

4.3 対向流不安定性

対向流不安定性の解析は，前章と全く同じである．そのため，前章で得られた分散関係 (3.10) と (3.11) において， c_1 の符号を正にすることで反強磁性相互作用する系の対向流不安定性を調べることができる．

図 4.1 は，縦軸に相対速度の大きさ V_R ，横軸に励起波数 k ，カラーマップに励起周波数の虚部の大きさ $\text{Im}[\omega_{1,-1}]$ ， $\text{Im}[\omega_0]$ をプロットしたグラフである．反強磁性相互作用の場合， $\text{Im}[\omega_{1,-1}]$ は対向流の相対速度が臨界速度 V_c を超えない限り有限な値をもたないが， $\text{Im}[\omega_0]$ は対向速度があれば有限な値をもつ．臨界速度 V_c/C_s は $2\sqrt{2c_1/c_0} \simeq 0.63$ である．対向速度が $0 < V_R < V_c$ の場合， ω_0 のみが有限な虚部をもつ．これは $m = 0$ 成分の不安定性が起きることを意味している．しかし，引き続き， $m = \pm 1$ 成分の不安定性も起こりうると予測できる．これは，前節で述べたハミルトニアン対称性から全粒子数と x ， y ， z 方向のスピンが保存するからである．したがって， $0 < V_R < V_c$ の場合，全ての凝縮体が同時に不安定性を示す．一方， $V_c \ll V_R$ では，不安定ダイナミクスが異なる．

4.4 スピン乱流におけるスピン相関関数

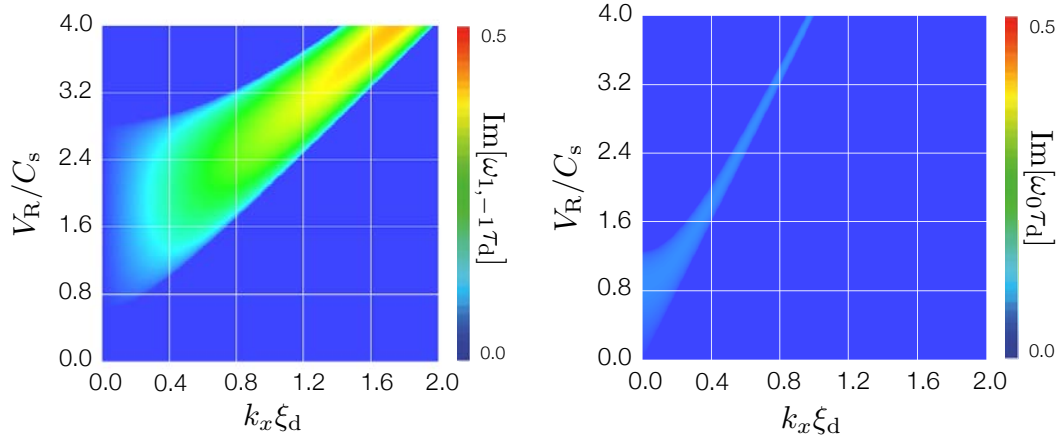


図 4.1: 反強磁性相互作用を持つ系における対向流状態まわりの揺らぎの分散関係の虚部．用いたパラメータは, $c_0/c_1 = 20$, $c_0 > 0$ である．横軸と縦軸は, 無次元化した波数と相対速度である．強磁性相互作用を持つ系との違いは, $V_R = 0$ で安定である点と $\omega_{1,-1}$ が有限の相対速度 V_c 以上で不安定性を示す点である．[Reprinted figure with permission from K. Fujimoto *et al.*, *Phys. Rev. A* **85**, 033642 (2012). Copyright (2012) by the American Physical Society.]

この場合, $\text{Im}[\omega_{1,-1}]$, $\text{Im}[\omega_0]$ がともに有限な値をもち, $\text{Im}[\omega_{1,-1}]$ が $\text{Im}[\omega_0]$ よりも大きくなる．したがって, $m = \pm 1$ 成分の不安定性が $m = 0$ 成分のそれよりも速く成長する．

このように, 対向流不安定性はスピン相互作用の性質に依存して, 定性的に異なることがわかった．本章の 4.5 節では, この不安定性を用いて得たスピン乱流の数値計算結果について報告する．

4.4 スピン乱流におけるスピン相関関数

本項では, 微小スピン振幅を持つスピン乱流におけるスピン相関関数の振る舞いについて議論する．まず, スピン振幅が小さいことを用いて, スピン流体方程式を簡単化する．その後, Kolmogorov 型の次元解析的スケールングを行う．その結果として, 低波数領域に -1 乗則, 高波数領域に $-7/3$ 乗則が導出される．

それでは, 微小スピン振幅を持つことなどを利用してスピン流体方程式に近似を施す．1 つ目の近似は, 全粒子数密度が一樣であることである．強磁性相互作用の場合と同様に, 実験では $|c_0/c_1| \gg 1$ が成り立っている．そのため, 密度は揺らぎにくく, $\rho \simeq \rho_0$ とみなせる．2 つ目の近似は, 速度場が音速よりも十分小さいことである．これにより, 速度場の項を落とすことができる．これも強磁性相互作用の場合と同じ理由による．これら 2 つの近似をスピン流体方程式 (2.108)-(2.113) に適用すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} f_\mu + \nabla \cdot \mathbf{v}_\mu = 0 \quad (4.3)$$

$$\mathbf{v}_\mu = -\frac{\hbar}{M} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \left[\frac{1}{4} f_\nu (\nabla f_\lambda) + n_{\nu\eta} (\nabla n_{\lambda\eta}) \right] \quad (4.4)$$

4.4 スピン乱流におけるスピン相関関数

$$\frac{\partial}{\partial t} n_{\mu\nu} + \nabla \cdot \mathbf{v}_{\mu\nu} = \frac{c_1 \rho}{\hbar} (\epsilon_{\mu\lambda\eta} f_\lambda n_{\nu\eta} + \epsilon_{\nu\lambda\eta} f_\lambda n_{\mu\eta}) \quad (4.5)$$

$$\mathbf{v}_{\mu\nu} = -\frac{\hbar}{4M} \{ \epsilon_{\mu\lambda\eta} [f_\lambda (\nabla n_{\nu\eta}) - (\nabla f_\lambda) n_{\nu\eta}] + \epsilon_{\nu\lambda\eta} [f_\lambda (\nabla n_{\mu\eta}) - (\nabla f_\lambda) n_{\mu\eta}] \} \quad (4.6)$$

が得られる．最後の3つ目の近似は，スピン振幅 $|f|$ が1よりも小さいことである．このことを利用するために，次のスピンベクトル f_μ とネマティックテンソル $n_{\mu\nu}$ の間に成り立つ関係式に注目する．

$$n_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{2} f_\mu^2 + 2 \quad (4.7)$$

ここで，添字の足については和をとる．これより，スピンベクトルが小さければネマティックテンソルが大きくなるのがわかる．たとえば， $f_\mu^2 \sim 0.5$ であれば， $n_{\mu\nu}^2 \sim 1.75$ となる．この考察と式(4.4)の右辺第1項の1/4を考慮すると，スピンベクトルの項はネマティックテンソルの項よりも1/10倍程度小さくなり，式(4.4)は，

$$\mathbf{v}_\mu \simeq -\frac{\hbar}{M} \epsilon_{\mu\nu\lambda} n_{\nu\eta} (\nabla n_{\lambda\eta}) \quad (4.8)$$

と近似できる．

以上の近似は複雑であったのでまとめる．行った近似は以下の3つである．

- 近似(1)：全粒子数密度は一定とみなせる．
- 近似(2)：速度場は音速よりも十分に小さい．
- 近似(3)：スピンベクトルの振幅が1よりも小さい．

これら3つの近似をスピン流体方程式に適用すると，次式が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial t} f_\mu + \nabla \cdot \mathbf{v}_\mu = 0 \quad (4.9)$$

$$\mathbf{v}_\mu = -\frac{\hbar}{M} \epsilon_{\mu\nu\lambda} n_{\nu\eta} (\nabla n_{\lambda\eta}) \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n_{\mu\nu} + \nabla \cdot \mathbf{v}_{\mu\nu} = \frac{c_1 \rho}{\hbar} (\epsilon_{\mu\lambda\eta} f_\lambda n_{\nu\eta} + \epsilon_{\nu\lambda\eta} f_\lambda n_{\mu\eta}) \quad (4.11)$$

$$\mathbf{v}_{\mu\nu} = -\frac{\hbar}{4M} \{ \epsilon_{\mu\lambda\eta} [f_\lambda (\nabla n_{\nu\eta}) - (\nabla f_\lambda) n_{\nu\eta}] + \epsilon_{\nu\lambda\eta} [f_\lambda (\nabla n_{\mu\eta}) - (\nabla f_\lambda) n_{\mu\eta}] \} \quad (4.12)$$

これらの方程式が，微小スピン振幅を持つスピン乱流を近似的に記述する．以下，これらに対してKolmogorov型の次元解析的スケールリングを行う．

まず，スケールリングの議論をする前に，式(4.11)の左辺第2項と右辺に注目する．前者の項は2階微分を含んでおり，後者の項は微分を含んでいない．つまり，これらの項のどちらが支配的になるかどうかは，注目する波数領域に依存する．オーダー評価より，高波数領域 ($k_p < k$) では左辺第2項が，低波数領域 ($k < k_p$) では右辺が，支配的になる．ただし，オーダー評価より $k_p = 2\sqrt{|c_1| M \rho_0 / \hbar}$

4.4 スピン乱流におけるスピン相関関数

である¹。したがって、スピン流体方程式 (4.9)–(4.12) にスケーリングを行うときには、低波数領域か高波数領域かを指定する必要がある。

それでは、低波数領域 ($k < k_p$) からスケーリング解析を行う。このとき、式 (4.11) は、

$$\frac{\partial}{\partial t} n_{\mu\nu} = \frac{c_1 \rho}{\hbar} (\epsilon_{\mu\lambda\eta} f_\lambda n_{\nu\eta} + \epsilon_{\nu\lambda\eta} f_\lambda n_{\mu\eta}) \quad (4.13)$$

となる。以上、求めた式 (4.9), (4.10), (4.13) に対して、スケーリング $r \rightarrow \alpha r, t \rightarrow \beta t$ を行い、これらの方程式が不変になることを要請する。すると、スピンベクトルとネマティックテンソルは、 $f_\mu \rightarrow \beta^{-1} f_\mu, n_{\mu\nu} \rightarrow \alpha \beta^{-1} n_{\mu\nu}$ のように変換されることが要求される。これより、スピンベクトルのスケーリング次元は、

$$f_\mu \sim C_L t^{-1} \quad (4.14)$$

となる。ただし、 C_L は次元を持つ定数である。

強磁性スピン乱流の場合と同様に、スピン相互作用エネルギーのエネルギーフラックス ϵ_L が一定であることを課す。すると、次元解析より、フラックスの大きさ ϵ_L は、

$$\begin{aligned} \epsilon_L &\sim \frac{|c_1|(\rho_0 \mathbf{f})^2}{M \rho_0 t} \\ &\sim \Lambda_L^2 t^{-3} \end{aligned} \quad (4.15)$$

となる。ここで、 $\Lambda_L = C_L \sqrt{|c_1| \rho_0 / M}$ とおいた。したがって、

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_s(k)| &\sim \frac{|c_1|(\rho_0 \mathbf{f})^2}{M \rho_0 k} \\ &\sim \epsilon_L^{2/3} \Lambda_L^{2/3} k^{-1} \end{aligned} \quad (4.16)$$

となり、低波数領域 ($k < k_p$) において、 -1 乗則が導出される。

同様に、高波数領域 ($k_p < k$) に対しても同じ解析を行うと別のべき乗則を導出できる。この高波数領域では、式 (4.11) は、

$$\frac{\partial}{\partial t} n_{\mu\nu} + \nabla \cdot \mathbf{v}_{\mu\nu} = 0 \quad (4.17)$$

となる。先ほどと同じように、式 (4.9), (4.10), (4.12), (4.17) にスケーリング $r \rightarrow \alpha r, t \rightarrow \beta t$ を行い、これらの式が不変になることを要請する。その結果、スピンベクトルとネマティックテンソルは、 $f_\mu \rightarrow \alpha^2 \beta^{-1} f_\mu, n_{\mu\nu} \rightarrow \alpha^2 \beta^{-1} n_{\mu\nu}$ のように変換されることが要求される。したがって、スピンベクトルのスケーリング次元は $f_\mu \sim C_H r^2 t^{-1}$ となり、

$$\begin{aligned} \epsilon_H &\sim \frac{|c_1|(\rho_0 \mathbf{f})^2}{M \rho_0 t} \\ &\sim \Lambda_H^2 k^{-4} t^{-3} \end{aligned} \quad (4.18)$$

¹ k_p を境に変化する物理量としてスピン波の分散関係がある。ポーラー状態まわりの揺らぎを考え、BdG 方程式を解くと、スピン波の分散関係は $\hbar\omega = \sqrt{\hbar\omega_0(\hbar\omega_0 + 2c_1\rho_0)}$ と求まる。これより、低波数領域 ($k < k_p$) では $\omega \propto k$ であるが、高波数領域 ($k_p < k$) では $\omega \propto k^2$ となる。

4.4 スピン乱流におけるスピン相関関数

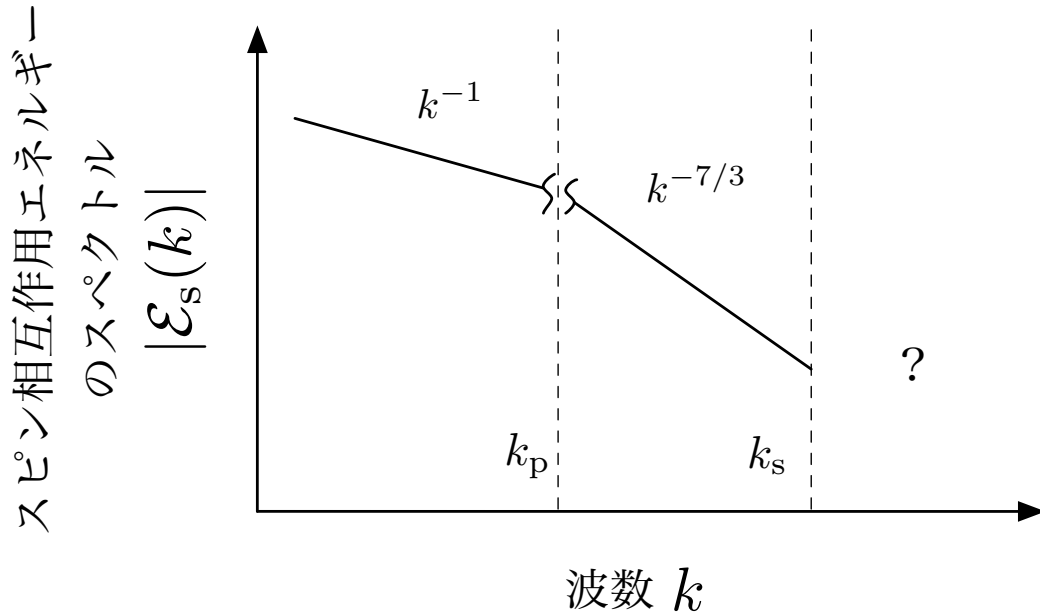


図 4.2: 微小スピン振幅を持つスピン乱流におけるスピン相互作用エネルギー・スペクトルの予想図． -1 乗則 ($k < k_p$) と $-7/3$ 乗則 ($k_p < k < k_s$) が共存すると考えられる．より高波数の領域 ($k_s < k$) では、スケーリングの議論からでは理解できない．おそらく、スピン渦やスピンドメインなどの特徴的な構造を反映すると考えられる．

が得られる．ここで、 $\Lambda_H = C_H \sqrt{|c_1| \rho_0 / M}$ は次元を持つ定数である．

最後に、スピン相互作用エネルギーのフラックス ϵ_H が一定であることを仮定すると、

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{E}_s(k)| &\sim \frac{|c_1|(\rho_0 \mathbf{f})^2}{M \rho_0 k} \\
 &\sim \Lambda_H^2 k^{-5} t^{-2} \\
 &\sim \epsilon_H^{2/3} \Lambda_H^{2/3} k^{-7/3}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

が得られる．

ここでの解析はもちろん全てエネルギー・フラックス一定を仮定し、次元解析的スケーリングを行っている．しかし、この仮定が妥当であるかどうかの理論的根拠はない．現在のところ、それは数値計算を行って確認するしか無い．この点に関しては、4.5 節で触れる．

最後に、スケーリング領域についてコメントする．上で導出したべき乗則は、 -1 乗則 ($k < k_p$) と $-7/3$ 乗則 ($k_p < k$) である．これらのスケーリング領域は重ならないので、同時に 2 つのべき乗則が現れると予想できる．高波数領域には、上限があると考えられる．それは、 $k_s = 2\pi/\xi_s$ である．なぜなら、スピノール BEC におけるスピン渦やスピンドメイン壁のサイズが ξ_s のオーダーであり、これよりも小さいスケールのスピン相関関数には渦や壁の構造などの情報が反映されてしまい、そこにはエネルギー・フラックス一定の仮定に抵触する可能性があるためである．したがって、べき乗則のスケーリング領域は、図 4.2 にあるように $k < k_p$ (-1 乗則) と $k_p < k < k_s$ ($-7/3$ 乗則) となる．

4.5 数値計算結果

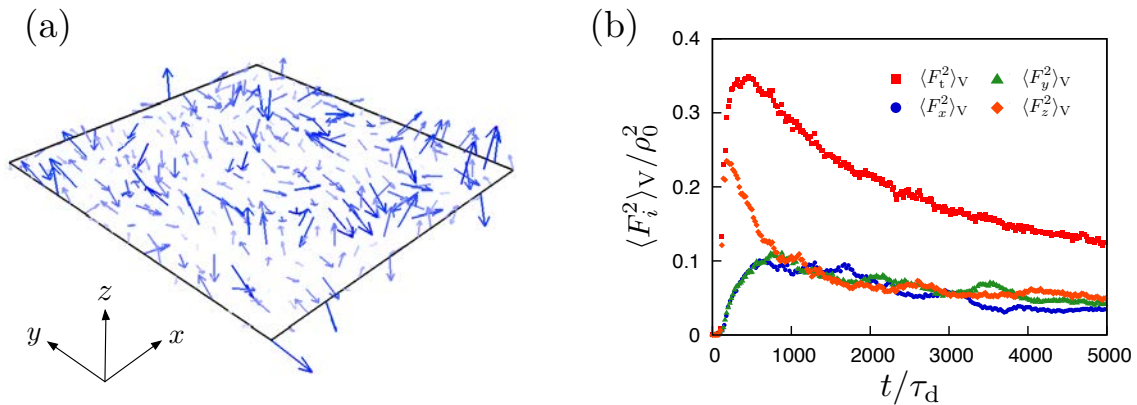


図 4.3: (a) 時刻 $t/\tau_d = 3500$ での反強磁性スピン乱流におけるスピン密度ベクトルの空間分布と (b) スピン密度ベクトルの空間平均 $\langle F_i^2 \rangle_V / \rho_0^2$ ($i = x, y, z, t$) の時間変化. (a) から対向流不安定性によりスピン密度ベクトルが乱されていることが見てとれる. (b) は $\langle F_t^2 \rangle_V / \rho_0^2$ が 1 よりも小さいことを示しており, スピン振幅の振る舞いが強磁性相互作用する系とは定性的に異なることを示している. [Reprinted figure with permission from K. Fujimoto *et al.*, *Phys. Rev. A* **88**, 063628 (2013). Copyright (2013) by the American Physical Society.]

ただし, k_p 付近の波数では, 式 (4.11) の左辺第 2 項と右辺が同じオーダーになるので, そこでの振る舞いは本項で解説したスケール解析では理解できない. そのため, 図 4.2 の k_p 付近の振る舞いは, 現在のところ不明である.

4.5 数値計算結果

本節は, 前節で議論した微小スピン振幅を持つスピン乱流に関する数値計算結果を示す. 初めに 4.5.1 項において, 反強磁性相互作用する系のスピン乱流の結果を報告する. つづいて, 4.5.2 項で磁場印加した強磁性相互作用する系のスピン乱流の数値計算結果を示す. 今まで詳細に言及しなかったが, 2 次 Zeeman 効果を利用することで, スピン振幅を操作することができ, 強磁性相互作用する系においても微小スピン振幅を持つスピン乱流が実現できる.

4.5.1 反強磁性スピン乱流

対向流不安定性を用いて生成した, 反強磁性相互作用する系のスピン乱流に関する数値計算結果を示す. 結論から述べると, このスピン乱流では図 4.2 で予想したスペクトルを明確に確認することができなかった.

数値計算の条件は, 以下の通りである. 数値的に解く方程式は印加磁場無しの一様な 2 次元スピノール GP 方程式である. 相互作用係数は $c_1 > 0$ かつ $|c_0/c_1| = 20$ とした. 初期状態は対向流状態であり, 対向流速の大きさは $V_R/C_s \simeq 1.178$ である. システムサイズは $256\xi_d \times 256\xi_d$ で, 空間、時間分解能は, $dx/\xi_d = 0.25$, $dt/\tau_d = 5 \times 10^{-3}$ である. この条件のもと Crank-Niolsn 法を用いて, スピン 1 スピノール GP 方程式を数値的に解いた.

4.5 数値計算結果

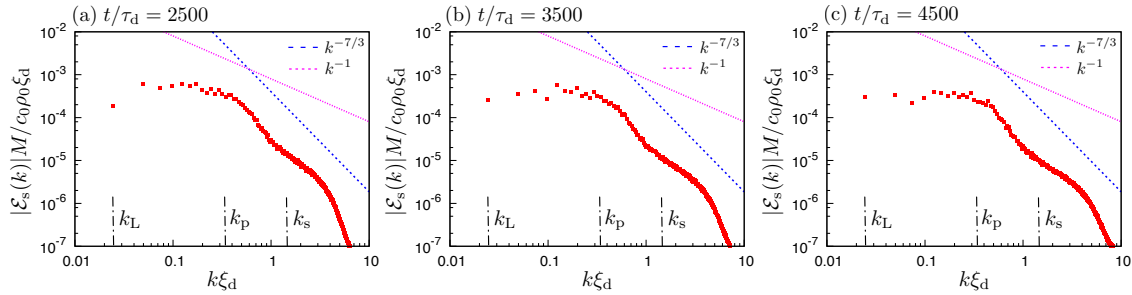


図 4.4: 反強磁性スピン乱流におけるスピン相互作用エネルギースペクトルの時間変化．どの時刻で見ても， -1 乗則と $-7/3$ 乗則の共存を確認することができなかった．[Reprinted figure with permission from K. Fujimoto *et al.*, *Phys. Rev. A* **88**, 063628 (2013). Copyright (2013) by the American Physical Society.]

初期の対向流不安定性ダイナミクスは，基本的に線形解析で得た図 4.1 の通りになる．その詳細はスピン乱流の性質を理解する上で重要でないので，ここでは割愛する．簡単に説明すると， $V_c < V_R$ の場合，強磁性相互作用の系と同じように，対向流の流れ方向に縞模様が現れ，系が乱れていく¹．一方， $0 < V_R < V_c$ の場合，縞模様は現れず，等方的な円形の不安定性が生じる．どちらにせよ有限の対向流速度があれば，系は不安定性を示し，スピン乱流状態に達する．

図 4.3(a) は，時刻 $t/\tau_d = 3500$ での乱流状態におけるスピン密度ベクトルの空間分布である．視覚的にはスピンの空間分布が乱れていることがわかる．図 4.3(b) は，スピン密度ベクトルの空間平均 $\langle F_\mu^2 \rangle_V / \rho_0^2$ ($\mu = t, x, y, z$) の時間変化を表している²．この結果より， $\langle F_t^2 \rangle_V / \rho_0^2$ は値が 1 よりも小さく，スピン振幅が時間とともに減少していることがわかる．この振る舞いは，スピン振幅が 1 に向かって増大していく強磁性スピン乱流 (図 3.4(a)) とは対照的である．この違いが，微小スピン振幅を持つスピン乱流のスピン相関関数を強磁性スピン乱流のそれとは異なったものにする．

図 4.4 が，スピン相関関数に対応するスピン相互作用エネルギースペクトルの時間変化を示している．不安定性が現れる初期では，強磁性スピン乱流と同じく，最も不安定性が強い波数モードにピークを持つスペクトルが得られる．図 4.4(a) は，その不安定ダイナミクス後のスペクトルである．このグラフより， k_p 近傍を境にスペクトルの振る舞いが大きく変化しているのがわかる．高波数領域 $k_p < k < k_s$ では， $-7/3$ 乗則に近い振る舞いが現れたが，低波数領域 $k < k_p$ では，前節で導出した -1 乗則から大きくずれることがわかった．その後の時間発展を調べてみても，この傾向は変わらず，理論予想である図 4.2 のような -1 乗則と $-7/3$ 乗則の共存をはっきりと確認することはできなかった．

この原因を明らかにするため， -1 乗則と $-7/3$ 乗則を導出したときに何を仮定したかを考察してみる．すると，スピン相互作用エネルギーのフラックスが一定であることに問題がありそうだとわかる．なぜなら，このエネルギーは $\langle F_t^2 \rangle_V / \rho_0^2$ に比例しており，図 4.3 からそのエネルギーは単調に減少していることがわかるからである (強磁性スピン乱流では，十分に時間発展した後では時間的に大きく変化はしなかった)．そのため，フラックス一定の仮定が破綻して， -1 乗則と $-7/3$ 乗則の共存を数値的に確認できなかったのだと推察される．これを解決するために，磁場印加中のスピン乱流を

¹理由は不明だが，初期のノイズに依存して， $m = 0$ 成分に不安定性が起きない場合がある．

² F_t^2 は $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$ で定義されている．

4.5 数値計算結果

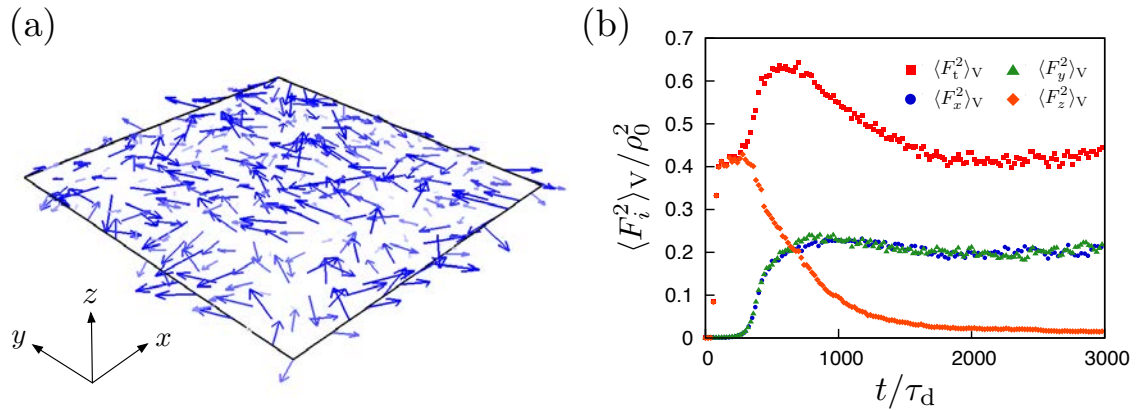


図 4.5: (a) 時刻 $t/\tau_d = 2000$ での磁場印加した強磁性スピン乱流におけるスピン密度ベクトルの空間分布と (b) スピン密度ベクトルの空間平均 $\langle F_i^2 \rangle_V / \rho_0^2$ ($i = x, y, z, t$) の時間変化. (a) から対向流不安定性によりスピン密度ベクトルが乱されていることが見てとれる. (b) は $\langle F_t^2 \rangle_V / \rho_0^2$ が 1 よりも小さく、かつ単調には減少せず、ある値で定常になっていることを示している. この振る舞いは反強磁性スピン乱流と異なっており、スピン相互作用エネルギーがある一定値まわりで揺らいでいることを意味する. [Reprinted figure with permission from K. Fujimoto *et al.*, *Phys. Rev. A* **88**, 063628 (2013). Copyright (2013) by the American Physical Society.]

考えた. 次項で、この詳細を述べる.

4.5.2 磁場印加による微小スピン振幅を持つスピン乱流

本項では、磁場印加中のスピン 1 強磁性スピノール BEC におけるスピン乱流を考える. このとき、系が従う方程式は、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_m = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi_m + qm^2 \psi_m + c_0 \rho \psi_m + c_1 \sum_{n=-1}^1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}_{mn} \psi_n \quad (4.20)$$

となる. 右辺第 2 項が印加磁場による 2 次 Zeeman 効果を表している. 第 1 章では 1 次 Zeeman 項も示したが、実はこの項は変換 $\psi_m \rightarrow \psi_m \exp(-ipmt/\hbar)$ を行い、スピン空間の回転座標系にのことで消去できるので、上式では省いている¹.

まず、この 2 次 Zeeman 効果によりスピンの振る舞いがどのように変化するかを述べる. 式 (4.20) より、2 次 Zeeman 項によるエネルギー E_{sz} は、

$$E_{sz} = q \sum_{m=-1}^1 m^2 \int |\psi_m|^2 dr \quad (4.21)$$

と与えられる. これよりエネルギーの損得のみを考えれば、 $q < 0$ のときは $m = 1, -1$ 成分に粒子が

¹ただし、磁気双極子双極子相互作用や散逸などがある場合には、この主張は正しくない. 磁気双極子双極子相互作用が存在すれば、スピンと軌道が結合するためにスピン空間のみを回転させると、軌道の方に影響が現れる. 実際、磁気双極子双極子相互作用の項はスピン空間のみの回転操作に対して不変でない. 一方、散逸があると、印加磁場と平行もしくは反平行にスピンが整列するため、1 次 Zeeman 項を消すことはできない. 実際に、散逸ありの GP 方程式に変換 $\psi_m \rightarrow \psi_m \exp(-ipmt/\hbar)$ を行くと、1 次 Zeeman 項が消えないことがすぐにわかる.

4.5 数値計算結果

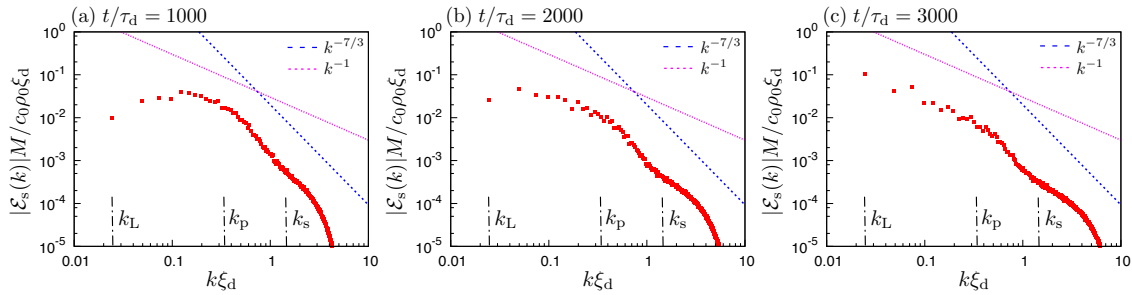


図 4.6: 磁場印加した強磁性スピン乱流におけるスピン相互作用エネルギースペクトルの時間変化。時刻 $t/\tau_d = 3000$ において, -1 乗則と $-7/3$ 乗則の共存を確認することができる。[Reprinted figure with permission from K. Fujimoto *et al.*, *Phys. Rev. A* **88**, 063628 (2013). Copyright (2013) by the American Physical Society.]

占有している方がエネルギーが下がる。その結果, システムは強磁性状態に近づく。さらに, ほとんどの粒子が $m = 1, -1$ 成分であるので, 1 成分もしくは 2 成分 GP 方程式に近づく²。一方, $q > 0$ のときは逆に $m = 0$ 成分に粒子がいる方がエネルギーが下がる。このような特徴から 2 次 Zeeman 効果を利用して, スピン振幅を操作することが可能となる。実際, 一様な強磁性相互作用する系の基底状態は, $q > 0$ の場合, スピン振幅が小さい Broken-axisymmetry (BA) 状態とポーラー状態が実現することが知られている。BA 状態の特徴は, スピン密度ベクトルがスピン空間で $x-y$ 平面のある方向に向いている状態である [47–49]。

本項の数値計算では, 強磁性相互作用するスピン 1 スピノール BEC に磁場を印加して, スピン振幅を小さくすることで, 微小スピン振幅を持つスピン乱流を生成した。数値計算の手法は, 前節と全く同じである。ただし, スピン相互作用係数の符号は負にして, 2 次 Zeeman 項の係数として基底状態が BA 状態となる $q = 1.2|c_1|\rho_0$ とした。初期状態は対向流状態である。この状態の不安定性を理解するためには, BdG 方程式を解いて分散関係の虚部を調べる必要があるが, 2 次 Zeeman 項を含む場合の不安定性解析は行っていない。本項では, スピン乱流の性質を理解することが目的であるので, この不安定性の詳細については触れない。

図 4.5(a) は, 時刻 $t/\tau_d = 2000$ でのスピン密度ベクトルの空間分布である。2 次 Zeeman 効果を反映して, スピンが $x-y$ 平面に寝ていることがわかる。図 4.5(b) は, スピン密度ベクトルの空間平均の時間変化を表しており, スピン振幅が単調に減少していないことを示している。これは, 強磁性相互作用のスピン振幅を大きくする効果と 2 次 Zeeman 項によるそれを小さくする効果の競合による。時刻 $t/\tau_d = 2000$ 以降では, ある一定値のまわりで揺らいであり, これはスピン相互作用エネルギーがほぼ一定値をとることを意味している。したがって, このとき, 反強磁性スピン乱流の場合よりも, スピン相互作用エネルギーのフラックスが一定になる可能性が高くなると期待できる。

この状態のスピン密度ベクトルを用いて, スピン相互作用エネルギースペクトルを計算した。図 4.6 がその数値計算結果である。初期に, -1 乗則の傾向が k_p 近傍で現れ, 時間経過とともにそのスケール領域が広がっていくことがわかる。さらに, スケール領域は狭いが $-7/3$ 乗則の傾向が常に高波数側に出続けている。このように, 理論的に予想した -1 乗則と $-7/3$ 乗則の共存と矛

²渦やドメイン壁内部では $m = 0$ 成分が生き残る可能性があり, そこではスピノール BEC の特徴が現れる可能性がある。

盾しない数値計算結果を確認することができた。磁場印加した強磁性スピノール乱流において、この共存が確認できた理由はスピノール相互作用エネルギーが単調に減少せず、ある一定値のまわりで揺らいだためだと考えられる。

4.6 まとめと課題

本章では、スピノール BEC におけるスピノール振幅が小さいスピノール乱流をスピノール GP 方程式を用いて、解析・数値的に調べた。解析計算では、GP 方程式から導出されるスピノール流体方程式にスピノール振幅が小さいという条件をつけて、近似を行った。その結果得られた方程式に対して、Kolmogorov 型の次元解析的スケールリングを適用した結果、低波数領域で -1 乗則が、高波数領域で $-7/3$ 乗則が現れうることを示した。数値計算は、(i) 反強磁性相互作用をもつスピノール BEC と (ii) 磁場印加した強磁性スピノール BEC の 2 つの系で行った。計算 (i) では、理論的に導出したべき乗則をはっきりと確認できなかった。これは、スピノール相互作用エネルギーが時間的に減少してしまい、べき乗則を導出するときに用いたエネルギーフラックス一定の仮定に抵触したためだと推察される。一方、計算 (ii) では、低波数領域の -1 乗則と高波数領域の $-7/3$ 乗則を確認することができた。この結果はエネルギーフラックス一定の仮定が良い近似で成立しているために得られたと考えられる。実際、このときにスピノール相互作用エネルギーがある一定値まわりで定常となることが確認できた。

今後の課題は、強磁性スピノール乱流と同様に実空間における構造を追求することである。この系の基底状態は、強磁性スピノール BEC とは異なった対称性を持つため、そこに現れる位相欠陥とは異なる。そもそも、スピノール BEC における位相欠陥に関しては、ダイナミクスそのものが精力的に調べられていないので、基礎的な位相欠陥ダイナミクスをじっくりと研究する必要があると考えられる。これ以外の課題としては、エネルギー輸送の方向、非凝縮成分の効果がある。図 4.6 よりエネルギーが低波数方向に流れているように見えるが、このようなカスケードの方向に関しては、理論的に理解できていない。また、非凝縮成分の効果は第 3 章の議論と全く同じであり、今後より詳細な検討が必要である。

第5章 1成分BECにおけるBogoliubov波乱流

本章では、スピン自由度を持たない1成分BECにおける弱波動乱流に関する研究結果を報告する。前節までは、渦のような構造を持つ強い乱流を対象としてきたが、ここでは、そのような構造が一切存在しない状況を考える。このとき、系には様々な波数モードのBogoliubov波(素励起)が存在しており、それらが弱く相互作用する弱波動乱流が実現している。本論文では、この乱流をBogoliubov波乱流と呼び、1成分GP方程式と弱波動乱流理論を用いて、Bogoliubov波の波数分布、波動関数の相関関数、密度分布の相関関数の振る舞いを解析・数値的に調べた。本章ではこの結果の詳細を示す。

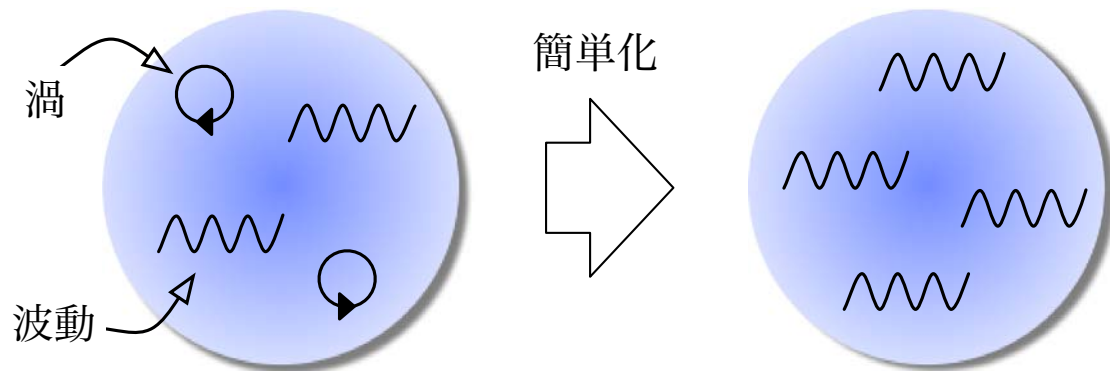
5.1 研究背景・動機

冷却原子気体BECにおける量子乱流実験は2009年のサンパウロ大学のBagantoグループの研究[13]から始まり、現在まだまだ発展途上にある。今のところ、実験は全て1成分BECで行われており、Bagantoグループは3次元量子乱流を、ソウル大学のShinグループ、アリゾナ大学のAndersonグループは2次元量子乱流を生成して、膨張ダイナミクスや乱流減衰などを調べている[14, 15]。

これらの実験グループには共通している特徴がある。それは多数の量子渦を生成した強い乱流に注目している点である。例えば、Shinグループは、50個以上の量子渦を持つ乱流状態を得ており、渦の個数が時間とともにどのように減衰するかを調べている[15]。Andersonグループも渦の個数は少ないが、似たような乱流状態を生成して、渦のダイナミクスに注目している[14]。このように、現在の実験研究では基本的に量子渦に焦点をあて、その個数や配置などを調べている。

この状況は古典乱流研究とは大きく異なる。第1章で述べたように、乱流を理解する上では実験再現性のある統計量が重要である。古典乱流では、速度場の確率密度関数や相関関数などが徹底的に調べられ、K41理論の帰結の1つであるKolmogorovの $-5/3$ 乗則などが議論されている。しかし、冷却原子気体BECの乱流研究では、このような統計量は調べられていない。そのため、K41理論から予想されるエネルギーダイレクトカスケードやそれに伴うべき乗則は観測されていない。

この原因は、冷却原子気体BECにおいて速度場を測定することが難しいところにある。このシステムでは、巨視的波動関数の位相の勾配が速度場に比例するため、位相を観測できれば速度場が求まる。量子乱流研究とは別に先行研究[63]では、2つの凝縮体の干渉縞から相対位相を測定して、量子渦の位置をみる実験が行われている。しかし、量子乱流研究において、この方法を使うことは困難であり、今のところ乱流中の速度場は観測されていない。



冷却原子気体BECにおける 一般の量子乱流

Bogoliubov波乱流

図 5.1: Bogoliubov 波乱流の概念図．1 成分 BEC の一般的な量子乱流では，多数の量子渦と波動 (Bogoliubov 波) が混在した状態が実現している．このような状態は理論的取り扱いが非常に難しい．しかし，量子渦がなく Bogoliubov 波のみが弱く相互作用している乱流であれば，弱波動乱流理論を用いることで取り扱いが比較的容易になる．このような弱い乱流を本論文では Bogoliubov 波乱流と呼ぶ．

このような状況ではあるが，やはり冷却原子気体 BEC の乱流を理解する上で相関関数に代表される統計量を調べることは重要である．そこで，実験観測量である密度分布の統計量を調べることで，冷却原子気体 BEC の乱流を理解できないかと考えた．しかし，一般的に多数の量子渦がある強い乱流は，理論的な取り扱いが非常に難しい．そのため本論文では，まずは簡単なところから理解していく立場をとり，渦がない波動が支配的な弱い乱流を考えた (図 5.1 参照)．弱波動乱流であれば，密度分布の相関関数で乱流状態が特徴づけられ，ダイレクトカスケードに伴うべき乗則が現れると期待される．そして，この実験観測量のべき乗則を解析・数値的に確認でき，それが実験的に測定されれば，冷却原子気体 BEC で初めてダイレクトカスケードに伴うべき乗則を観測したことになる．

本章では，この 1 成分 BEC における弱波動乱流について解説する．この研究では，1 成分 GP 方程式と弱波動乱流理論を用いて，種々の物理量の相関関数を調べ，ダイレクトカスケードによるべき乗則について議論する．また，解析の中で明らかになるが，この乱流では Bogoliubov 波が支配的になるため，本論文では Bogoliubov 波乱流と呼ぶ．この研究結果は筆者の原著論文 [129, 130] にまとめられている．

5.2 研究方法

本研究で考える系は、絶対零度における一様な 1 成分 BEC である。この系は次の GP 方程式でよく記述される。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi + g|\psi|^2 \psi \quad (5.1)$$

前章のスピン乱流では次元に関して制限は無かったが、本章では 3 次元系のみを取り扱い、この方程式を解析・数値的に解いて、Bogoliubov 波乱流の性質を探索する。

この弱波動乱流を特徴づけるため、本研究では次の 3 つのスペクトルに注目する。1 つ目は、波動関数のスペクトルである：

$$C_w(k) = \frac{1}{\Delta k} \sum_{\mathbf{k}_1 \in \Omega_k} \langle |\bar{\psi}(\mathbf{k}_1)|^2 \rangle_{\text{en}} \quad (5.2)$$

ただし、 $\mathcal{F}[\psi(\mathbf{r})](\mathbf{k}) = \bar{\psi}(\mathbf{k})$ である。これは、明らかに巨視的波動関数の 2 点相関関数のフーリエ係数に対応している。2 つ目は、密度分布のスペクトルである：

$$C_d(k) = \frac{1}{\Delta k} \sum_{\mathbf{k}_1 \in \Omega_k} \langle |\bar{\rho}(\mathbf{k})|^2 \rangle_{\text{en}} \quad (5.3)$$

ただし、 $\mathcal{F}[\rho(\mathbf{r})](\mathbf{k}) = \bar{\rho}(\mathbf{k})$ である。これも同様に密度分布の 2 点相関関数のフーリエ係数に対応している。3 つ目は、Bogoliubov 波のスペクトルである：

$$C_b(k) = \frac{1}{\Delta k} \sum_{\mathbf{k}_1 \in \Omega_k} \langle |b(\mathbf{k})|^2 \rangle_{\text{en}} \quad (5.4)$$

ここで、 $b(\mathbf{k})$ は後ほど導入する Bogoliubov 波の正準変数である。この量には相関関数としての意味はなく、Bogoliubov 波の波数分布を表している。

以下の節では、GP 方程式 (5.1) と 2.2.4 項で解説した弱波動乱流理論を用いて、弱波動乱流中のこれらのスペクトルの性質を解析的に調べる。その後、数値計算を行い、解析計算との比較を行う。

5.3 GP 方程式への弱波動乱流理論の適用

本研究は一様な大きな凝縮体上に生じる Bogoliubov 波が弱く相互作用する乱流、つまり Bogoliubov 波乱流を対象とする。本節では、弱波動乱流理論を GP 方程式 (5.1) に適用して、乱流中の 3 つのスペクトル $C_w(k)$ 、 $C_d(k)$ 、 $C_b(k)$ のべき乗則を導出する。

この GP 方程式への弱波動乱流理論の応用は既に Dyachenko 達と Zakharov 達により行われている [131, 132]。しかし、先行研究では大きな凝縮体の運動を取り入れていない。後に示す数値計算結果によると、この運動を取り入れないと、解析計算と数値計算の結果が合わないことがわかった。そのため、本節の計算は先行研究とは異なることを強調しておく。本質的でないが、その他の違いとして先行研究は波動関数そのものではなく、その振幅と位相を分離して弱波動乱流理論を適用している。この詳細については、5.5 節で述べる。

5.3 GP 方程式への弱波動乱流理論の適用

5.3.1 大きな凝縮体と揺らぎの方程式

GP 方程式 (5.1) から大きな凝縮体と揺らぎの方程式を導出する．そこで、まず大きな凝縮体 ψ_0 と揺らぎ ϕ を以下のように定義する：

$$\psi = \psi_0(1 + \phi) \quad (5.5)$$

$$\psi_0 = \frac{1}{L^3} \int \psi dV \quad (5.6)$$

これらから、

$$\int \phi dV = 0 \quad (5.7)$$

が得られる．したがって、大きな凝縮体は巨視的波動関数の波数ゼロのフーリエ係数、揺らぎはその有限波数のフーリエ係数の和として与えられることがわかる．今、この揺らぎが小さい状況を考えているので、 $|\phi| \ll 1$ が成り立つとする．

式 (5.5) を GP 方程式 (5.1) に代入して、大きな凝縮体と揺らぎの方程式を導出する．ただし、揺らぎに関しては、2 次まで残す¹．すると、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_0 = g\rho_0 \psi_0 \left[1 + \sum_{\mathbf{k}_1} (2|\bar{\phi}(\mathbf{k}_1)|^2 + \bar{\phi}(\mathbf{k}_1)\bar{\phi}(-\mathbf{k}_1)) \right] \quad (5.8)$$

$$i\hbar \psi_0 \frac{\partial}{\partial t} \bar{\phi}(\mathbf{k}) = -i\hbar \bar{\phi}(\mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial t} \psi_0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \psi_0 \bar{\phi}(\mathbf{k}) + g\rho_0 \psi_0 \left[2\bar{\phi}(\mathbf{k}) + \bar{\phi}^*(-\mathbf{k}) \right. \\ \left. + 2 \sum_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} \bar{\phi}^*(\mathbf{k}_1) \bar{\phi}(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + \sum_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3} \bar{\phi}(\mathbf{k}_2) \bar{\phi}(\mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \right] \quad (5.9)$$

が得られる．ただし、 $\bar{\phi}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}[\phi(\mathbf{r})]$ 、 $\rho_0 = |\psi_0|^2$ は、それぞれ揺らぎのフーリエ係数、大きな凝縮体の密度である．ここで、揺らぎの定義 (5.7) より $\bar{\phi}(\mathbf{k} = 0) = 0$ が成り立つため、式 (5.8) と式 (5.9) の和は実質、有限波数に対してのみ行われる．次に、式 (5.8) を式 (5.9) に代入すると、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \bar{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \bar{\phi}(\mathbf{k}) + g\rho_0 \left[\bar{\phi}(\mathbf{k}) + \bar{\phi}^*(-\mathbf{k}) \right. \\ \left. + 2 \sum_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} \bar{\phi}^*(\mathbf{k}_1) \bar{\phi}(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + \sum_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3} \bar{\phi}(\mathbf{k}_2) \bar{\phi}(\mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \right] \quad (5.10)$$

が導出される．ここで導出した式 (5.8)、(5.10) が揺らぎ ϕ が弱く相互作用しているダイナミクスを記述できる．

弱波動乱流理論を適用するために、式 (5.10) を正準形式で書き直すと、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \bar{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{\partial H}{\partial \phi^*(\mathbf{k})} \quad (5.11)$$

¹この摂動展開は、コンシステントになっていない．なぜならば、 ϕ の方程式に関しては摂動の 1 次までをとり、 ψ_0 の方程式に関しては摂動の 2 次までをとっているからである．数値計算の結果で明らかになるが、 ψ_0 の方程式において最低次の項までしか考慮しないと、解析計算と数値計算の結果が合わない．そのため、ここではコンシステントではないが、できる限り高次の摂動までをとっている．

5.3 GP 方程式への弱波動乱流理論の適用

$$H = H_2 + H_3 \quad (5.12)$$

$$H_2 = \sum_{\mathbf{k}_1} \left[\left(\frac{\hbar^2 k_1^2}{2M} + g\rho_0 \right) |\bar{\phi}(\mathbf{k}_1)|^2 + \frac{g\rho_0}{2} \left(\bar{\phi}(\mathbf{k}_1)\bar{\phi}(-\mathbf{k}_1) + \bar{\phi}^*(\mathbf{k}_1)\bar{\phi}^*(-\mathbf{k}_1) \right) \right] \quad (5.13)$$

$$H_3 = g\rho_0 \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \left(\bar{\phi}^*(\mathbf{k}_1)\bar{\phi}(\mathbf{k}_2)\bar{\phi}(\mathbf{k}_3) + \bar{\phi}(\mathbf{k}_1)\bar{\phi}^*(\mathbf{k}_2)\bar{\phi}^*(\mathbf{k}_3) \right) \quad (5.14)$$

となる。

ここで, ρ_0 は時間依存性を持つことに注意する必要がある。先行研究 [131–133] では, 凝縮体波動関数 ψ_0 を $\sqrt{\bar{\rho}_0} \exp(-i\mu t/\hbar)$ と仮定しており, 今の場合 $\rho_0(t) = \bar{\rho}_0$ としている。ここで, $\bar{\rho}_0 = N_0/L^3$ は初期の波数ゼロのモードを占有している粒子数密度, $\mu = g\bar{\rho}_0$ は化学ポテンシャルである。しかし, GP 方程式 (5.1) において揺らぎの 2 次のオーダーまでとると, 式 (5.8) より ρ_0 は明らかに時間変化することがわかる。数値計算結果を示すときに述べるが, この大きな凝縮体の波動関数の時間変化を考慮しないと弱波動乱流理論と数値計算結果が合わなくなる。

5.3.2 ハミルトニアンに対角化

前項の 1 体ハミルトニアン H_2 を対角化するために, Bogoliubov 変換 [95] を用いる。そこで, 有限波数の $\bar{\phi}(\mathbf{k})$ に対して, 次のような変数変換を考える。

$$\bar{\phi}(\mathbf{k}) = u(k)b(\mathbf{k}) + v(k)b^*(-\mathbf{k}) \quad (5.15)$$

$$u(k) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_0(k) + g\rho_0}{\epsilon_b(k)} + 1 \right)} \quad (5.16)$$

$$v(k) = -\sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_0(k) + g\rho_0}{\epsilon_b(k)} - 1 \right)} \quad (5.17)$$

ここで, $b(\mathbf{k})$ は Bogoliubov 波の正準変数で, $\epsilon_b(k)$ はその分散関係であり,

$$\epsilon_b(k) = \sqrt{\epsilon_0(k)(\epsilon_0(k) + 2g\rho_0)} \quad (5.18)$$

と定義される。ただし, $\epsilon_0(k) = \hbar^2 k^2/2M$ は自由粒子のエネルギーである。波数ゼロの正準変数は $b(\mathbf{k} = 0) = 0$ と定義しておく。

この変換を式 (5.13), (5.14) に施すと,

$$H_2 = \sum_{\mathbf{k}_1} \epsilon_b(k_1) |b(\mathbf{k}_1)|^2 \quad (5.19)$$

5.3 GP 方程式への弱波動乱流理論の適用

$$H_3 = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \left(b^*(\mathbf{k}_1) b(\mathbf{k}_2) b(\mathbf{k}_3) + b(\mathbf{k}_1) b^*(\mathbf{k}_2) b^*(\mathbf{k}_3) \right) \\ + \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) W(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \left(b^*(\mathbf{k}_1) b^*(\mathbf{k}_2) b^*(\mathbf{k}_3) + b(\mathbf{k}_1) b(\mathbf{k}_2) b(\mathbf{k}_3) \right) \quad (5.20)$$

$$V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = g\rho_0 \left(u_1 u_2 u_3 + v_1 v_2 u_3 + v_1 u_2 v_3 + v_1 v_2 v_3 + u_1 v_2 u_3 + u_1 u_2 v_3 \right) \quad (5.21)$$

$$W(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = g\rho_0 \left(u_1 v_2 v_3 + v_1 u_2 u_3 \right) \quad (5.22)$$

が得られる． u_1, v_1 は $u(k_1), v(k_1)$ の略記である．

この変換において，Bogoliubov 係数 $u(k), v(k)$ は， ρ_0 を通して時間変化する係数であることに注意する必要がある．なぜなら，これにより上記の Bogoliubov 変換 (5.15) が正準変換でなくなるからである．しかし，これらの係数の時間微分は小さな補正を与えるだけなので，無視することができる．なぜなら，

$$\frac{\partial}{\partial t} u(k) = \frac{\partial u(k)}{\partial \rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} \quad (5.23)$$

は，式 (5.8) より揺らぎの 2 次のオーダーだからである．これは，

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_0 = \frac{g\rho_0^2}{i\hbar} \sum_{\mathbf{k}_1} \left[b(\mathbf{k}_1) b(-\mathbf{k}_1) - b^*(\mathbf{k}_1) b^*(-\mathbf{k}_1) \right] \quad (5.24)$$

から理解することができる．よって，揺らぎの時間微分は揺らぎの 2 次までとると，

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\phi}(\mathbf{k}) \simeq u(k) \frac{\partial}{\partial t} b(\mathbf{k}) + v(k) \frac{\partial}{\partial t} b^*(-\mathbf{k}) \quad (5.25)$$

が得られる．したがって，揺らぎの 2 次までを残す範囲では，式 (5.15) は近似的に正準変換になっている．

以上より，Bogoliubov 波の正準変数 $b(\mathbf{k})$ が従う方程式は，

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} b(\mathbf{k}) = \frac{\partial H}{\partial b^*(\mathbf{k})} \quad (5.26)$$

となる．これは弱く相互作用する Bogoliubov 波の非線形ダイナミクスを記述する方程式である．以下の項で，式 (5.24), (5.26) に対して弱波動乱流理論を適用し，巨視的波動関数，密度分布，Bogoliubov 波のスペクトルに現れるべき乗則を導出する．

5.3.3 Bogoliubov 波の運動論的方程式

弱波動乱流理論では，波動の正準変数そのものではなく，その振幅に対応するスペクトルの方程式に注目する [95, 96]．そのスペクトルは，

$$n_b(\mathbf{k}) = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \langle |b(\mathbf{k})|^2 \rangle_{\text{en}} \quad (5.27)$$

5.3 GP 方程式への弱波動乱流理論の適用

と定義される．式 (5.24) と式 (5.26) に弱波動乱流理論を適用すると，波のスペクトルの時間発展方程式が，

$$\frac{\partial}{\partial t} n_b(\mathbf{k}) = \int \left(\mathcal{R}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) - \mathcal{R}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) - \mathcal{R}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1) \right) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) &= 2\pi |V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)|^2 \\ &\times \delta_d(\epsilon_b(k) - \epsilon_b(k_1) - \epsilon_b(k_2)) \delta_d(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \\ &\times \left(n_b(\mathbf{k}_1) n_b(\mathbf{k}_2) - n_b(\mathbf{k}_2) n_b(\mathbf{k}) - n_b(\mathbf{k}) n_b(\mathbf{k}_1) \right) \end{aligned} \quad (5.29)$$

として与えられる．ここで， $\delta_d(\dots)$ は Dirac のデルタ関数である．

式 (5.28) の導出で，式 (5.20) における $b_1 b_2 b_3$ と $b_1^* b_2^* b_3^*$ に関する項は寄与が小さく無視できることを用いた．直感的には，これらの相互作用項は波動のエネルギー保存則を満たさないことから理解できる．これらの項は，この保存則に対応した $\delta_d(\epsilon_b(k) + \epsilon_b(k_1) + \epsilon_b(k_2))$ の項が運動論的方程式に現れる．しかし，Bogoliubov 波の励起エネルギーは常に正であるので，この保存則を満たす場合は相互作用に関連するモードの波数がゼロの場合に限られる．そのため，より高次の摂動として初めて $b_1 b_2 b_3$ と $b_1^* b_2^* b_3^*$ の項が効いてくる．したがって，非線形項が弱い状況を考えている今の場合は無視できる．この事実を数学的に示すには， $W(k_1, k_2, k_3)$ の相互作用係数が消える正準変換を行えばいい．その詳細は，文献 [96] に示されている．

ここで，式 (5.24) と式 (5.26) への弱波動乱流理論の適用は，従来の適用と少し異なる．なぜなら， ρ_0 の時間変化を許しているため，分散関係 ϵ_b と相互作用係数 V が時間に依存してしまうからである．しかし，この時間変化は小さな補正を与えるだけであり，最終的に導出される波動の運動論的方程式 (5.28) は従来のものと同じになる．この詳細な計算は，付録 A にまとめている．

以下の項では，Bogoliubov 波乱流における低波数領域にのみ注目していく．理由としては，実験の空間分解能で観測できる領域が低波数領域に限定されるからである．ここでは，低波数領域の意味を明確にする．式 (5.18) より，Bogoliubov 波の分散関係は波数 $k_b = 2\sqrt{Mg\rho_0}/\hbar$ を境に振る舞いが大きく変化する． k_b より小さい領域ではフォノンのような分散関係であるが， k_b より大きい領域では自由粒子的な分散関係を持つ：

$$\epsilon_b(k) \simeq \begin{cases} \frac{\hbar^2 k^2}{2M} & (k_b < k) \\ \hbar c_s k & (k < k_b) \end{cases} \quad (5.30)$$

ただし， $c_s = \sqrt{g\rho_0/M}$ は音速である．本章では， k_b より小さい領域を低波数領域， k_b より大きい領域を高波数領域と呼ぶ．

本項の最後に，Bogoliubov 波乱流の空間次元の重要性に注意しておく．式 (5.30) より，低波数領域で分散関係は波数に関して線形となる．このような状況は圧縮性古典流体における音波乱流においても現れる [95, 134, 135]．この音波乱流の研究を通して，線形分散を持つ系に弱波動乱流理論を適用できるのは 3 次元系に限定されることが示唆されている．このような理由から，本研究では，3 次元系の Bogoliubov 波乱流のみを扱う．

5.3 GP 方程式への弱波動乱流理論の適用

5.3.4 低波数領域における Bogoliubov 波の相互作用

運動論的方程式 (5.28) の低波数領域のみに注目するため、その領域における相互作用係数 $V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ の表式を導出する。まず、この波動乱流における相互作用は波数空間において局所的であることを仮定する。つまり、同じオーダーの波数のモード同士が相互作用すると仮定する。この波数空間における相互作用の局所性については付録 D で議論している。よって、以下、低波数領域 $|\mathbf{k}_j| < k_b (j = 1, 2, 3)$ に限定して話を進めていく。

低波数領域では、Bogoliubov 係数 $u(k)$ と $v(k)$ を次のように展開することができる。

$$u(k) \simeq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k_b}{k}} \left[1 + \frac{k}{k_b} + \frac{1}{4} \left(\frac{k}{k_b} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{k}{k_b} \right)^3 \right] \quad (5.31)$$

$$v(k) \simeq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k_b}{k}} \left[-1 + \frac{k}{k_b} - \frac{1}{4} \left(\frac{k}{k_b} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{k}{k_b} \right)^3 \right] \quad (5.32)$$

これらを相互作用係数 (5.21) に代入して、まとめると、

$$V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \simeq \frac{g\rho_0}{8} \sqrt{\frac{k_b^3}{k_1 k_2 k_3}} \left[-\frac{2}{k_b} (k_1 - k_2 - k_3) + \frac{1}{2k_b^3} (k_1^3 - k_2^3 - k_3^3 + k_1^2 k_2 - k_1 k_2^2 + k_2^2 k_3 + k_2 k_3^2 + k_1^2 k_3 - k_1 k_3^2 + 12k_1 k_2 k_3) \right] \quad (5.33)$$

が得られる。

式 (5.29) の 2 つのデルタ関数は波動の運動量・エネルギー保存則を表しており、それらは、

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \quad (5.34)$$

$$\epsilon_b(k_1) = \epsilon_b(k_2) + \epsilon_b(k_3) \quad (5.35)$$

と書ける。これらを用いると、相互作用係数 (5.33) をより簡単な表式に書き換えることができる。結果のみを書くと、

$$V_b(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \frac{3g\rho_0}{2k_b^{3/2}} \sqrt{k_1 k_2 k_3} \quad (5.36)$$

が得られる。上式を導出する際には、

$$\epsilon_b(k) \simeq \hbar c_s k \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{k_b} \right)^2 \right] \quad (5.37)$$

を用いた。詳細な導出は、付録 B に載せてある。

この相互作用係数の特徴は、波数に関する同次関数になっているところにある。つまり、

$$V_b(\lambda \mathbf{k}_1, \lambda \mathbf{k}_2, \lambda \mathbf{k}_3) = \lambda^{3/2} V_b(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \quad (5.38)$$

5.3 GP 方程式への弱波動乱流理論の適用

が成り立つ．この事実は弱波動乱流理論を用いて，べき乗則を導出するときにとっても重要な意味を持つ．先行研究では異なる正準変数を用いて，これと異なる相互作用係数を導出しているが，同次関数としての性質は全く同じである [131, 132]．

5.3.5 Bogoliubov 波乱流におけるべき乗則の導出

統計的定常状態における Bogoliubov 波の運動論的方程式 (5.28) を用いて，Bogoliubov 波乱流中の物理量の振る舞いについて調べる．本項で示す導出方法は，Bogoliubov 波のエネルギーフラックスが波数に依存せず一定になることを要請する手法である．

初めに，式 (5.28) に低波数領域における相互作用係数 (5.36) と分散関係 (5.37) を代入して，波数空間の方向に関して積分を行うと，

$$\frac{\partial}{\partial t} n_b(k) = I(k) \quad (5.39)$$

$$I(k) = \frac{9\pi^2 g^2 \rho_0^2}{\hbar c_s k_b^3} \int_0^\infty \left[k_1^2 (k - k_1)^2 f_1(k, k_1) - k_1^2 (k_1 - k)^2 f_1(k_1, k) - k_1^2 (k + k_1)^2 f_2(k, k_1) \right] dk_1 \quad (5.40)$$

$$f_1(k, k_1) = \theta_H(k - k_1) \left(n_b(k_1) n_b(k - k_1) - n_b(k) n_b(k_1) - n_b(k) n_b(k - k_1) \right) \quad (5.41)$$

$$f_2(k, k_1) = n_b(k_1) n_b(k) - n_b(k + k_1) n_b(k) - n_b(k_1) n_b(k + k_1) \quad (5.42)$$

が得られる．ここで， $\theta_H(\dots)$ は Heaviside のステップ関数であり，波動スペクトルの等方性を仮定して $n_b(\mathbf{k}) = n_b(k)$ とした．今考察している系には特別な方向がないため，弱波動乱流中ではこの仮定は妥当であると考えられる．式 (5.39)–(5.42) の導出の詳細は付録 C にまとめてある．

上式 (5.39) から Bogoliubov 波のエネルギースペクトルに関する連続の式を導出すると，

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_b(k) + \frac{\partial}{\partial k} \Pi_b(k) = 0 \quad (5.43)$$

が得られる．ここで， $\mathcal{E}_b(k)$ と $\Pi_b(k)$ は，Bogoliubov 波のエネルギースペクトルと対応するエネルギーフラックスであり，次式で定義される．

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_b(k) &= \int \epsilon_b(k) n_b(k) d\Omega_k \\ &= 4\pi k^2 \epsilon_b(k) n_b(k) \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\Pi_b(k) = -4\pi \int_0^k k_1^2 \left[\epsilon_b(k_1) I(k_1) + n_b(k_1) \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_b(k_1) \right] dk_1 \quad (5.45)$$

今，統計的定常状態を考えているので，式 (5.43) と式 (5.45) に現れる時間微分は全てゼロとする．すると，エネルギーフラックス $\Pi_b(k)$ は波数 k に依存しなくなる．ここで，波動スペクトルの解と

5.3 GP 方程式への弱波動乱流理論の適用

して $n_b(k) \propto k^{-m}$ を仮定して, エネルギーフラックスが波数 k に依らない指数 m を求めれば, 乱流状態におけるスペクトルを求めることができる. そこで, 式 (5.45) に変数変換 $k_1 = k\tilde{k}$ を行うと¹,

$$\Pi_b(k) \propto k^{9-2m} \quad (5.46)$$

が得られる. これより $m = 9/2$ であれば, エネルギーフラックスが波数に依存しなくなる. したがって, Bogoliubov 波乱流における波動スペクトルは, 次の $9/2$ 乗則を示す:

$$n_b(k) \propto k^{-9/2} \quad (5.47)$$

波動スペクトルの等方性を利用して, 波数空間の立体角積分を行うと,

$$C_b(k) \propto k^{-5/2} \quad (5.48)$$

が得られる.

このべき乗則は波動間相互作用が局所的であることを仮定して導出されたことに注意する必要がある. そのため, 式 (5.47) を運動論的方程式の衝突積分 (5.40) に代入して, それが収束することを確認しなければならない. 結果を先に述べると, この積分は問題なく収束する. したがって, この $9/2$ 乗則は初めに仮定した条件を満たしている. この局所性に関する計算は, 付録 D にまとめてある.

この Bogoliubov 波のべき乗則を用いて, 弱波動乱流中における波動関数と密度分布の相関関数の振る舞いを調べることができる. まず, 初めに本章の 5.2 節で導入した波動関数の相関関数 C_w について考える. Bogoliubov 波の正準変数と波動関数は式 (5.15) で結びついている. 低波数領域では, Bogoliubov 係数が簡単化され,

$$\bar{\phi}(\mathbf{k}) \propto \frac{b(\mathbf{k})}{\sqrt{k}} - \frac{b^*(-\mathbf{k})}{\sqrt{k}} \quad (5.49)$$

が得られる. これより,

$$\langle |\bar{\phi}(k)|^2 \rangle_{\text{en}} \propto \frac{1}{k} \langle |b(k)|^2 \rangle_{\text{en}} \quad (5.50)$$

が導出できる. ここで, $\langle b(\mathbf{k}_1)b(\mathbf{k}_2) \rangle_{\text{en}} = 0$ を使用した. これは弱波動乱流理論から運動論的方程式 (5.28) を導出するとき用いた近似であり, Bogoliubov 波の振動周期が非線形ダイナミクスの特徴的な時間スケールよりも短いことを反映している. 式 (5.48) と式 (5.50) を組み合わせると, 低波数領域 ($0 < k < k_b$) において巨視的波動関数の相関関数は, 次の $-7/2$ 乗則を示すことが導かれる:

$$\begin{aligned} C_w(k) &\propto k^{-1} C_b(k) \\ &\propto k^{-7/2} \end{aligned} \quad (5.51)$$

この導出で, 波動関数のフーリエ係数 $\mathcal{F}[\psi] = \psi_0(\delta(\mathbf{k}) + \bar{\phi}(\mathbf{k}))$ を用いた.

次に密度分布の相関関数について考える. 大きな凝縮体の波動関数 ψ_0 を $\sqrt{\rho_0} \exp(i\theta_0)$ とし, そ

¹ \tilde{k} は無次元量である.

5.3 GP 方程式への弱波動乱流理論の適用

こからの密度分布と位相の揺らぎを $\delta\rho$ と $\delta\theta$ とすると、波動関数は、

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}) &= \sqrt{\rho_0 + \delta\rho(\mathbf{r})} e^{i(\theta_0 + \delta\theta(\mathbf{r}))} \\ &\simeq \psi_0 \left(1 + \frac{\delta\rho(\mathbf{r})}{2\rho_0} + i\delta\theta(\mathbf{r}) \right)\end{aligned}\quad (5.52)$$

と書ける．すると、波動関数の揺らぎは、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\delta\rho(\mathbf{r})}{2\rho_0} + i\delta\theta(\mathbf{r})\quad (5.53)$$

となり、密度分布の揺らぎはこれを用いて、

$$\delta\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \left(\phi(\mathbf{r}) + \phi^*(\mathbf{r}) \right)\quad (5.54)$$

と書ける．この波動関数の揺らぎは、式 (5.15) と書けるので、密度揺らぎと Bogoliubov 波の正準変数とを結びつけることができる．式 (5.49)–(5.51) とほぼ同様の計算を行うと、密度分布の相関関数は、次の $-3/2$ 乗則を示すことがわかる：

$$\begin{aligned}C_d(k) &\propto kC_b(k) \\ &\propto k^{-3/2}\end{aligned}\quad (5.55)$$

この密度分布の相関関数は実験的に測定可能なので、この $-3/2$ 乗則を観測することで冷却原子気体 BEC で初めてダイレクトカスケードに伴うべき乗則を実験的に確認できると考えられる．

最後に、実験観測に関して1つ注意する点がある．それは実験で観測される密度分布は、図 5.2 に示されているように、ある方向にわたって積分されているという点である．数式で書くと、実験観測量 ρ_{exp} は、

$$\rho_{\text{exp}}(x, y) = \int \rho(x, y, z) dz\quad (5.56)$$

である．よって、2次元平面に射影された密度分布の相関関数 $C_{d,\text{exp}}$ が実験観測量となる．

このとき、弱波動乱流は実空間、波数空間の両方で等方的であることに注意すると、 ρ_{exp} の相関関数に現れるべき乗則を導出できる．まず、相関関数 $C_{d,\text{exp}}(k)$ を、

$$C_{d,\text{exp}}(k) = \frac{1}{\Delta k} \sum_{\mathbf{k}_1 \in \Omega_k} \langle |\bar{\rho}_{\text{exp}}(k_{1,x}, k_{1,y})|^2 \rangle_{\text{en}}\quad (5.57)$$

で定義する．ただし、 $\bar{\rho}_{\text{exp}}(k_x, k_y) = \mathcal{F}[\rho_{\text{exp}}(x, y)]$ とおいた．相関関数 $C_{d,\text{exp}}(k)$ のべき乗則を導出するために、式 (5.56) の積分操作に注目する．これは明らかに、 z 方向の波数 $k_z = 0$ 成分を抽出する操作に対応している．よって、

$$\bar{\rho}_{\text{exp}}(k_x, k_y) = \bar{\rho}(k_x, k_y, k_z = 0)\quad (5.58)$$

が成り立つ．したがって、弱波動乱流中の等方性と式 (5.47) から導かれる $\langle |\bar{\rho}(k_x, k_y, k_z)|^2 \rangle_{\text{en}} \propto (k_x^2 +$

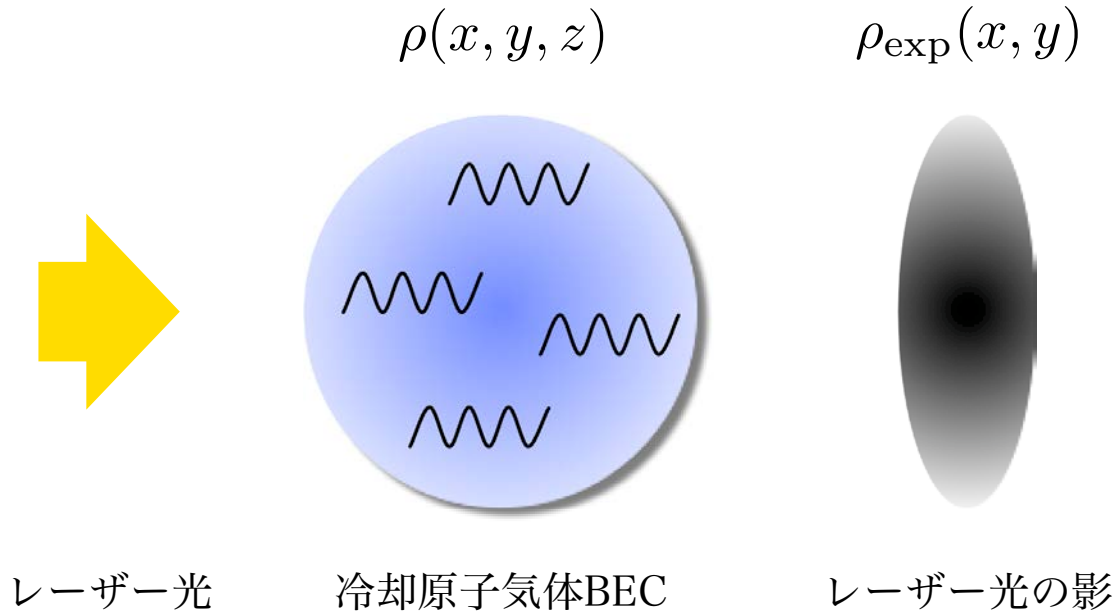


図 5.2: 実験観測される密度分布 $\rho_{\text{exp}}(x, y)$. 実験で密度分布を観測するとき, 冷却原子気体 BEC にレーザー光をあて, その背後に現れる陰影の濃さ (透過光の強度) を測定している. そのため, 観測できる密度分布はある方向に積分された 2 次元平面上の密度分布 $\rho_{\text{exp}}(x, y)$ である.

$k_y^2 + k_z^2)^{-7/2}$ に注意すると,

$$\begin{aligned} \langle |\bar{\rho}_{\text{exp}}(k_x, k_y)|^2 \rangle_{\text{en}} &\propto (k_x^2 + k_y^2)^{-7/2} \\ &\propto k^{-7/2} \end{aligned} \quad (5.59)$$

が得られる. 2 次元系のヤコビアン次元依存性に注意して, 波数空間の方向に関して積分すると,

$$\begin{aligned} C_{\text{d,exp}}(k) &\propto k^{-7/2} \times k \\ &\propto k^{-5/2} \end{aligned} \quad (5.60)$$

が導出される. このべき乗則は $C_{\text{d}}(k)$ の $-3/2$ 乗則と等価であるので, この $-5/2$ 乗則が観測されれば $-3/2$ 乗則が観測されたことになる.

5.4 数値計算結果

本節では, 1 成 GP 方程式 (5.1) の数値計算を用いて, Bogoliubov 波乱流を調べた結果を示す. 特に, 前節で導出したエネルギーダイレクトカスケードに伴う 3 つのべき乗則 (5.48), (5.51), (5.55) を確認することが目的である.

まず, 数値計算の方法・条件について述べる. 考える系は捕獲ポテンシャルなしの一般的な 3 次元系である. システムサイズは $256\xi \times 256\xi \times 256\xi$ で, 空間, 時間分解能はそれぞれ $dx/\xi = 1$,

5.4 数値計算結果

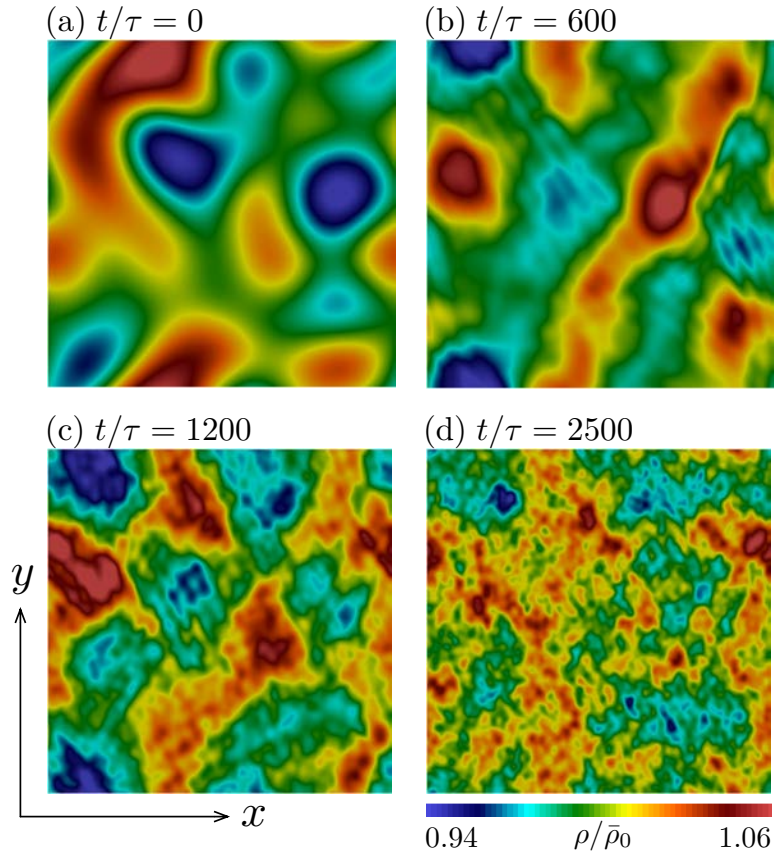


図 5.3: 時刻 $t/\tau =$ (a) 0 , (b) 600 , (c) 1200 , (d) 2500 における 2 次元密度分布 $\rho(x, y, z = 128\xi)$. 図のサイズは $256\xi \times 256\xi$ である . 一様な状態からの密度揺らぎはカラーバーより約 $\pm 6\%$ 程度であり , Bogoliubov 波が弱く相互作用する状況が実現している . 時間発展とともに細かな構造が生成し続けており , これは Bogoliubov 波のエネルギーダイレクトカスケードが起きていることから理解できる . [Reprinted figure with permission from K. Fujimoto *et al.*, *Phys. Rev. A* **91**, 053620 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.]

$dt/\tau = 5 \times 10^{-3}$ である . ただし , $\xi = \hbar/\sqrt{2Mg\rho_0}$, $\tau = \hbar/g\rho_0$ である . この条件のもと 1 成分 GP 方程式を擬スペクトル法と 4 次のルンゲクッタ法を用いて数値的に解いた .

初期状態は , ダイレクトカスケードを見るために , 低波数領域にエネルギーが蓄積された状態を採用した . 数値的には以下に示すように , 波数空間で乱数を用いて波動関数を準備した .

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho_0} \left(1 + \phi(\mathbf{r}) \right) \quad (5.61)$$

$$\mathcal{F}[\phi](\mathbf{k}) = 3000(R_1 + iR_2)k^4\xi^4 \exp(-k^2\xi^2/0.0016) \quad (5.62)$$

ここで , R_1 と R_2 は範囲 $[-0.5, 0.5)$ の一様乱数である . 図 5.3(a) が初期状態の密度分布であり , システムサイズの $1/4$ 同程度の密度変化が現れていることがみてとれる . これは , 低波数側にエネルギー

5.4 数値計算結果

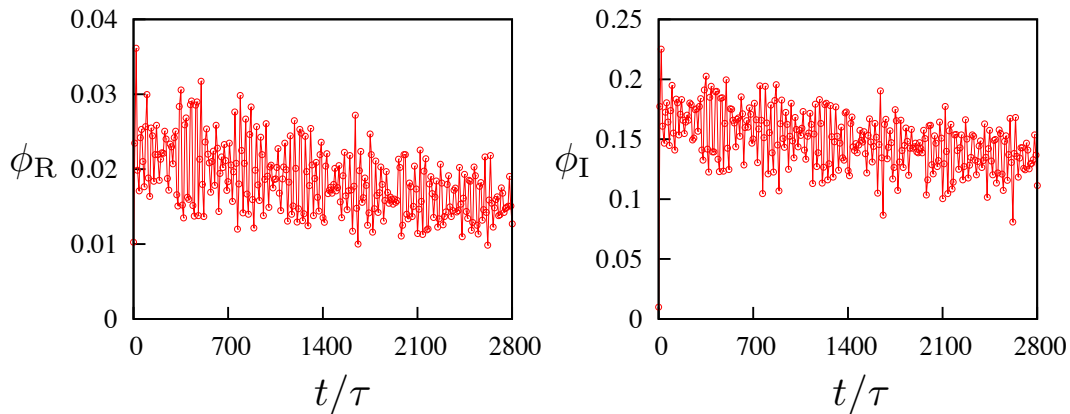


図 5.4: 波動関数の揺らぎ ϕ の大きさの時間変化．左図に $\phi_R = \langle |\text{Re}[\phi]| \rangle_V$, 右図に $\phi_I = \langle |\text{Im}[\phi]| \rangle_V$ の時間変化を示している．この結果より、揺らぎが弱い条件を満たしていることがわかる．[Reprinted figure with permission from K. Fujimoto *et al.*, *Phys. Rev. A* **91**, 053620 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.]

ギー注入していることに対応している．後ほど示す物理量のスペクトルもこのエネルギー注入に対応して、低波数側に大きな値を持つ．

図 5.3 は、初期状態 (5.61) から時間発展させたときの密度分布の時間変化を表している．初期状態は、低波数モードの密度揺らぎしかないが、図 5.3(b)–(d) に示されているように時間発展とともに細かな構造が少しずつ現れてくるのがわかる．これは Bogoliubov 波の非線形相互作用を通して生じる異なる波数モード間の相互作用により引き起こされている．また、細かな構造のみが現れているのは、Bogoliubov 波のエネルギーダイレクトカスケードを反映しており、その詳細は後ほど示す物理量のスペクトルの中で明らかになる．

また、図 5.3 のカラーバーより一様な分布 $\bar{\rho}_0$ からの密度揺らぎの大きさは、最大で 6% 程度である．そのため、量子渦は一切生成されておらず¹、Bogoliubov 波が弱く相互作用する状況となっている．この状況が成立しているかを定量的に調べるために、 $|\phi| \ll 1$ がどの程度満たされているかをチェックした．そのために、 ϕ の実部と虚部の絶対値を空間平均した $\phi_R = \langle |\text{Re}[\phi]| \rangle_V$ と $\phi_I = \langle |\text{Im}[\phi]| \rangle_V$ の時間変化を計算した．図 5.4 がその結果であり、これより時刻 $t/\tau = 1500$ 以降で $|\phi| \sim 0.15$ となっていることがわかる．したがって、許容範囲程度で $|\phi| \ll 1$ が成立している．

次に、大きな凝縮体の波動関数 ψ_0 の時間変化を調べた．筆者が調べた範囲で先行研究 [131, 132] は全て

$$\psi_0 = \sqrt{\bar{\rho}_0} \exp\left(-i \frac{\mu t}{\hbar}\right) \quad (5.63)$$

を仮定している．ただし、 $\mu = g\bar{\rho}_0$ である．図 5.5 より、 ψ_0 からの振幅のずれは約 4% 程度であるが、位相のずれはとて大きいことがわかる．このように、先行研究で使われた仮定が良くないこと

¹量子渦が生成されている場合、渦中心で速度場が発散するため密度がゼロとなる．そのため、図 5.3 のカラーバーから渦が生成されていないことがわかる．

5.5 先行研究との比較

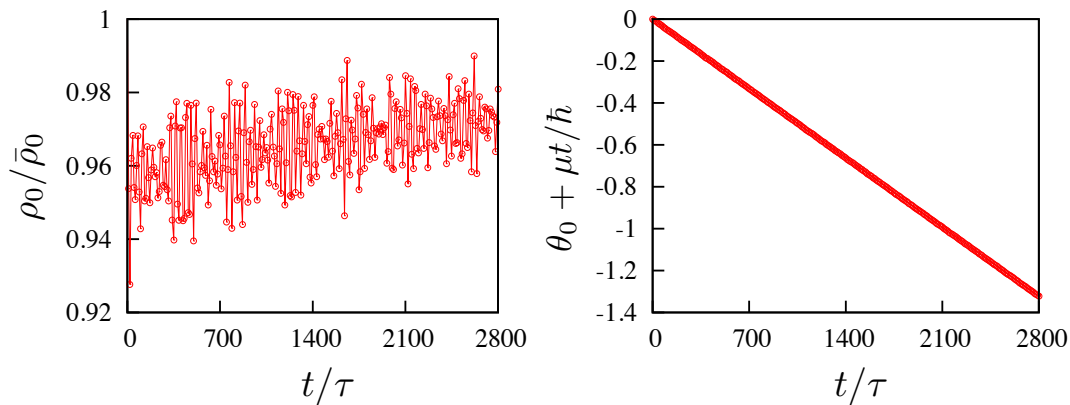


図 5.5: 大きな凝縮体波動関数 ψ_0 の振幅 ρ_0 と位相 θ_0 の時間変化．先行研究で仮定されている $\sqrt{\bar{\rho}_0}\exp(-i\mu t/\hbar)$ と比較すると、振幅のずれは小さいが、位相が大きくずれることがわかる．これより、この仮定が妥当でないことがわかる．[Reprinted figure with permission from K. Fujimoto *et al.*, *Phys. Rev. A* **91**, 053620 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.]

がわかった．実は、このことが原因で Bogoliubov 波のスペクトルが理論から導出したべき乗則と合わなくなる．

本節の最後に、物理量のスペクトルの数値計算結果を示す．図 5.6 に Bogoliubov 波のスペクトル C_b 、波動関数のスペクトル C_w 、密度分布のスペクトル C_d の時間変化を示している．それぞれ初期は、低波数領域のみに大きな値を持っている．これは上述した低波数モードへのエネルギー注入を反映している．その後時間発展すると、Bogoliubov 波間の相互作用を通して徐々に高波数のモードが成長してくる．十分時間発展すると、時刻 $t/\tau = 2500$ のスペクトルのように 1 桁のオーダーにわたり、べき乗則が現れる．そして、このべき乗則が前節で解析的に導出したべき指数 (5.48), (5.51), (5.55) と良い一致を示している．

ここで、Bogoliubov 波のスペクトル C_b の計算には注意が必要である．本論文の計算では、式 (5.6) に基づいて大きな凝縮体の波動関数 ψ_0 を求めて、Bogoliubov 波のスペクトルを計算している．しかし、もし式 (5.63) を用いて、正準変数 $b(k)$ を計算すると、図 5.6 の C_b とは全く異なる振る舞いを示す．これは図 5.5 で示したように式 (5.63) の仮定が不適当だからだと考えられる．

以上まとめると、1 成分 GP 方程式を用いて Bogoliubov 波乱流を数値的に生成して、前節で導出した 3 つのべき乗則を確認した．

5.5 先行研究との比較

Proment 達の先行研究 [133] と本論文の結果は大きな違いがある．それは波動関数のスペクトルの指数である．彼らは $-3/2$ 乗則を導出して、それを数値的に確認したと主張しているが、このべき指数は本論文で導出した $-7/2$ と大きく異なる．本節では、この違いについて議論する．

そこで、まず初めにこの先行研究でどのように $-3/2$ 乗則を導出したかについて解説する．彼ら

5.5 先行研究との比較

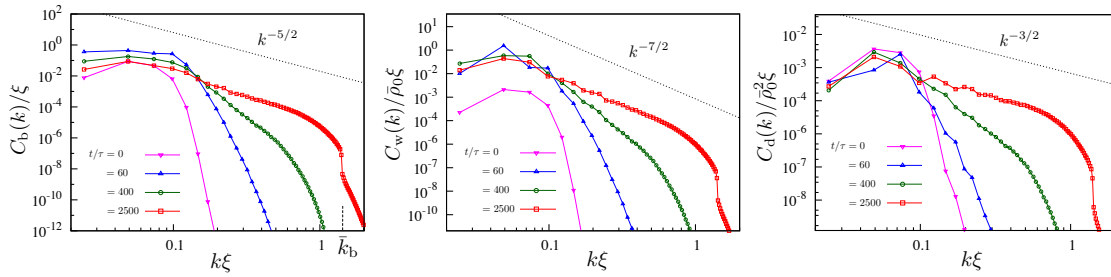


図 5.6: Bogoliubov 波のスペクトル C_b , 波動関数のスペクトル C_w , 密度分布のスペクトル C_d の時間変化．スペクトルは初期状態のノイズを変えた 6 つの数値計算のアンサンブル平均をとっている．しかし、この平均操作がなくても結果はほとんど変わらない．図よりエネルギーダイレクトカスケードが起き、式 (5.48), (5.51), (5.55) のべき乗則と良い一致を示していることがわかる．[Reprinted figure with permission from K. Fujimoto *et al.*, *Phys. Rev. A* **93**, 039901 (2016). Copyright (2016) by the American Physical Society.]

は、Zahkarov 達の研究 [132] を利用している．そこでは、波動関数を $\psi = \sqrt{\rho} \exp(i\theta)$ と書いて、Bogoliubov 波の正準変数として $\varphi = \sqrt{\rho}$, $\Pi = 2\hbar\rho\theta$ を採用しており、大きな凝縮体まわりの揺らぎを調べるために $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, $\Pi = \Pi_1$ とおいている．ここで、 φ_0 は大きな凝縮体密度に対応しており、 φ_1 , Π_1 は揺らぎに関する変数である．これらの変数に対して、

$$\bar{\varphi}_1(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0(\mathbf{k})}{\hbar\epsilon_b(\mathbf{k})}} (B(\mathbf{k}) + B^*(-\mathbf{k})) \quad (5.64)$$

$$\bar{\Pi}_1(\mathbf{k}) = -i \sqrt{\frac{\hbar\epsilon_b(\mathbf{k})}{\epsilon_0(\mathbf{k})}} (B(\mathbf{k}) - B^*(-\mathbf{k})) \quad (5.65)$$

で定義される正準変換¹を行うと、1 体のハミルトニアンは、

$$H'_2 = \frac{1}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}_1} \epsilon_b(\mathbf{k}_1) |B(\mathbf{k}_1)|^2 \quad (5.66)$$

と対角化される．ただし、 $\bar{\varphi}_1(\mathbf{k}) = \mathcal{F}[\varphi_1]$, $\bar{\Pi}_1(\mathbf{k}) = \mathcal{F}[\Pi_1]$ と定義している．この状況で Zahkarov 達は、次式で定義される Bogoliubov 波のエネルギースペクトルに $-3/2$ 乗則が現れることを示した：

$$\mathcal{E}_B(k) = \frac{1}{\hbar\Delta k} \sum_{\mathbf{k}_1 \in \Omega_k} \epsilon_b(\mathbf{k}_1) \langle |B(\mathbf{k})|^2 \rangle_{\text{en}} \quad (5.67)$$

先行研究 [133] は、この $-3/2$ 乗則を用いて、波動関数のスペクトルのべき指数を求めている．彼らは、 $\mathcal{E}_B(k)$ を次のように、

$$\frac{1}{\Delta k} \sum_{\mathbf{k}_1 \in \Omega_k} \epsilon'_b(k) \langle |\bar{\psi}(\mathbf{k})|^2 \rangle_{\text{en}} \quad (5.68)$$

¹波数ゼロの正準変数は $B(\mathbf{k} = 0) = 0$ と定義する．

5.6 まとめと課題

評価した．ここで， $\epsilon'_b(k) = g\rho_0 + \epsilon_b(k)$ である．このとき，低波数領域のみに注目して， $\epsilon'_b(k) \simeq g\rho_0$ が満たされているとすると， C_w が $-3/2$ 乗則を示すことが導出される．このようにして，先行研究において $-3/2$ 乗則が導出されているが，式 (5.68) の評価に問題があるように見える．

揺らぎが小さいとすると，巨視的波動関数は，

$$\psi \simeq \varphi_0 + \varphi_1 + i \frac{\Pi_1}{2\hbar\varphi_0} \quad (5.69)$$

と展開できる．これを波数空間で表現すると，

$$\bar{\psi}(\mathbf{k}) \simeq \varphi_0 \delta(\mathbf{k}) + \bar{\varphi}_1(\mathbf{k}) + i \frac{\bar{\Pi}_1(\mathbf{k})}{2\hbar\varphi_0} \quad (5.70)$$

が得られる．その結果，低波数領域において，

$$\langle |\bar{\psi}(\mathbf{k})|^2 \rangle_{\text{en}} \simeq \frac{m c_s}{\hbar^2 \varphi_0^2 k} \langle |B(\mathbf{k})|^2 \rangle_{\text{en}} \quad (5.71)$$

が成り立つ．これは $\epsilon_b(k) \propto k \langle |B(\mathbf{k})|^2 \rangle_{\text{en}} k^2 \propto k^{-3/2}$ のために， C_w の $-7/2$ 乗則を導く．よって，先行研究の $-3/2$ 乗則は正しくなく，式 (5.68) の評価に問題があると考えられる．

5.6 まとめと課題

本章では，1成分の冷却原子気体 BEC における弱波動乱流の研究結果について述べた．この乱流中では，量子渦は一切生成されず，基底状態まわりの揺らぎである Bogoliubov 波が弱く相互作用する弱波動乱流が実現している．そのため，本研究はこの弱波動乱流を Bogoliubov 波乱流と呼んだ．この Bogoliubov 波乱流を 1成分 GP 方程式と弱波動乱流理論を用いて，解析的に Bogoliubov 波の波数分布，波動関数の相関関数，密度分布の相関関数について調べた．その結果，これらの量に乱流に特徴的なべき乗則が現れることを見出した．数値計算では，これら解析計算と良い一致を示す結果を得ることができた．また，実験で観測される 2次元平面に射影された密度分布の振る舞いも調べ，冷却原子気体 BEC でダイレクトカスケードに伴うべき乗則を初めて観測するために必要なべき指数について議論した．

今後の課題としては，(1) コンシステントな摂動展開，(2) 実験を想定した数値計算，(3) 非凝縮成分の効果，(4) 密度揺らぎが大きい波動乱流研究の 4つが挙げられる．(1) は，既に 73 ページの脚注でコメントしているように，大きな凝縮体と揺らぎの方程式の摂動展開に関する問題である．この問題に対する解決の糸口はまだ見えていないが，今後解決すべき問題である．(2) に関しては，「低波数モードにエネルギーを注入する実験方法」，「捕獲ポテンシャルで閉じ込められた非一様系において，本章の一様系の結果がどの程度適用できるのか？」や「密度分布を観測する際に行う Time of flight の影響」の問題を考える必要がある．(3) に関しては，第 2 章と状況は同じで，非凝縮成分の効果はどの程度効いてくるかは，現時点では不明である．(4) は本章で議論した弱波動乱流よりも非線形性が強い波動乱流に関する研究である．弱波動乱流では密度ゆらぎが小さい場合に限定したが，実験ではより揺らぎが大きいほうが観測しやすいため，密度揺らぎが大きい場合の波動乱流を研究する必要がある．この問題へのアプローチ法として，古典流体の乱流統計理論を用いる方法がある．

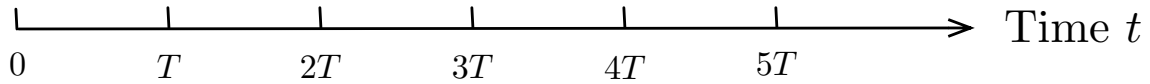


図 5.7: 弱波動乱流理論における時間の離散化． n を正の整数として，時間を区間 $[nT, (n+1)T)$ のように分割し，それぞれの区間で摂動計算を行う．最終的にこの区間の幅がカスケードするための時間と比較して小さいとして，運動論的方程式を導出する．

このような GP 方程式への乱流統計理論の適用は，吉田達により行われている [136]．

5.7 付録

付録 A：弱波動乱流理論の適用

本章では弱波動乱流理論 [96] を式 (5.24) と式 (5.26) に適用して，Bogoliubov 波の運動論的方程式 (5.28) を導出する．

この理論では時間スケールの分離が重要である．時間スケールには 2 つあり，1 つは Bogoliubov 波の周期 $T_L = 2\pi\hbar/\epsilon_b$ である．これはこのシステムにおける線形波の周期である．もし非線形項がなければ，正準変数の時間変化は，

$$b(\mathbf{k}, t) = b(\mathbf{k}, t=0)e^{-i\epsilon_b(\mathbf{k})t/\hbar} \quad (\text{A1})$$

となり，この周期は位相の時間変化として現れる．もう 1 つは非線形項に特徴的な時間スケール T_{NL} である．これは，例えば波動スペクトル $n_b(k)$ の時間変化のスケールに対応している．なぜなら，式 (A1) より，もし非線形項がなければ波動スペクトルは時間変化せず，初期状態の分布を維持しつづけるからである．弱波動乱流では，非線形項が弱いので，波動スペクトルの時間変化は線形波の周期よりも十分に長い．つまり $T_L \ll T_{NL}$ が成り立つ．

この事実を利用するために， $T_L \ll T \ll T_{NL}$ を満たすような時間 T を導入して，図 5.7 のように時間を T で分割する．そして，式 (5.24) と式 (5.26) に対して摂動計算を行い，時刻 $t = T$ における $b(\mathbf{k})$ と ρ_0 を求める．最後に， T が T_{NL} よりも十分に小さいとして， $n_b(k)$ の時間発展方程式を導出する．

そこで，まず相互作用表示を用いて，式 (5.24) と式 (5.26) を書き換える．相互作用表示の正準変数 $c(\mathbf{k})$ は，

$$b(\mathbf{k}) = \epsilon c(\mathbf{k})e^{-i\alpha(\mathbf{k})} \quad (\text{A2})$$

$$\alpha(\mathbf{k}) = \frac{1}{\hbar} \int_0^t \epsilon_b(\mathbf{k}, t_1) dt_1 \quad (\text{A3})$$

と定義する．ここで，微量のオーダーを明確にするために，パラメーター ϵ を導入した．このと

き, 式 (5.24) と式 (5.26) は,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c(\mathbf{k}) = \epsilon \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \left[\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \Delta_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) c(\mathbf{k}_1) c(\mathbf{k}_2) \right. \\ \left. + 2\delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \Delta_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) c(\mathbf{k}_1) c^*(\mathbf{k}_2) \right] \quad (\text{A4})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_0 = \epsilon^2 \frac{g\rho_0^2}{i\hbar} A \quad (\text{A5})$$

となる. ただし, $\Delta_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \exp[i(\alpha(\mathbf{k}) - \alpha(\mathbf{k}_1) - \alpha(\mathbf{k}_2))]$, $\Delta_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) = \exp[-i(\alpha(\mathbf{k}_1) - \alpha(\mathbf{k}_2) - \alpha(\mathbf{k}))]$ と定義している. A の表式は重要ではないので, ここでは示していない. また, 相互作用係数 W は前節で述べたように寄与が小さいので無視した.

時刻 $t = T$ における正準変数 $c(\mathbf{k})$ と凝縮体密度 ρ_0 を ϵ の 2 次までの近似で計算するために,

$$c(\mathbf{k}) = c^{(0)}(\mathbf{k}) + \epsilon c^{(1)}(\mathbf{k}) + \epsilon^2 c^{(2)}(\mathbf{k}) + \dots \quad (\text{A6})$$

$$\rho_0 = \rho_0^{(0)} + \epsilon \rho_0^{(1)} + \epsilon^2 \rho_0^{(2)} + \dots \quad (\text{A7})$$

と展開する. 式 (A5) と式 (A7) から, ρ_0 の展開は,

$$\rho_0(T) = \rho_0(0) + \epsilon^2 \rho_0^{(2)}(T) + \dots \quad (\text{A8})$$

となる. よって, V, Δ_1, Δ_2 のような ρ_0 を含む関数 $F(\rho_0)$ は,

$$F(\rho_0(T)) \simeq F(\rho_0(0)) + \frac{\partial F(\rho_0(0))}{\partial \rho_0(0)} \epsilon^2 \rho_0^{(2)}(T) \quad (\text{A9})$$

と展開できる. よって, 式 (A4) において, $\rho_0^{(2)}$ の項は ϵ の 3 次の項を生むため, $F(\rho_0(T)) = F(\rho_0(0))$ とできる. 以上より, 弱波動乱流理論の適用において ρ_0 の時間変化は微小な変化を生むだけであり, その変化は従来の波動スペクトルの運動方程式を変えないが, ρ_0 は時間変化することがわかった.

上で行った計算を文献 [96] に従って, 引き続き行くと, Bogoliubov 波の運動論的方程式 (5.28) を導出できる.

付録 B : 式 (5.36) の導出

式 (5.36) の導出の詳細を述べる. 低波数領域において, Bogoliubov 波はある特定のクラスの波数を持つモード間でのみ相互作用を行う. まず, 式 (5.37) の第 2 項を落として, 線形分散を仮定してみる. すると, 全ての波数ベクトルが平行になることがわかる. したがって, 式 (5.37) に従う線形波は, 波数ベクトルが互いに平行に近い波数モード同士が相互作用することを意味する.

このことを考慮すると, 波動の共鳴条件は $\epsilon_b(k_1) = \epsilon_b(k_2) + \epsilon_b(|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|)$ は,

$$k_1 - k_2 + \frac{1}{2k_b^2}(k_1^3 - k_2^3) \simeq |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| + \frac{1}{2k_b^2} |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|^3 \quad (\text{B1})$$

$$|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| \simeq \sqrt{(k_1 - k_2)^2 + k_1 k_2 \theta^2} \quad (\text{B2})$$

と近似できる．ここで， θ は波数ベクトル \mathbf{k}_1 と \mathbf{k}_2 がなす角度で，その大きさは小さい．2 次の微量までとると，

$$\theta \simeq \sqrt{3}(k_1 - k_2)/k_b \quad (\text{B3})$$

が得られる [95]．これより，

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| &\simeq (k_1 - k_2) \sqrt{1 + \frac{3k_1 k_2}{k_b^2}} \\ &\simeq (k_1 - k_2) \left(1 + \frac{3k_1 k_2}{2k_b^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

が導かれる．ここで，共鳴条件から得られる $k_1 > k_2$ を用いた．以上の結果を用いると，共鳴条件を満たす場合の Bogoliubov 波の相互作用係数 $V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ は，式 (5.33) より，

$$V_b(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = \frac{3g\rho_0}{2k_b^{3/2}} \sqrt{k_1 k_2 (k_1 - k_2)} \quad (\text{B5})$$

となる．これより，式 (5.36) が導出される．

付録 C：式 (5.39) の導出

式 (5.39) を式 (5.28) から導出する．波動スペクトル $n_b(\mathbf{k})$ の等方性を仮定し， k_2 の部分積分を実行して，寄与が 1 番大きい項のみを取り出すと，

$$\frac{\partial}{\partial t} n_b(k) = I(k) \quad (\text{C1})$$

$$\begin{aligned} I(k) &= \frac{4\pi^2}{\hbar c_s} \int_0^\infty dk_1 \int_0^\pi \sin\theta_1 d\theta_1 \\ &\times \left[\frac{2(k - k_1)k_1}{k} |V_b(k, k_1, |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|)|^2 \theta_H(k - k_1) \delta_d(\theta_1^2 - \Theta_1^2) f(k, k_1, k - k_1) \right. \\ &\quad - \frac{2(k_1 - k)k_1}{k} |V_b(k_1, k, |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}|)|^2 \theta_H(k_1 - k) \delta_d(\theta_1^2 - \Theta_1^2) f(k_1, k, k_1 - k) \\ &\quad \left. - \frac{2(k_1 + k)k_1}{k} |V_b(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}|, k_1, k)|^2 \delta_d(\theta_1^2 - \Theta_2^2) f(k + k_1, k_1, k) \right] \end{aligned} \quad (\text{C2})$$

となる．ここで， $f(k, k_1, k_2) = n_b(k_1)n_b(k_2) - n_b(k_2)n_b(k) - n_b(k)n_b(k_1)$ ， $\Theta_1 = \sqrt{3}|k - k_1|/k_b$ ， $\Theta_2 = \sqrt{3}(k + k_1)/k_b$ とおいた．最後に， $y = \theta_1^2$ ， $\sin(\Theta_j) \simeq \Theta_j$ ($j = 1, 2$) として積分を実行すると，式 (5.39) が得られる．

付録 D：べき乗則の局所性

本章で導出したべき乗則は、波数空間における波動間相互作用の局所性を仮定している。そのため、この仮定と導出されたべき乗則 (5.47) が無矛盾であることを示す必要がある。これは、式 (5.40) の衝突積分が収束することで示される。

まず、 m を正の数として、べき乗則 $n_b(k) \propto k^{-m}$ を仮定する。このとき、式 (5.40) から衝突積分が発散する原因を生み出す点が $k_1 = 0, k, \infty$ であることがわかる。ただし、点 $k_1 = k$ は $k_2 = 0$ を意味している。そのため、式 (5.28) の対称性 ($k_1 \leftrightarrow k_2$) より、 $k_1 = k$ における収束条件は $k_1 = 0$ のそれと同じであることがわかる。したがって、以下では $k_1 = 0, \infty$ での収束条件を求める。

大きい k_1 領域 ($k_1 \gg k$) では、発散する可能性がある項は式 (5.40) の第 2, 3 項で、それらは近似的に

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^\infty dk_1 \left[k_1^4 n_b(k) \left(n_b(k_1 + k) - n_b(k_1 - k) \right) \right] \\ & \simeq 4 \int_0^\infty dk_1 k k_1^4 n_b(k) \frac{\partial n_b(k_1)}{\partial k_1} \\ & \propto \int_0^\infty dk_1 k_1^{3-m} \end{aligned} \quad (\text{D1})$$

と書ける。したがって、 $k_1 = \infty$ における収束条件は $4 < m$ である。

一方、小さい k_1 領域 ($k \gg k_1$) では、発散する可能性がある項は式 (5.40) の第 1, 3 項である。これらは、

$$\begin{aligned} & \int_0^k dk_1 \left[k_1^2 n_b(k_1) \left(n_b(k + k_1) + n_b(k - k_1) - 2n_b(k) \right) \right] \\ & \simeq \int_0^k dk_1 k_1^4 n_b(k_1) \frac{\partial^2 n_b(k)}{\partial k^2} \\ & \propto \int_0^k dk_1 k_1^{4-m} \end{aligned} \quad (\text{D2})$$

となり、 $k_1 = 0$ における収束条件は $m < 5$ となる。

以上の結果をまとめると、衝突積分の収束条件は $4 < m < 5$ である。したがって、Bogoliubov 波乱流のべき指数は $9/2$ であるので、このべき乗則は局所性を持っていることが示された。

第6章 強磁性スピノールBECにおけるスピン波乱流

本章では、スピン自由度をもつスピン1強磁性スピノールBECにおける弱波動乱流に関する研究結果を示す。この乱流では、スピン渦やスピンドメイン壁のようなスピンが強く挟まれる構造はなく、スピン波が弱く相互作用する弱波動乱流が実現する。ここでは、スピン1スピノールGP方程式と弱波動乱流理論を用いて、横方向のスピン相関関数の振る舞いを調べた。本章では、これらの解析・数値計算の結果について詳しく議論する。

6.1 研究背景・動機

一般に非平衡現象では、渦、ソリトンに代表される位相励起と波動が混在し、それらが互いに相互作用する複雑な様相を示す。勿論、量子乱流もその例に漏れず、1成分BECでは量子渦とBogoliubov波が共存しており、複雑な振る舞いが現れる。前章ではこの状況を単純化して、波動が支配的なBogoliubov波乱流を考えた。そこでは、従来の量子乱流研究では取り扱われてこなかった密度分布の相関関数に注目して、一様なエネルギーカスケードを伴うべき乗則が現れることを明らかにし、このべき乗則の実験観測の可能性について議論した。

このような波動の非平衡現象を研究する上で、冷却原子気体BECは非常に適した系となっている。なぜなら、この系は「非常にクリーンであること」及び「孤立系に近いこと」から不純物や熱浴との相互作用が小さく、波動そのものの性質を調べることが可能だからである。さらに、Bogoliubov波とは異なる性質を持つ波動がいくつか存在し、多彩な波動の非平衡現象を研究することができる。波動の例としては、2成分、スピノールBECにおけるスピン波、ダイポールBECにおけるロトン、さらには量子渦上のKelvin波やドメイン壁上の表面波などの位相欠陥上の波動がある。

最近では、特にスピン波に関連する実験・理論研究が行われている。実験研究では、強磁性相互作用する合成スピン $F=1$ の ^{87}Rb におけるスピン波の分散関係(励起エネルギー)が精密に測定され、微小な磁気双極子双極子相互作用の効果が観測された[137]。理論研究の1つは、この実験に触発されて行われ、スピン波と磁気双極子双極子相互作用の関係が数値計算を用いて調べている[138]。それ以外に、量子多体効果を考慮した計算が行われ、スピン波の質量に対する量子補正やその下限が求められている[139,140]。このように、現在、冷却原子気体BECにおいてスピン波研究が多く行われている。しかし、基本的に波動の分散関係のみに注目しており、その非平衡ダイナミクスは、手つかずの未開拓な状態となっている¹。

¹スピン波の非平衡ダイナミクスとして、理論研究で予想された磁気双極子双極子相互作用の効果[141]を観測した実験はある[142]。

本章では、このスピン波による弱波動乱流について述べる。想定する系は、強磁性相互作用するスピン1スピノールBECである。この乱流は第2章のスピン乱流とは異なり、スピンドメイン壁のようなスピンが強く擦じれるような構造はなく、スピンは一方向に向きつつ、その周りで微小に揺らぐ状況にある。今回、このスピン波乱流をスピン1スピノールGP方程式と弱波動乱流理論を用いて、その性質を調べたところ Bogoliubov 波乱流とは大きく異なる振る舞いを見出した。その解析計算の詳細と対応する数値計算結果を以下の節で示していく。本結果のいくつかは論文 [143] にまとめられている。

6.2 研究手法

本研究では、第3章と同様に絶対零度におけるスピン1強磁性スピノールBECを扱う。ここでは、捕獲ポテンシャルなしの一様系を考えるので、この系を記述する方程式は、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_m = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi_m + c_0 \rho \psi_m + c_1 \sum_{n=-1}^1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}_{mn} \psi_n \quad (6.1)$$

となる。粒子間相互作用は強磁性相互作用であり、 $c_0 > 0$ 、 $c_1 < 0$ である。初期状態は、数値計算の詳細を述べるときに説明する。

6.3 弱波動乱流理論の適用

本節では、式 (6.1) を用いて、スピン波乱流の性質を解析的に明らかにする。Bogoliubov 波乱流の解析計算とは異なり、本計算では、式 (6.1) から導出されるスピン流体方程式に対して、弱波動乱流理論を適用する。この理由は、強磁性相互作用の特徴を活かすためには、スピンベクトルで表現された方程式のほうが便利だからである。

6.3.1 強磁性スピン流体方程式と揺らぎ

弱波動乱流理論を式 (6.1) に適用するために、スピン流体方程式からスピン揺らぎの方程式を導出する。まず、強磁性相互作用する系を考えているので、巨視的波動関数は式 (2.117) と近似的に書くことができる。このとき、既に述べたが、スピンベクトルとネマティックテンソルの間に、

$$n_{\mu\nu} = \frac{\delta_{\mu\nu} + f_\mu f_\nu}{2} \quad (6.2)$$

が成り立つ。その結果、スピン流体方程式からネマティックテンソルを消去できる。得られる方程式は2.1.7項で示しているが、以下に再掲する：

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho f_\mu + \nabla \cdot \rho \mathbf{v}_\mu = 0 \quad (6.4)$$

6.3 弱波動乱流理論の適用

$$\mathbf{v}_\mu = f_\mu \mathbf{v} - \frac{\hbar}{2M} \epsilon_{\mu\nu\lambda} f_\nu (\nabla f_\lambda) \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} v_\mu + v_\nu \nabla_\nu v_\mu - \frac{\hbar^2}{2M^2} \nabla_\mu \frac{\nabla_\nu^2 \sqrt{\rho}}{\rho} \\ + \frac{\hbar^2}{4M^2 \rho} \nabla_\nu \rho \left\{ (\nabla_\mu f_\lambda) (\nabla_\nu f_\lambda) - f_\lambda (\nabla_\mu \nabla_\nu f_\lambda) \right\} \\ = -\frac{1}{M} \left\{ c_0 (\nabla_\mu \rho) + c_1 f_\nu (\nabla_\mu \rho f_\nu) \right\} \end{aligned} \quad (6.6)$$

この方程式を用いて、スピン波が弱く相互作用するスピン波乱流を調べる。この乱流では、スピンベクトル、全粒子数密度、速度場がともにある平均値まわりで微小に揺らぐ。この揺らぎを記述するために、これらの量を次のように分解する：

$$\rho = \bar{\rho} + \delta\rho \quad (6.7)$$

$$f_\mu = \bar{f}_\mu + \delta f_\mu \quad (6.8)$$

$$\mathbf{v} = \delta\mathbf{v} \quad (6.9)$$

ここで、 $\bar{\rho} = \langle \rho \rangle_V = N/V$ 、 $\bar{f}_\mu = \langle f_\mu \rangle_V$ はそれぞれ一様な全粒子数密度とスピンベクトルの空間平均した量である。スピン1 スピール GP 方程式を導くハミルトニアンは、位相とスピンベクトルの回転操作に対して不変であるため、これらの平均値は保存量となっている。また、速度場の平均値はゼロとなる状況を想定した。以下の計算では、スピンの z 軸まわりで揺らぐ状況を考えるために、 $\bar{f}_\mu = \delta_{\mu z}$ とする。

これらの揺らぎを式 (6.3)–(6.5) に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta f_\mu = I_\mu^s + I_\mu^{ss} + I_\mu^{sd} + I_\mu^{sv} \quad (6.10)$$

$$I_\mu^s = \frac{\hbar}{2M} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \bar{f}_\nu \Delta \delta f_\lambda \quad (6.11)$$

$$I_\mu^{ss} = \frac{\hbar}{2M} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \delta f_\nu \Delta \delta f_\lambda \quad (6.12)$$

$$I_\mu^{sd} = \left[\frac{\hbar}{2M\rho} \epsilon_{\mu\nu\lambda} f_\nu (\nabla \delta f_\lambda) \cdot \nabla \right] \delta\rho \quad (6.13)$$

$$I_\mu^{sv} = -(\delta\mathbf{v} \cdot \nabla) \delta f_\mu \quad (6.14)$$

が得られる。ここで、 $I_\mu^{(a)}$ ($a = s, ss, sd, sv$) はそれぞれスピン線形項、スピン非線形項、スピン-密度相互作用項、スピン-速度場相互作用項である。今のところ、一般的にこれらの項のどれが支配的に

6.3 弱波動乱流理論の適用

なるかは十分に理解できていないが、初期状態、相互作用係数、外場の性質に強く依存すると考えられる。

本章で考えているスピン波乱流では、スピン線形項が最も支配的であることは自明であるが、非線形項間の大小関係は非自明である。単純に考えると、実験において $c_0 \gg |c_1|$ が満たされているため、密度の揺らぎはスピンベクトルのそれよりも小さくなると期待できるので、スピン非線形項はスピン-密度相互作用項よりも大きいと予想できる。また、これらの揺らぎが小さいと、それらにより誘起される速度場も小さくなると考えられるので、スピン-速度場相互作用項はスピン非線形項よりも小さくなると考えられる。このような考察から、以下の解析計算では、スピン-密度相互作用項、スピン-速度場相互作用項を無視する。ただし、この近似が妥当かどうかは数値計算で確認する必要がある。

したがって、以下の解析では、

$$\frac{\partial}{\partial t} f_\mu = \frac{\hbar}{2M} \epsilon_{\mu\nu\lambda} f_\nu \Delta f_\lambda \quad (6.15)$$

を用いて、スピン波乱流の性質を明らかにしていく。これは、Heisenberg 強磁性方程式もしくは Landau-Lifshitz 方程式と呼ばれ、もともとは固体物理の研究で用いられた方程式である [144]。

実は、既に先行研究 [145] において弱波動乱流理論が式 (6.15) に適用されている。そこでは、磁性体におけるスピン波乱流が解析的に調べられ、スピン波の波数分布にダイレクトカスケードとインバーサカスケードに対応する2つのべき乗則が導出されている。しかし、磁性体には不純物、熱浴、結晶異方性、磁気双極子双極子相互作用などの効果があり、その系のスピン波乱流を調べる上で式 (6.15) は簡単すぎると思われる。そのためか、この先行研究に対応する実験はなく、べき乗則は観測されていないようである。

以下では、先行研究 [145] を紹介して、スピノール BEC におけるスピン波乱流の性質を調べる。その後、得られた結果をスピノール BEC における観測量と結びつける。

6.3.2 スピン波の正準方程式

弱波動乱流理論を式 (6.15) に適用するためには、それを正準形式に書き直す必要がある。まず、新しい変数として、

$$f_+ = f_x + if_y \quad (6.16)$$

$$f_- = f_x - if_y \quad (6.17)$$

を導入する。すると、式 (6.15) は、

$$\frac{\partial}{\partial t} f_+(\mathbf{r}) = \frac{2f_z(\mathbf{r})}{i\hbar} \frac{\delta W}{\delta f_-(\mathbf{r})} \quad (6.18)$$

$$W = \frac{\hbar^2}{4M} \int (\nabla_\mu f_\nu)^2 dV \quad (6.19)$$

6.3 弱波動乱流理論の適用

と変形できる．ここで，次式で定義される複素変数 a を導入する [95, 96]：

$$f_+ = a\sqrt{2 - a^*a} \quad (6.20)$$

$$f_- = a^*\sqrt{2 - a^*a} \quad (6.21)$$

$$f_z = 1 - a^*a \quad (6.22)$$

これは古典的な Holstein-Primakoff 変換に対応している．その結果，式 (6.18) より複素変数 a は，

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} a = \frac{\delta W}{\delta a^*} \quad (6.23)$$

に従う正準変数となる．

スピン波乱流では，正準変数の振幅の 2 乗 $|a|^2$ が 1 よりも十分に小さいので，ハミルトニアン W を正準変数 a で展開できる．最低次のスピン波間の相互作用項まで残すと，

$$W = W_0 + W_1 \quad (6.24)$$

$$W_0 = \frac{\hbar^2}{2M} \int |\nabla a|^2 dV \quad (6.25)$$

$$W_1 = \frac{\hbar^2}{8M} \int [a^2(\nabla a^*)^2 + (a^*)^2(\nabla a)^2] dV \quad (6.26)$$

が得られる． W_0 が 1 体のスピン波のハミルトニアンであり， W_1 がスピン波間の最低次の相互作用項となる．

6.3.3 スピン波の運動論的方程式

前項で得たスピン波の正準方程式を用いて，先行研究 [145] の結果を紹介する．この研究では，式 (6.15) に弱波動乱流理論を適用して，3 次元系のスピン波乱流を扱っている．

弱波動乱流理論では，波数空間のスピン波分布に注目する．そこで，正準方程式 (6.23) をフーリエ係数を用いて書き直す．その結果，

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{a}(\mathbf{k}) = \frac{\partial H}{\partial \hat{a}^*(\mathbf{k})} \quad (6.27)$$

が得られる．ただし，正準変数のフーリエ係数は $\hat{a}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}[a(\mathbf{r})](\mathbf{k})$ と定義される．対応するハミルトニアン H は，以下で与えられる．

$$H = H_0 + H_1 \quad (6.28)$$

6.3 弱波動乱流理論の適用

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}_1} \epsilon_{\text{sw}}(k_1) |\hat{a}(\mathbf{k}_1)|^2 \quad (6.29)$$

$$H_1 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} W_{3,4}^{1,2} \delta_{3,4}^{1,2} \hat{a}^*(\mathbf{k}_1) \hat{a}^*(\mathbf{k}_2) \hat{a}(\mathbf{k}_3) \hat{a}(\mathbf{k}_4) \quad (6.30)$$

$$W_{3,4}^{1,2} = -\frac{\hbar^2}{4M} \left[(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) + (\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_4) \right] \quad (6.31)$$

ただし, $\epsilon_{\text{sw}}(k) = \hbar^2 k^2 / 2M$ はスピン波の分散関係である. また, Dirac のデルタ関数の略記記号として $\delta_{d,2,3}^{k,1} = \delta_d(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)$ を用いた.

スピン波の分布は, Bogoliubov 波のときと同様に,

$$n_{\text{sw}}(\mathbf{k}) = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^d \langle |\hat{a}(\mathbf{k})|^2 \rangle_{\text{en}} \quad (6.32)$$

と定義される. ただし, 系の空間次元は $d = 3$ である. すると, 弱波動乱流理論からスピン波の運動論的方程式が以下のように導出できる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n_{\text{sw}}(\mathbf{k}) &= I_{\text{sw}}(\mathbf{k}) \\ &= \int \mathcal{R}_{2,3}^{k,1} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{2,3}^{k,1} &= 4\pi |W_{2,3}^{k,1}|^2 \delta_d(\epsilon_{2,3}^{k,1}) \delta_{d,2,3}^{k,1} n_{\text{sw}}(\mathbf{k}_1) n_{\text{sw}}(\mathbf{k}_2) n_{\text{sw}}(\mathbf{k}_3) n_{\text{sw}}(\mathbf{k}) \\ &\times \left(\frac{1}{n_{\text{sw}}(\mathbf{k})} + \frac{1}{n_{\text{sw}}(\mathbf{k}_1)} - \frac{1}{n_{\text{sw}}(\mathbf{k}_2)} - \frac{1}{n_{\text{sw}}(\mathbf{k}_3)} \right) \end{aligned} \quad (6.34)$$

ここで, $\delta_d(\epsilon_{2,3}^{k,1}) = \delta_d(\epsilon_{\text{sw}}(k) + \epsilon_{\text{sw}}(k_1) - \epsilon_{\text{sw}}(k_2) - \epsilon_{\text{sw}}(k_3))$ とおいた.

6.3.4 スピン波乱流におけるスピン波の波数分布

先行研究 [145] では, 方程式 (6.33) から 3 次元スピン波乱流の 2 つのべき乗則を導出した:

$$n_{\text{sw}}(k) \propto \begin{cases} k^{-13/3} & (\text{direct cascade}) \\ k^{-11/3} & (\text{inverse cascade}) \end{cases} \quad (6.35)$$

式 (6.30) からわかるように, スピン波間の相互作用は 4 波相互作用である. そのため, スピン波の粒子数 (作用) が保存する. したがって, 付録 A の Fjørtoft の議論 [95, 96, 146] から, スピン波のエネルギーがダイレクトカスケードを示し, スピン波の粒子数がインバースカスケードを起こす. この事実を反映して, スピン波乱流では式 (6.35) のように 2 つのべき乗則が得られる.

これらの乱流解は, もちろんエネルギーフラックスと粒子数フラックスが一定となる. これを以下に示す. まず, スピン波のエネルギーフラックスの表式を式 (6.33) から導出する. 波数 k のスピン

6.3 弱波動乱流理論の適用

波のエネルギースペクトル $\mathcal{E}_{\text{sw}}(k)$ は、波動エネルギー E_{sw} を用いて、

$$E_{\text{sw}} = \int \epsilon_{\text{sw}}(k) n_{\text{sw}}(k) dk = \int \mathcal{E}_{\text{sw}}(k) dk \quad (6.36)$$

と定義される．乱流解では、波数の方向に関して波動の分布は等方的なので、波数空間の立体角積分を簡単に行える．その結果、

$$\mathcal{E}_{\text{sw}}(k) = 4\pi k^2 \epsilon_{\text{sw}}(k) n_{\text{sw}}(k) \quad (6.37)$$

となる．このとき、波動エネルギースペクトルの時間微分を計算すると、式 (6.33) から次式が得られる．

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_{\text{sw}}(k) + \frac{\partial}{\partial k} \Pi_{\text{sw}}^{\text{E}}(k) = 0 \quad (6.38)$$

$$\Pi_{\text{sw}}^{\text{E}}(k) = - \int_0^k 4\pi q^2 \epsilon_{\text{sw}}(q) I_{\text{sw}}(q) dq \quad (6.39)$$

ここで、 $\Pi_{\text{sw}}^{\text{E}}(k)$ はスピン波のエネルギーフラックスと呼ばれる量であり、単位時間あたりに波数 k を通って流出入するスピン波のエネルギーと解釈できる．乱流解でのエネルギーフラックスの振る舞いを調べるために、 $q = kq'$ という変数変換を行い、 $n_{\text{sw}}(k) \propto k^{-13/3}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{sw}}^{\text{E}}(k) &\propto k^{2 \times 2} k^{-2} k^{-3} k^{3 \times 3} n_{\text{sw}}(k)^3 k^3 k^2 \\ &= k^0 \end{aligned} \quad (6.40)$$

が導かれ、ダイレクトカスケードの解 $n_{\text{sw}}(k) \propto k^{-13/3}$ は波数 k に依存しない一様なエネルギーフラックスを持つことがわかる．

同様に、スピン波の粒子数フラックスの表式を連続の式から導出すると、

$$\Pi_{\text{sw}}^{\text{N}}(k) = - \int_0^k 4\pi q^2 I_{\text{sw}}(q) dq \quad (6.41)$$

が得られる．その結果、 $n_{\text{sw}}(k) \propto k^{-11/3}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{sw}}^{\text{N}}(k) &\propto k^{2 \times 2} k^{-2} k^{-3} k^{3 \times 3} n_{\text{sw}}(k)^3 k^3 \\ &= k^0 \end{aligned} \quad (6.42)$$

となる．よって、インバースカスケードの解 $n_{\text{sw}}(k) \propto k^{-11/3}$ は一様な粒子数フラックスを持つ．

この結果は容易に2次元系に拡張することができ、スピン波の波数分布は、

$$n_{\text{sw}}(k) \propto \begin{cases} k^{-4/3-d} & (\text{direct cascade}) \\ k^{-2/3-d} & (\text{inverse cascade}) \end{cases} \quad (6.43)$$

となる．ただし $d = 2, 3$ である．この解はともに波数空間における相互作用が局所的であり、それは4波相互作用する弱波動乱流の局所性を一般的に論じている文献 [147] の結果を利用することで確認

6.3 弱波動乱流理論の適用

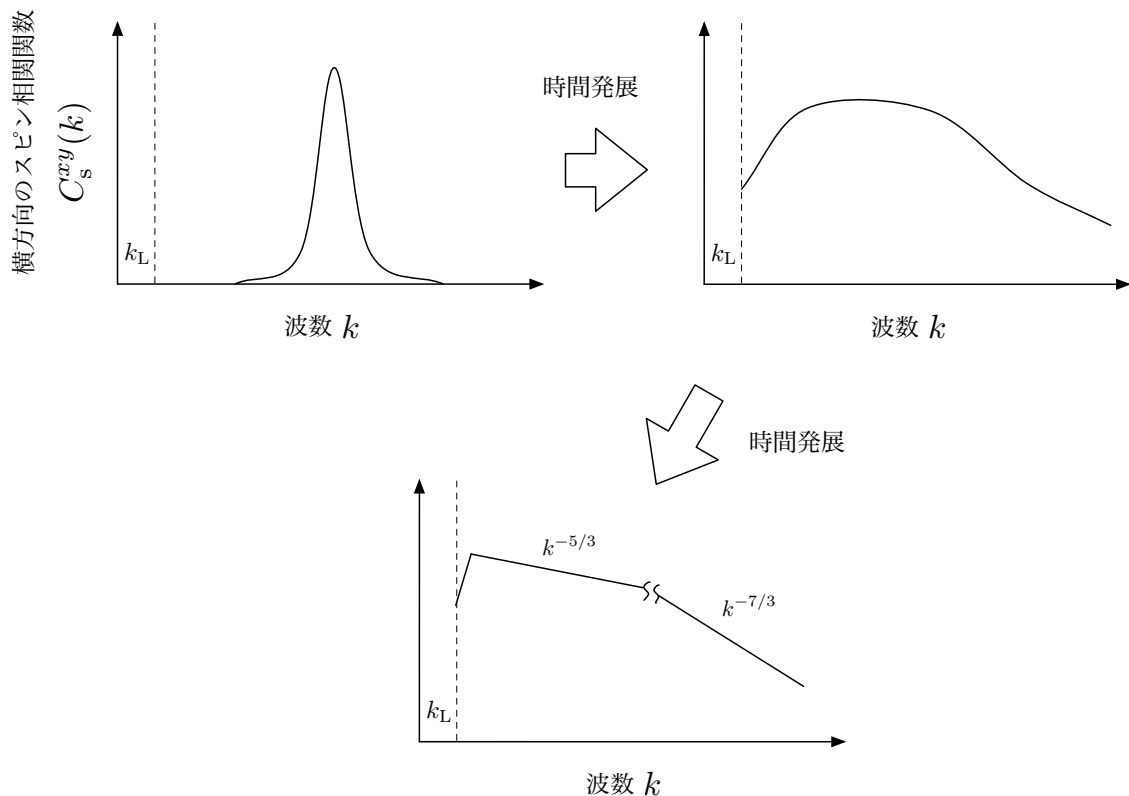


図 6.1: ダイレクトカスケードとインバースカスケードのイメージ図．システムサイズよりも離れた中間スケールでエネルギー注入を行うと，低波数領域でインバースカスケードが，高波数領域でダイレクトカスケードが起こると期待できる，その結果，低波数領域で $-5/3$ 乗則が，高波数領域で $-7/3$ 乗則が現れると予想できる．

できる．

6.3.5 スピン波乱流における横方向のスピン相関関数

スピノール BEC の実験では，位相コントラスト法を用いて，スピン密度ベクトルが観測できる [4, 56]．ここでは，式 (6.43) のべき乗則を実験観測量と結びつけるために，次式で定義される横方向のスピン相関関数に注目した：

$$C_s^{xy}(k) = \frac{1}{\Delta k} \sum_{\mathbf{k}_1 \in \Omega_k} \langle |\bar{F}_x(\mathbf{k}_1)|^2 + |\bar{F}_y(\mathbf{k}_1)|^2 \rangle_{\text{en}} \quad (6.44)$$

スピン波乱流では，スピン波の正準変数の振幅が小さいので，式 (6.20) から $F_+ \simeq \sqrt{2\rho}a$ が得られる．すると，式 (6.43) と式 (6.44) から，

$$C_s^{xy}(k) \propto \begin{cases} k^{-7/3} & (\text{direct cascade}) \\ k^{-5/3} & (\text{inverse cascade}) \end{cases} \quad (6.45)$$

が得られる．ここで，式 (6.43) に現れた空間次元 d の依存性は立体角積分により消えてしまう．このべき乗則を観測することができれば，ダイレクトカスケードとインバースカスケードに伴うべき乗則を実験的に観測できることになる．

このべき乗則は例えば，図 6.1 のようにシステムの間スケールで励起を起こすと，低波数側でインバースカスケードが起こり，高波数側でダイレクトカスケードが起こると期待できる．次節では，このべき乗則がどのように現れるかを数値計算を用いて詳細に調べる．

6.4 数値計算結果

前節で議論したスピン波乱流における 2 つのべき乗則 (6.45) をスピン 1 スピノール GP 方程式の数値計算で調べた．その結果，Bogoliubov 波乱流では見られなかったインバースカスケードとそれに伴うべき乗則を確認することができた．一方，ダイレクトカスケードに関しては，インバースカスケードと比較すると解析計算との一致がそれほど良くなかった．

6.4.1 ダブルカスケード

本項では，図 6.1 で示したダブルカスケードが起きるかどうかを数値的に調べる．考える系は 2 次元系のスピン 1 強磁性スピノール BEC である．解く方程式は式 (6.1) である．システムサイズ，空間分解能，時間分解能はそれぞれ $128\xi_d \times 128\xi_d$ ， $dx/\xi_d = 0.25$ ， $dt/\tau_d = 4 \times 10^{-3}$ として，相互作用係数は $c_0 > 0$ ， $c_1 < 0$ ， $|c_0/c_1| = 20$ とした．ただし， $\xi_d = \hbar/\sqrt{2Mc_0\bar{\rho}}$ ， $\tau_d = \hbar/c_0\bar{\rho}$ である．初期状態はダブルカスケードを発生させるために，

$$\begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r}) \\ \psi_0(\mathbf{r}) \\ \psi_{-1}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \sqrt{\bar{\rho}} e^{i\gamma(\mathbf{r})} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha(\mathbf{r})} \cos^2 \frac{\beta(\mathbf{r})}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta(\mathbf{r}) \\ e^{i\alpha(\mathbf{r})} \sin^2 \frac{\beta(\mathbf{r})}{2} \end{pmatrix} \quad (6.46)$$

$$\mathcal{F}[\alpha](\mathbf{k}) = p_1(R_1 + iR_2) \exp\left[-\{(k\xi_d - 0.3)/0.05\}^2\right] \quad (6.47)$$

$$\mathcal{F}[\beta](\mathbf{k}) = p_2(R_3 + iR_4) \exp\left[-\{(k\xi_d - 0.3)/0.05\}^2\right] \quad (6.48)$$

$$\gamma(\mathbf{r}) = \alpha(\mathbf{r}) \quad (6.49)$$

を用いた．ここで， R_i ($i = 1 \sim 4$) は $[-0.5, 0.5]$ の範囲の値をとる一様乱数である．パラメータ p_1 ， p_2 は， $\langle f_z \rangle_V \sim 0.95$ ， $\max[\alpha] \sim 180$ ， $\min[\alpha] \sim -180$ となるように選んでいる．全体に掛かる位相 γ として，式 (6.49) を採用した理由は，速度場を小さくするためである．強磁性状態の速度場は，

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{M} \left[\nabla \gamma - \cos \beta \nabla \alpha \right] \quad (6.50)$$

6.4 数値計算結果

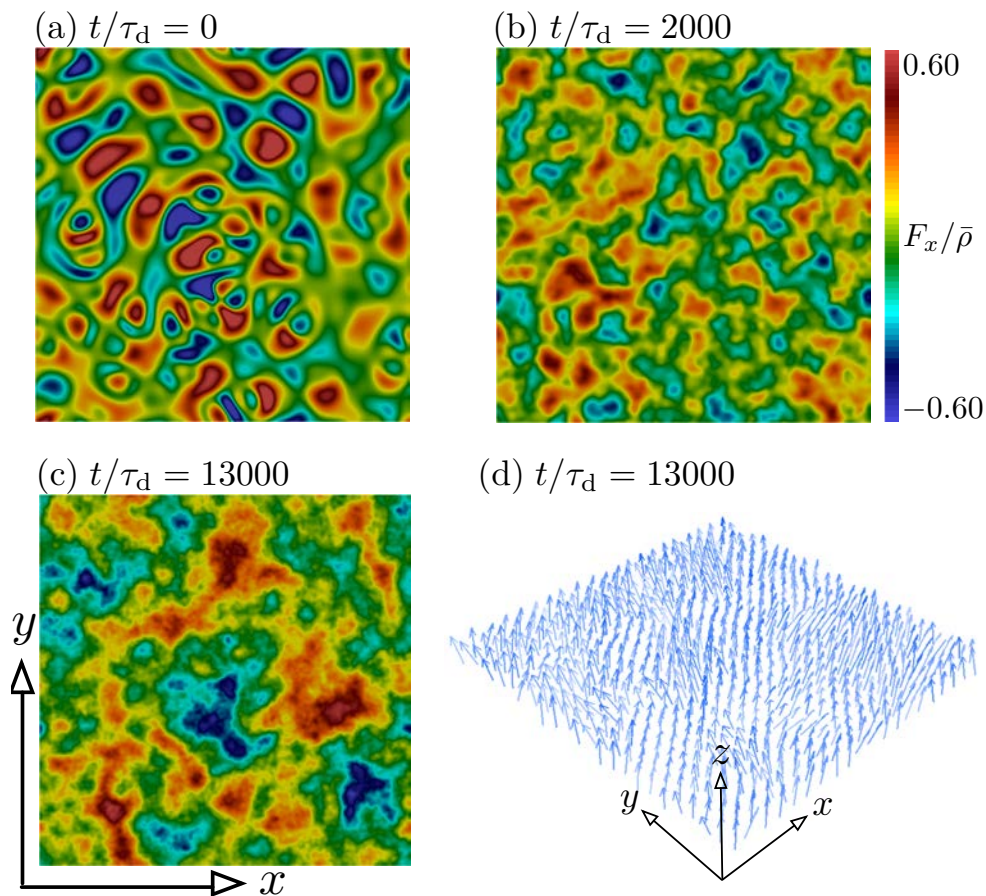


図 6.2: スピン密度ベクトルの空間分布の時間変化．初期状態 (a) では, $k\xi_d \sim 0.3$ に対応する空間変化が現れている．時間発展すると, (b), (c) のように小さな構造と大きな構造が徐々に形成される．これは, ダイレクト・インバースカスケードを反映していると考えられる．(d) は時刻 $t/\tau_d = 13000$ におけるスピン密度ベクトルの空間分布を表しており, スピンが z 軸方向を向きながら揺らいでいることが見てとれる．

で与えられる．もし式 (6.49) としなければ, 速度場の大きさは音速に匹敵する大きな値を持ち, 密度揺らぎと速度場の揺らぎを小さいとした前節の解析が破綻してしまう恐れがある．これらの揺らぎの大きさの評価については, 後ほど示す．

この初期状態の特徴は, 完全な強磁性状態で, かつオイラー角が空間依存している点である．その空間変化はおよそ $k\xi_d \sim 0.3$ 程度に対応する波長を持ち, 図 6.2(a) の初期状態にもその構造が現れている．以下, この状態からの時間発展を擬スペクトルを用いて計算した結果を示す．

図 6.2 は, スピン密度ベクトルの時間発展の様子を示している．初期状態では $k\xi_d \sim 0.3$ に対応する波長の構造が支配的であるが, 時間発展とともにより大きな構造と小さな構造が現れることがみてとれる (図 6.2(b), (c))．これはスピン波間の非線形相互作用により, 異なる波数モード間で相互作用が生じるためである．Bogoliubov 波乱流との決定的な違いは大きな構造の形成である．これは前項で議論したインバースカスケードに対応しており, Bogoliubov 波乱流では見られなかった振る舞いである．図 6.2(d) は, 時刻 $t/\tau_d = 13000$ におけるスピン密度ベクトルの空間分布であり, スピ

6.4 数値計算結果

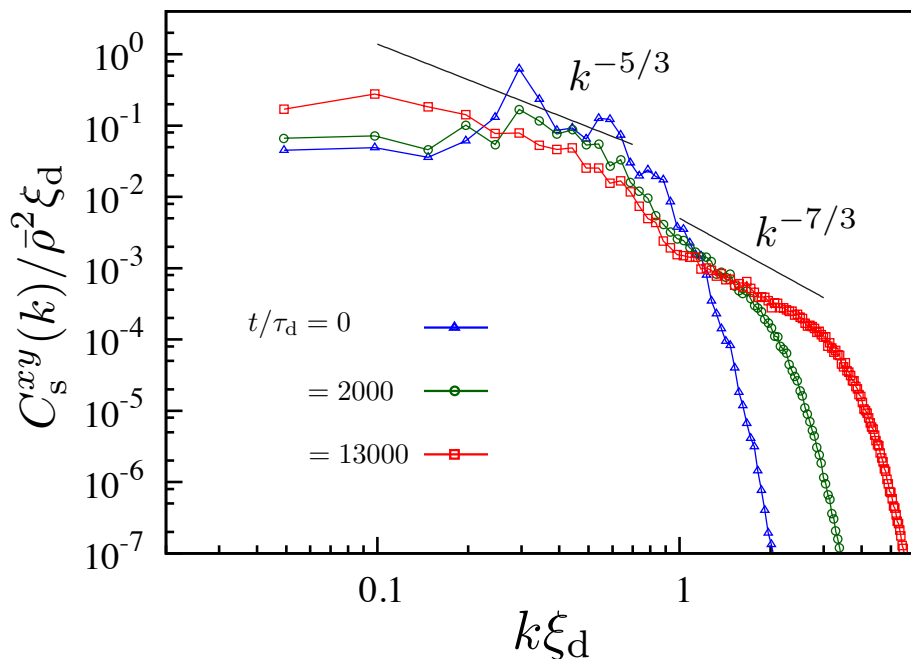


図 6.3: 横方向のスピン相関関数の時間変化．初期は波数 $k\xi_d \sim 0.3$ 近傍に大きな値を持つ．その後，低波数方向と高波数方向にカスケードが起こる．時刻 $t/\tau_d = 13000$ になると，理論的に導出したべき乗則 (6.45) に近い振る舞いを示す．しかし，スケール領域は，そこまで広くない．この相関関数はアンサンブル平均はとっておらず，1つの数値計算から得た結果である．

ンが z 軸方向を向きつつ，微小に揺らいでいる状況を示している．これより定量的ではないが，式 (6.22) で定義されているスピン波の正準変数の大きさ $|a|^2$ が小さいことがわかる．この点に関しては，後ほどより詳細に述べる．

横方向のスピン相関関数 C_s^{xy} の時間変化は図 6.3 に示されている．初期は $k\xi_d \sim 0.3$ 近傍に大きな値を持つ．もちろん，これは図 6.2(a) における F_x の空間構造を反映している．この状態から時間発展すると，時刻 $t/\tau_d = 2000$ のように $k\xi_d \sim 0.3$ 近傍の値が小さくなり，相関関数の低波数成分と高波数成分が大きな値を持つ．これは図 6.2(b), (c) で見られたダブルカスケードに対応している．さらに時間発展して時刻 $t/\tau_d = 13000$ になると，相関関数の低波数成分と高波数成分がより成長して，理論的に導出したべき乗則 (6.45) に近い振る舞いを示すことが確認できる．このように，図 6.1 で示したダブルカスケードの振る舞いを確認できた．

しかし， $-5/3$ 乗則と $-7/3$ 乗則のスケール領域はそれほど広くはなく，それぞれ $0.2 \lesssim k\xi_d \lesssim 0.5$ ， $0.9 \lesssim k\xi_d \lesssim 3$ 程度である．これは「システムサイズが小さいこと」が問題であると考えられる．システムサイズをさらに大きくすることは難しいが，エネルギー注入する波数領域は容易に変えることができる．次項では，この波数領域を調節して，片方のべき乗則のスケール領域を広くすることを試みる．

本項の最後に，数値計算で得たスピン波乱流状態が，べき乗則 (6.45) を導出するときに用いた近似を満たしているかどうかを確認する．用いた近似は，以下の3つである．

6.4 数値計算結果

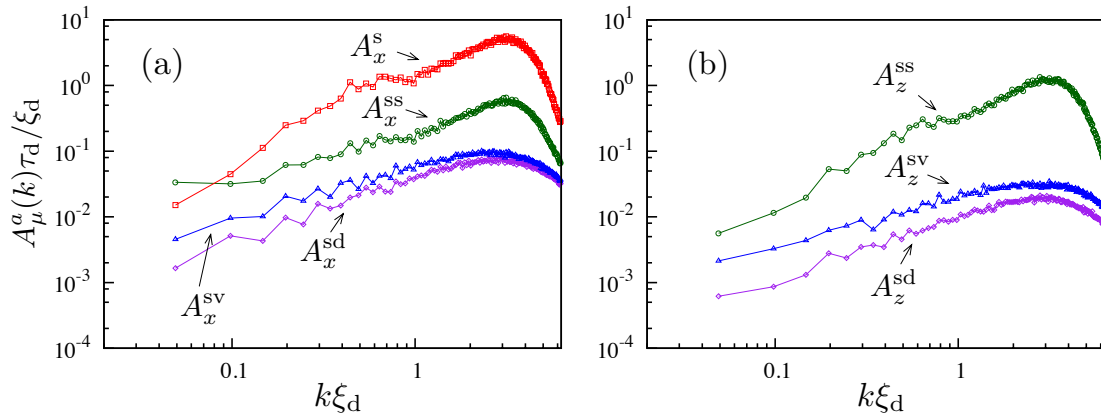


図 6.4: 時刻 $t/\tau_d = 13000$ におけるスピン波乱流における式 (6.51) の各項の大きさの波数依存性．基本的にスピン線形項，スピン非線形項，スピン-速度場相互作用項，スピン-密度相互作用項の順に小さくなる．詳細は本文参照．

近似 (1) : 巨視的波動関数は強磁性状態である．

近似 (2) : 式 (6.10) におけるスピン線形項がスピン非線形項よりも大きい．

近似 (3) : 式 (6.10) におけるスピン非線形項がスピン-密度，スピン-速度場相互作用項よりも大きい．

近似 (1) に関しては $\langle |f| \rangle_V$ を評価すれば良い．なぜなら，強磁性状態では $|f| = 1$ であるため，その体積平均も 1 となるからである．スピン波乱流状態では $\langle |f| \rangle_V \sim 0.98$ 程度であり，近似 (1) は十分に満たされていることを確認した．

近似 (2), (3) の妥当性を評価するために，次式の波数依存性を計算した．

$$A_\mu^a(k) = \frac{1}{\Delta k} \sum_{\mathbf{k}_1 \in \Omega_k} |\mathcal{F}[I_\mu^a](\mathbf{k}_1)| \quad (6.51)$$

ただし， $a = s, ss, sd, sv$ ， $\mu = x, y, z$ である．この量は，式 (6.10) の右辺をフーリエ変換したときに現れる量である．これらの項の大きさを波数依存性まで含めて比較することで，近似 (2), (3) の妥当性を評価することができる．

図 6.4 は，べき乗則が現れている時刻 $t/\tau_d = 13000$ における $A_x^a(k)$ と $A_z^a(k)$ の波数依存性である． $A_y^a(k)$ の振る舞いは基本的に $A_x^a(k)$ と同じであるので，ここでは示していない．この図より，スケールリング領域ではスピン線形項，スピン非線形項，スピン-速度場相互作用項，スピン-密度相互作用項の順に小さくなっていることがわかる．そのため，近似 (2), (3) は概ね満足している．

ただ，スケールリング領域の $A_x^a(k)$ において，スピン非線形項はスピン-速度場相互作用項の数倍程度大きいにすぎない．そのため，この相互作用をどれだけ無視できるかは議論の余地があるかもしれない．しかし，横方向のスピン相関関数の振る舞いが式 (6.45) と良い一致しているため，スピン-速度場相互作用項の効果は無視できうると考えられる．一方，スケールリング領域から外れた低波数 $k\xi_d \lesssim 0.1$ では，スピン線形項とスピン非線形項の大きさが逆転しており，この領域では近似 (2) が

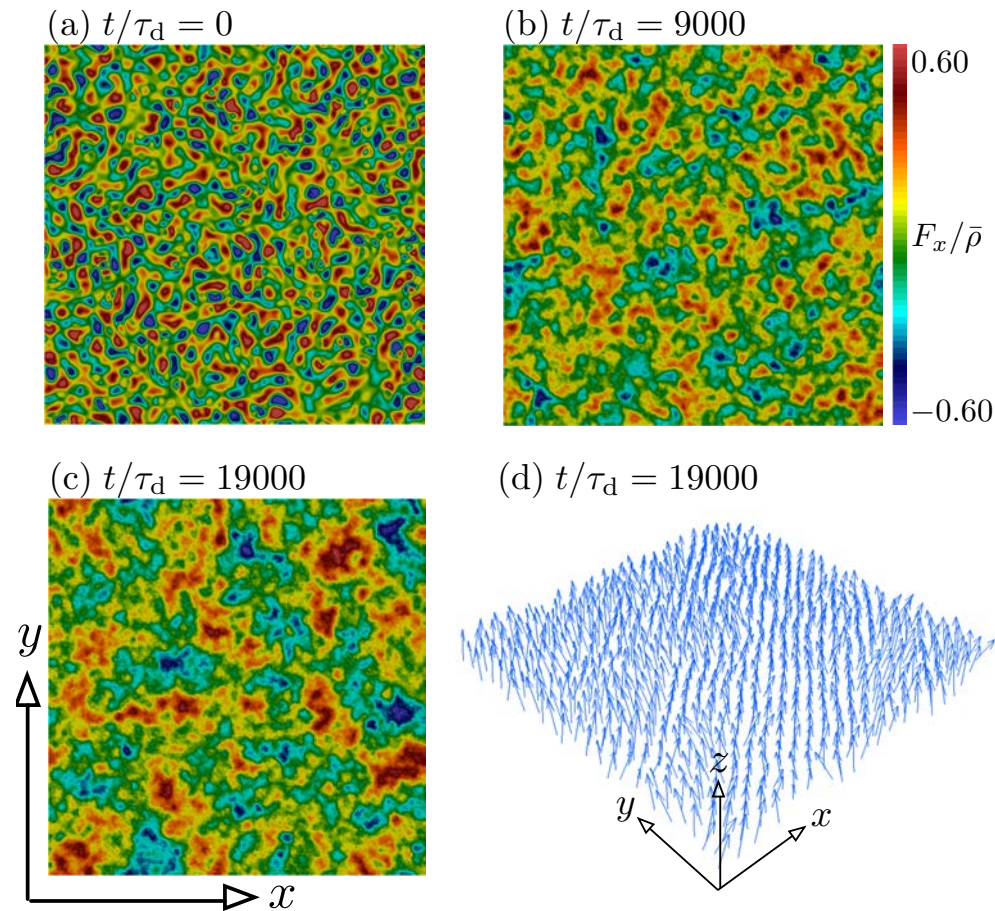


図 6.5: スピン密度ベクトルの空間分布の時間変化．初期状態 (a) では, $k\xi_d \sim 0.4$ に対応する空間変化が現れている．時間発展すると, (b), (c) のように小さな構造と大きな構造が徐々に形成される．これは, ダイレクト・インバースカスケードを反映していると考えられる．(d) は時刻 $t/\tau_d = 19000$ におけるスピン密度ベクトルの空間分布を表しており, ベクトルが z 軸方向を向きながら揺らいでいることが見てとれる．[Reprinted figure with permission from K. Fujimoto *et al.*, *Phys. Rev. A* **93**, 033620 (2016). Copyright (2016) by the American Physical Society.]

破れている．

以上の結果を簡単に要約すると, 解析的に導出したべき乗則 (6.45) とそれに伴うダブルカスケード (図 6.1) をスピン 1 スピノール GP 方程式の数値計算を用いて調べた．その結果, スケーリング領域は広くはないが, 解析計算の結果と矛盾しない振る舞いを数値的に確認することができた．

6.4.2 インバースカスケードにおける $-5/3$ 乗則

前項において, ダブルカスケードの振る舞いとそれに付随するべき乗則を確認したが, そのスケーリング領域は広くない．本項では, 広いスケーリング領域を持つインバースカスケードの $-5/3$ 乗則を確認するために行った数値計算結果を示す．

この目的のため, 今回の数値計算ではシステムサイズを 2 倍大きくした．具体的には, システムサ

6.4 数値計算結果

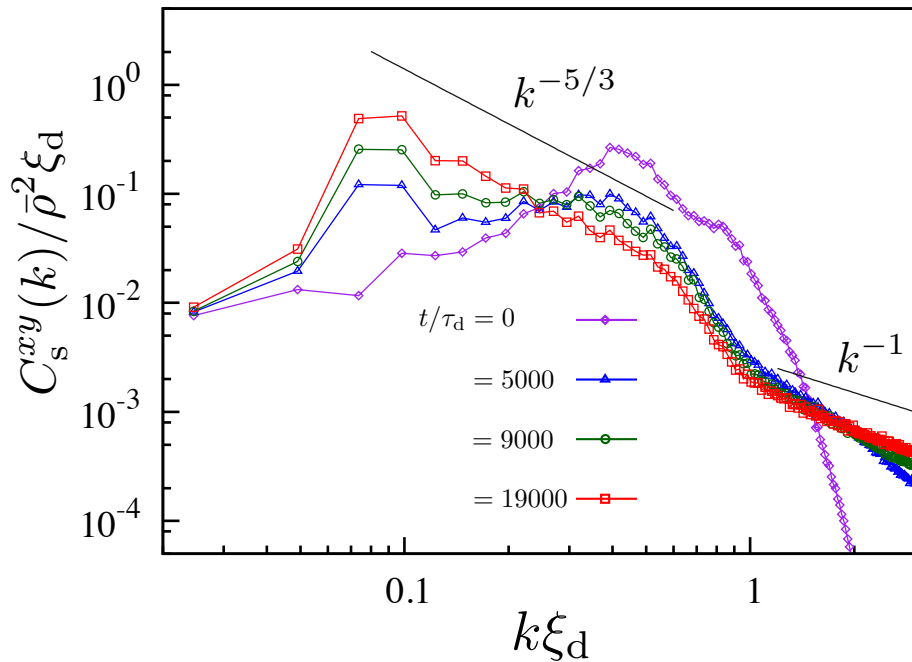


図 6.6: 横方向のスピン相関関数の時間変化．初期は波数 $k\xi_d \sim 0.4$ 近傍に大きな値を持つ．その後，低波数方向と高波数方向にカスケードが起こる．時刻 $t/\tau_d = 19000$ になると，理論的に導出した $-5/3$ 乗則に近い振る舞いを示す．視覚的にはスケーリング領域は $0.07 \lesssim k\xi_d \lesssim 0.6$ であり，およそ一桁ある．この相関関数は初期状態のノイズが異なる 5 つの結果を平均して求めている．[Reprinted figure with permission from K. Fujimoto *et al.*, *Phys. Rev. A* **93**, 033620 (2016). Copyright (2016) by the American Physical Society.]

イズは $256\xi_d \times 256\xi_d$ とし，空間分解能，時間分解能はそれぞれ $dx/\xi_d = 1$ ， $dt/\tau_d = 2 \times 10^{-3}$ とした．システムサイズを広くしたため空間分解能を粗くしたが，時間分解能を細かくすることで数値計算の精度を維持した．実際，この計算では粒子数が約 9 桁程度保存しており，前項の計算と同程度の精度が保たれている．相互作用係数はダブルカスケードの場合と同じである．

初期状態は，より高波数側にエネルギーを注入するために，

$$\mathcal{F}[\alpha](\mathbf{k}) = p_1(R_1 + iR_2)\exp\left[-\{(k\xi_d - 0.4)/0.2\}^2\right] \quad (6.52)$$

$$\mathcal{F}[\beta](\mathbf{k}) = p_2(R_3 + iR_4)\exp\left[-\{(k\xi_d - 0.4)/0.2\}^2\right] \quad (6.53)$$

$$\gamma(\mathbf{r}) = \alpha(\mathbf{r}) \quad (6.54)$$

を Euler 角として用いた．パラメーター p_1, p_2 は，前項と同様に $\langle f_z \rangle_V \sim 0.95$ ， $\max[\alpha] \sim 180$ ， $\min[\alpha] \sim -180$ となるように選んでいる．

スピン密度ベクトルの空間分布は図 6.5 に示されている．本項では，前項と比較して初期状態に

6.4 数値計算結果

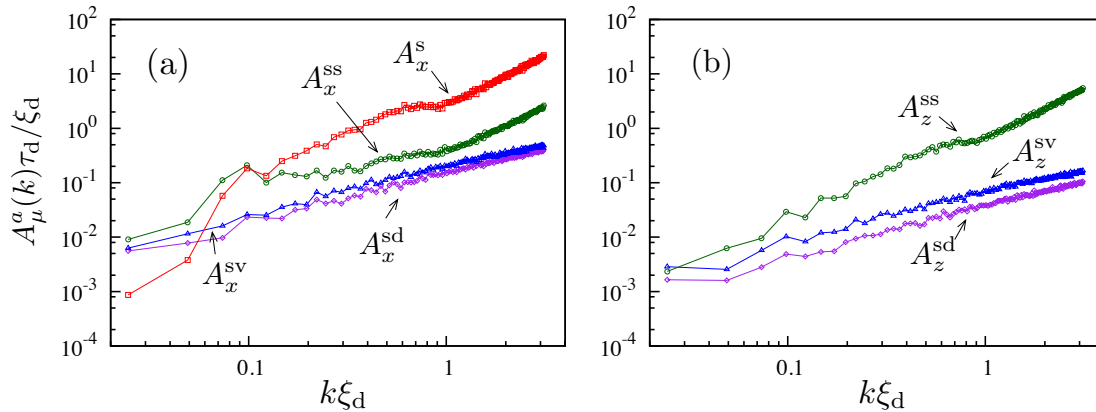


図 6.7: 時刻 $t/\tau_d = 19000$ におけるスピン波乱流における式 (6.51) の各項の大きさの波数依存性． $0.15 \lesssim k\xi_d$ では基本的にスピン線形項，スピン非線形項，スピン-速度場相互作用項，スピン-密度相互作用項の順に小さくなる．詳細は本文参照．[Reprinted figure with permission from K. Fujimoto *et al.*, *Phys. Rev. A* **93**, 033620 (2016). Copyright (2016) by the American Physical Society.]

より高波数側にエネルギー注入を行い，かつシステムサイズを大きくした結果， F_x の空間変化がシステムサイズよりもかなり小さくなっていることが図 6.5(a) から見てとれる．時間発展すると，図 6.5(b) のように徐々に大きな構造が形成され，最終的には図 6.5(c) のようなシステムサイズの $1/4$ 程度の構造が現れる．この振る舞いはもちろんインバースカスケードを反映しており，前項の結果よりもはっきりと大きな構造の形成を確認することができる．図 6.5(d) は時刻 $t/\tau_d = 19000$ におけるスピン密度ベクトルの空間分布を表しており，小さな振幅を持つスピン波が系を支配していることが見てとれる．

図 6.6 が横方向のスピン相関関数 C_s^{xy} の時間発展を示している．基本的な振る舞いは，前項の図 6.3 と似ている．しかし，大きな違いが 2 つある．1 つ目は $-5/3$ 乗則が現れるスケーリング領域の広さである．図より，時刻 $t/\tau_d = 19000$ でのスケーリング領域は，視覚的にはおおよそ $0.07 \lesssim k\xi_d \lesssim 0.6$ 程度で一桁近くある．2 つ目は，高波数領域 ($1 \lesssim k\xi_d$) の振る舞いである．前項の図 6.3 では，空間分解能が細かったため，より高波数までカスケードできた．しかし，本計算ではシステムサイズを広げるために，分解能を粗くしたため， $k\xi_d = \pi$ 以上の高波数側にカスケードできずにエネルギーは高波数側で溜まってしまっている．そのため， $-7/3$ 乗則は崩れ，代わりに -1 乗則に近い振る舞いが現れている．このべき乗則は次の考察からスピン波のエネルギー等分配則に対応していると考えられる．スピン波の励起エネルギーは k^2 に比例するため，エネルギー等分配則を仮定すると，

$$n_{\text{sw}}(k) \propto \epsilon_{\text{sw}}(k) \propto k^{-2} \quad (6.55)$$

となる．スピン波の振幅が小さいとき，これを相関関数 C_s^{xy} の定義に代入すると -1 乗則が得られる．したがって，高波数領域ではスピン波の熱化が起きていると考えられる．

最後に，近似 (1)–(3) の妥当性を確認する計算を行った．近似 (1) に関しては， $\langle |f| \rangle_V \sim 0.98$ 程度であることを数値的に調べ，この近似が満足されているを確認した．一方，近似 (2) と (3) を確認するために，式 (6.51) を計算した．図 6.7 が，べき乗則が現れている時刻 $t/\tau_d = 19000$ における結果

6.4 数値計算結果

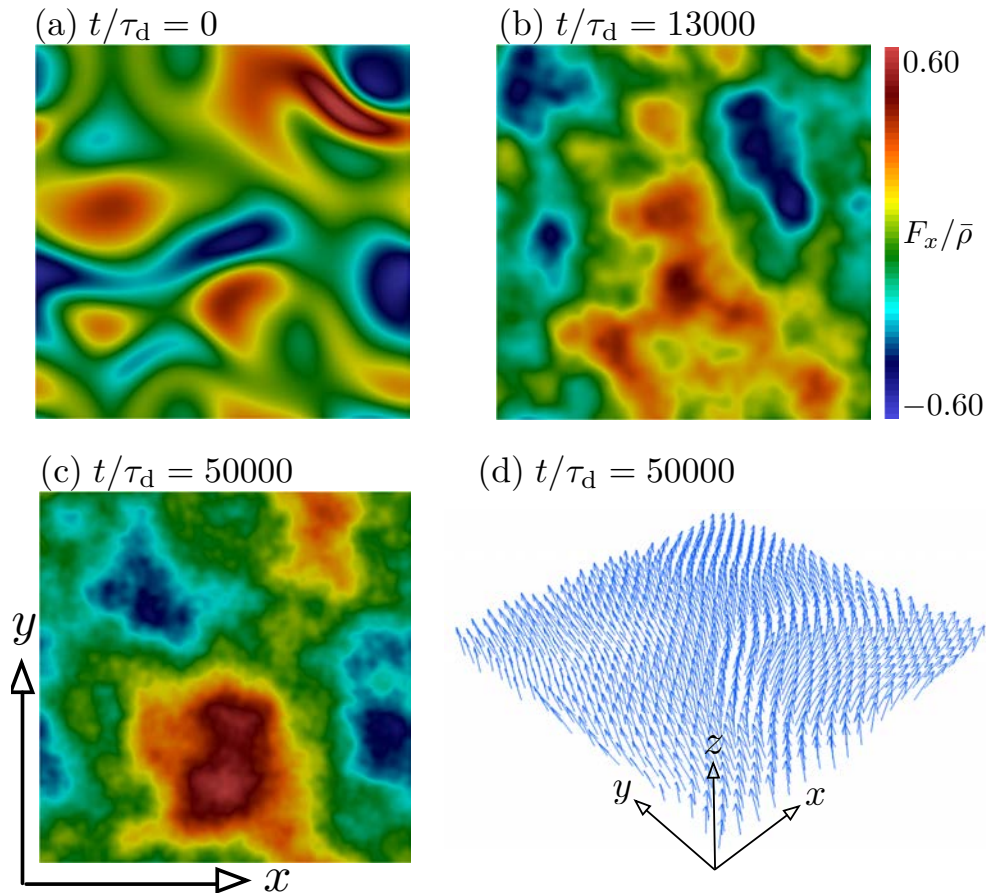


図 6.8: スピン密度ベクトルの空間分布の時間変化．初期状態 (a) では，システムサイズの $1/3$ 程度の空間変化が現れている．時間発展すると，(b)，(c) のように小さな構造が徐々に形成される．これは，ダイレクトカスケードを反映していると考えられる．(d) は時刻 $t/\tau_d = 55000$ におけるスピン密度ベクトルの空間分布を表しており，ベクトルが z 軸方向を向きながら揺らいていることが見てとれる．[Reprinted figure with permission from K. Fujimoto *et al.*, *Phys. Rev. A* **93**, 033620 (2016). Copyright (2016) by the American Physical Society.]

である．この結果より，図 6.6 からスケーリング領域は $0.07 \lesssim k\xi_d \lesssim 0.6$ と見積もったが，その低波数領域 ($k\xi_d \lesssim 0.15$) で近似 (2) が破れていることがわかった．現在のところ，近似 (2) が破れている低波数領域でなぜ $-5/3$ 乗則が現れるのかは理解できていない．またスピン非線形項がスピン-密度，スピン-速度場相互作用項の数倍程度しか大きくないことがわかった．これは前節と同じ振る舞いである．

このように，低波数領域での $-5/3$ 乗則はいくつかの問題を含んでいるが，前節の結果よりもより広範囲にわたって，インバースカスケードに由来する $-5/3$ 乗則を数値的に確認することができた．

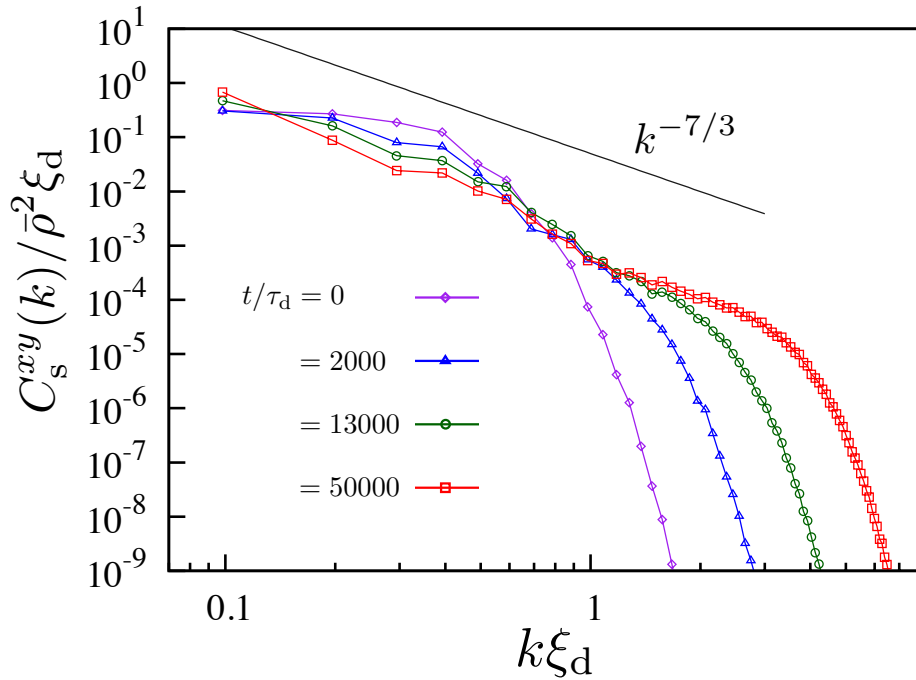


図 6.9: 横方向のスピン相関関数の時間変化．初期は低波数領域へのエネルギー注入に対応して，相関関数は低波数側で大きな値を持つ．時間発展すると高波数方向にカスケードが起こる．時刻 $t/\tau_d = 55000$ になると，理論的に導出した $-7/3$ 乗則に近い振る舞いを示す．スケーリング領域 $1.0 \lesssim k\xi_d \lesssim 3$ は，それほど広くない．この相関関数は初期状態のノイズが異なる 5 つの結果を平均して求めている．[Reprinted figure with permission from K. Fujimoto *et al.*, *Phys. Rev. A* **93**, 033620 (2016). Copyright (2016) by the American Physical Society.]

6.4.3 ダイレクトカスケードにおける $-7/3$ 乗則

本項では，より広いスケーリング領域を持つダイレクトカスケードの $-7/3$ 乗則を確認する数値計算を行った．

この目的のため，システムサイズを小さくして，空間分解能を細かくした．具体的には，システムサイズは $64\xi_d \times 64\xi_d$ とし，空間分解能，時間分解能はそれぞれ $dx/\xi_d = 0.25$ ， $dt/\tau_d = 4 \times 10^{-3}$ とした．この計算では粒子数が約 9 桁程度保存しており，前項の計算と同程度の精度が保たれている．相互作用係数はダブルカスケードの場合と同じである．

初期状態は，低波数側にエネルギーを注入するために，

$$\mathcal{F}[\alpha](\mathbf{k}) = p_1(R_1 + iR_2)\exp\left[-(k\xi_d/0.2)^2\right] \quad (6.56)$$

$$\mathcal{F}[\beta](\mathbf{k}) = p_2(R_3 + iR_4)\exp\left[-(k\xi_d/0.2)^2\right] \quad (6.57)$$

$$\gamma(\mathbf{r}) = \alpha(\mathbf{r}) \quad (6.58)$$

6.4 数値計算結果

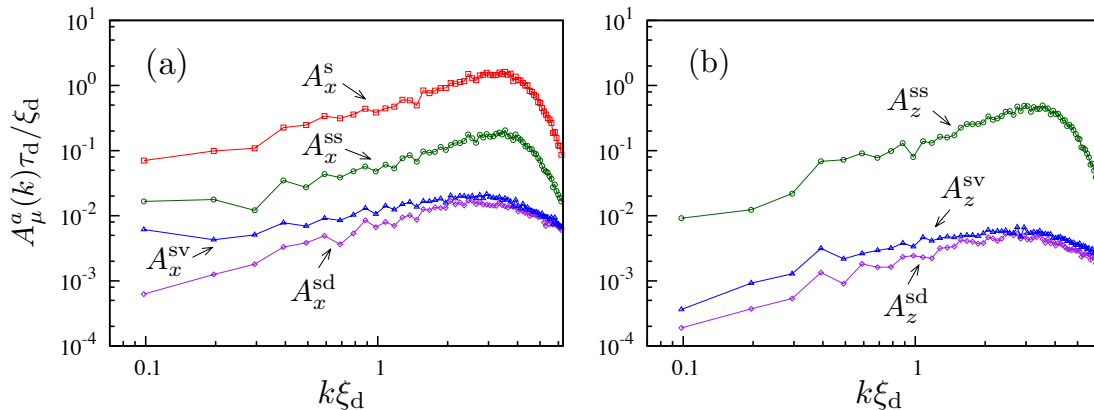


図 6.10: 時刻 $t/\tau_d = 55000$ におけるスピン波乱流における式 (6.51) の各項の大きさの波数依存性．基本的にスピン線形項，スピン非線形項，スピン-速度場相互作用項，スピン-密度相互作用項の順に小さくなる．詳細は本文参照．[Reprinted figure with permission from K. Fujimoto *et al.*, *Phys. Rev. A* **93**, 033620 (2016). Copyright (2016) by the American Physical Society.]

を Euler 角として用いた．パラメーター p_1, p_2 は，同様に $\langle f_z \rangle_V \sim 0.95$, $\max[\alpha] \sim 180$, $\min[\alpha] \sim -180$ となるように選んでいる．

図 6.8 がスピン密度ベクトルの分布の時間変化を表している．前項までの初期状態と異なり，図 6.8(a) よりシステムサイズの $1/3$ 程度の大きさを持つスピン構造がある．この状態から時間発展すると，細かな構造が現れ，図 6.8(c) のような状態が得られる．図 6.8(d) は (c) 対応するスピン密度ベクトルの空間分布を表しており，スピンの z 方向を向きながら揺らいでいることがわかる．ここで，スピン密度ベクトルをプロットする際に，ベクトル間の距離を広くしたため，(d) だけを見ると乱れていないように感じることに注意する必要がある．

横方向のスピン相関関数 C_s^{xy} は，図 6.9 に示されている．初期状態は，低波数領域にエネルギーが注入されていることに対応して， $k\xi_d \lesssim 1$ の領域において相関関数は大きな値を持つ．その後，時間経過とともに高波数成分が成長していき， $1 \lesssim k\xi_d \lesssim 3$ の領域でダイレクトカスケードに伴う $-7/3$ 乗則が現れる．

一方，これより低波数の領域では $-7/3$ 乗則からずれていることがわかる．この原因の詳細は不明であるが，現在の予想としては，Fjørtoft の議論によりスピン波のダイレクトカスケードが起きると，インバースカスケードも同時に生じるためと考えている．そのため， $k\xi_d \lesssim 1$ の領域では，系のサイズで制限される最小波数 $2\pi/L$ よりも低波数側にスピン波がカスケードすることができず，この領域にモードが溜まってしまい，ダイレクトカスケードの $-7/3$ 乗則からのずれが生じていると推察される．

前項と同様に，近似 (1)–(3) の妥当性を調べた．近似 (1) に関しては， $\langle |f| \rangle_V \sim 0.99$ 程度であることを数値計算で確認できたため，この近似は十分に満足されている．一方，近似 (2) と (3) を確認するために，べき乗則が現れている時刻 $t/\tau_d = 55000$ における式 (6.51) を計算した．図 6.10 にその結果を示している．低波数側にエネルギーを注入しているため，全粒子数密度と速度場の揺らぎが抑えられ，前項と比較すると近似 (2)，(3) は前節と同程度かそれ以上で満足されている．

以上より、より広いスケールリング領域を持つダイレクトカスケードの $-7/3$ 乗則を数値的に見出すとしたが、十分に広いスケールリング領域を確保することができなかった。これは Fjørtoft の議論から予測されるようにダイレクトカスケードとインバースカスケードが同時に起きるためだと考えられる。

6.5 まとめと課題

本章では、スピン 1 スピノール BEC におけるスピン波の弱波動乱流を解析、数値的に調べた。基礎方程式は、スピン 1 スピノール GP 方程式であり、粒子間相互作用は強磁性相互作用を仮定した。この状況で、弱波動乱流理論を GP 方程式から導出されるスピン流体方程式に適用した結果、スピン波の波数分布にダイレクトカスケードとインバースカスケードに伴うべき乗則を導出した。この結果は、固体物性で研究されたスピン波乱流の結果 [145] と等価であり、このべき乗則そのものは既出であるが、GP 方程式からの導出は本研究が初めてである。本章では、このべき乗則から実験観測量である横方向のスピン相関関数にダイレクトカスケードとインバースカスケードに付随する $-7/3$ と $-5/3$ 乗則が現れることを示し、それに対応する数値計算を行った。

数値計算ではダイレクト・インバースカスケードによるダブルカスケードの振る舞いとそれに伴う $-7/3$ と $-5/3$ 乗則を確認した。しかし、得られたスケールリング領域は広くはなかった。そのため、エネルギー注入する波数領域を調節することで、 $-7/3$ 、 $-5/3$ 乗則の片方のスケールリング領域を広げる数値計算を行った。その結果、インバースカスケードの $-5/3$ 乗則は 1 桁程度のスケールリング領域を得たが、ダイレクトカスケードの $-7/3$ 乗則はあまり広いスケールリング領域を得ることができなかった。

今後の課題としては、「スピン波と密度波が共存した弱波動乱流の理論計算」が挙げられる。本研究では、スピン波のみが支配的な弱波動乱流を取り扱ったが、一般にはスピン波と密度波が共存する状況をつくることができる。このような複数の波動が混在した乱流は、興味深い研究テーマとなるかもしれない。また、実際の実験でスピン波乱流を研究する上でもこの問題は重要である。なぜなら、どれだけスピン波と密度波の相互作用を実験で弱くできるかが不明だからである。そのため、スピン波と密度波が共存した弱波動乱流を研究することは実験との比較を行う上で重要な意味を持つてくる。

6.6 付録

付録：Fjørtoft の議論

Fjørtoft の議論 [95, 96, 146] を説明する。スピン波乱流では、次の 2 つの量が保存する。

$$\begin{aligned} E_{sw} &= \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{sw}(\mathbf{k}) \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{sw}(\mathbf{k}) n_{sw}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

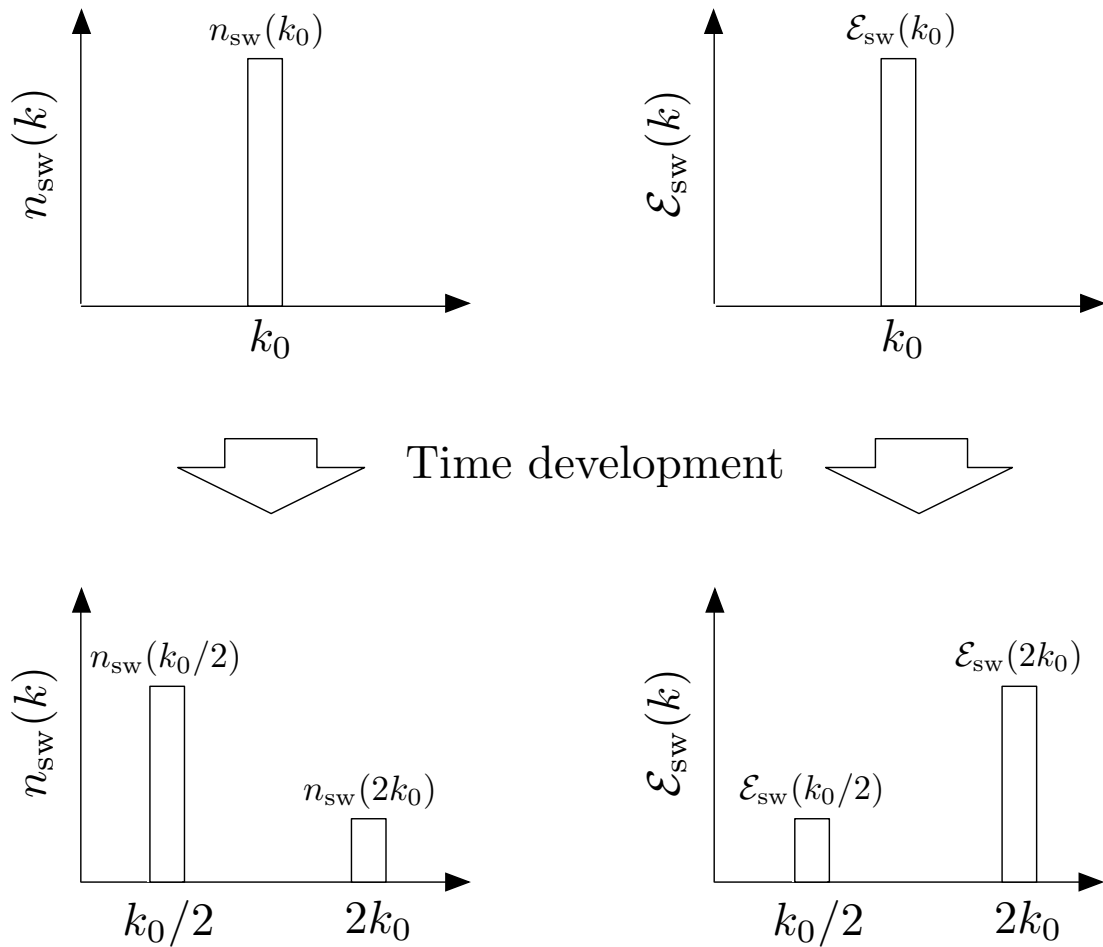


図 6.11: Fjørtoft の議論. 2つの保存量の存在により, 波動ダイナミクスが制限されて, ダイレクトカスケードとインバースカスケードが起きる. [Reprinted figure with permission from K. Fujimoto *et al.*, *Phys. Rev. A* **93**, 033620 (2016). Copyright (2016) by the American Physical Society.]

$$N_{sw} = \sum_k n_{sw}(k) \quad (\text{A2})$$

これらはそれぞれスピン波のエネルギーと粒子数 (作用) である.

ここで, 図 6.11 のように, 初期状態において波数 k_0 のスピン波のみを励起した状態を考える. この状態から時間発展して, スピン波が 2 つの波数 $k_0/2$ と $2k_0$ に分配されたと仮定する. このとき, 式 (A1), (A2) はそれぞれ保存するので,

$$\mathcal{E}_{sw}(k_0) = \mathcal{E}_{sw}(k_0/2) + \mathcal{E}_{sw}(2k_0) \quad (\text{A3})$$

$$n_{sw}(k_0) = n_{sw}(k_0/2) + n_{sw}(2k_0) \quad (\text{A4})$$

が成り立つ. これは未知数 $n_{sw}(k_0/2)$ と $n_{sw}(2k_0)$ の連立方程式なので, 解くことができる. その

結果,

$$n_{\text{sw}}(k_0/2) = \frac{2}{5}n_{\text{sw}}(k_0) \quad (\text{A5})$$

$$n_{\text{sw}}(2k_0) = \frac{1}{5}n_{\text{sw}}(k_0) \quad (\text{A6})$$

$$\mathcal{E}_{\text{sw}}(k_0/2) = \frac{1}{5}\mathcal{E}_{\text{sw}}(k_0) \quad (\text{A7})$$

$$\mathcal{E}_{\text{sw}}(2k_0) = \frac{4}{5}\mathcal{E}_{\text{sw}}(k_0) \quad (\text{A8})$$

が得られる,これは明らかに,スピン波のエネルギーは低波数から高波数に流れ,一方スピン波の粒子数は高波数から低波数に流れていることを示している.これは,2つの保存則がスピン波のダイナミクスに制限を与えるために起きている.そのため,第5章で扱った Bogoliubov 波乱流では,波動の粒子数が保存しないため,このようなダイナミクスは現れない.これを Fjørtoft の議論と呼ぶ.

第7章 結論と今後の展望

7.1 各章のまとめと結論

本論文では、冷却原子気体 BEC に新奇な乱流現象を開拓することを目的として、従来の量子乱流研究が行われてきた 1 成分 BEC だけではなく多成分 BEC も舞台として、「強い乱流」と「弱い乱流」の研究を行った。

第 3, 4 章では、多成分 BEC の 1 つであるスピノール BEC における「強い乱流」の研究結果を述べた。この乱流は、スピン渦やスピンドメインなどのスピンの強く捩じれるような構造が多数形成された乱流である。第 3 章では、強磁性相互作用するスピン 1 スピノール BEC における乱流をスピン 1 スピノール GP 方程式を用いて解析・数値的に調べた。この乱流では、スピン密度ベクトルが非常に乱れた状態 (スピン乱流) が実現するため、初めにスピン密度ベクトルの相関関数に注目した。この研究では Kolmogorov 型の次元解析的スケールリングを行うことで $-7/3$ 乗則を導出し、数値計算においてこのべき乗則を確認した。次に、スピン乱流における速度場の相関関数に注目した。この量には、古典乱流や従来の量子乱流と同じ $-5/3$ 乗則を見出した。しかし、この系で $-5/3$ 乗則が生まれる機構は、従来の系とは根本的に異なっており、スピンの振る舞いが決定的に重要であることを明らかにした。

第 4 章では、微小スピン振幅を持つスピノール BEC における「強い乱流」の性質について議論した。このようなスピン乱流は、反強磁性相互作用するスピノール BEC、もしくは磁場を印加した強磁性スピノール BEC において実現する。このとき、スピン相関関数に強磁性スピン乱流とは異なるべき乗則が現れることを明らかにした。具体的には、Kolmogorov 型の次元解析的スケールリングにより、低波数領域で -1 乗則、高波数領域で $-7/3$ 乗則を導出した。数値計算では、磁場を印加した強磁性スピノール BEC と反強磁性相互作用するスピノール BEC で計算を行い、前者の計算でこの 2 つのべき乗則の共存をはっきりと確認することができた。後者の計算では、 -1 乗則からのずれが大きかった。

第 5, 6 章では、冷却原子気体 BEC における「弱い乱流」の研究について述べた。この乱流は、渦やソリトンなどの非線形項が支配的な構造は存在せず、波動が弱く相互作用する乱流、つまり弱波動乱流である。第 5 章では、1 成分 BEC における弱波動乱流の研究結果を示した。この乱流では Bogoliubov 波が支配的になるため、本論文では Bogoliubov 波乱流と呼んでいる。この研究では、1 成分 GP 方程式に対して弱波動乱流理論を適用して、Bogoliubov 波の波数分布、波動関数の相関関数、密度分布の相関関数におけるべき乗則を解析的に導出して、数値計算でも確認した。現在の冷却原子気体 BEC では、乱流のカスケード現象に付随するべき乗則を実験的にまだ観測できていない

が、この Bogoliubov 波乱流の密度分布に注目すれば、初めてこのべき乗則を観測できる可能性があることを議論した。

第6章では、強磁性スピノール BEC における弱波動乱流、つまりスピン波乱流の研究について述べた。この研究では、第3, 4章と同じスピン1スピノール GP 方程式を用いて解析、数値的に調べた。その結果、この弱波動乱流では、ダイレクトカスケードとインバースカスケードによるダブルカスケードが起きることがわかった。このカスケードに対応するべき乗則は、横方向のスピン相関関数に $-7/3$ 乗則と $-5/3$ 乗則として現れること示し、数値計算でもこれと無矛盾な結果を得た。

このように、本論文の第3, 4, 6章では多成分 BEC における乱流を舞台として、非平衡状態のスピン振る舞いにも乱流に特有のカスケード現象に付随するべき乗則が現れることを明らかにした。これは、従来の量子乱流研究では取り扱われなかった問題であり、冷却原子気体 BEC の乱流研究に対して新しい方向性を与える可能性がある。また、第4章では1成分 BEC における弱波動乱流に注目して、実験でいまだ観測されていないカスケード現象に伴うべき乗則の観測可能性について密度分布に焦点をあてて議論した。これが観測できれば、冷却原子気体 BEC の乱流研究の大きな一歩になると考えられる。その意味で、この1成分 BEC における弱波動乱流研究は重要である。

7.2 今後の展望

冷却原子気体 BEC の乱流研究は、ここ数年で理論、実験研究を行うグループが急増している。理論研究の大多数は、1成分 BEC を対象としており、速度場の相関関数や量子渦の分布などが精力的に調べられている。これらの研究の特徴は、古典乱流とのアナロジーに重点がおかれている点にある。

それに対して、本論文で研究した多成分 BEC であるスピノール BEC の乱流は、従来の量子乱流研究とは一線を画す。この系では速度場のみならず従来の乱流研究では現れなかったスピン場も乱れて、そこに乱流的なカスケード現象とともにべき乗則が現れることを見出した。このような多成分量子流体の乱流は、超流動ヘリウム3では研究が行われていないため、冷却原子気体 BEC の乱流研究に新しい方向性を与える。

本論文の研究はこのスピン乱流中のスピンと速度場の相関関数に注目して、べき乗則を見出したが、そのべき乗則を生み出す構造についてはほとんど触れられていない。スピノール BEC の対称性は多彩であるため、粒子間相互作用や外部磁場などに依存して、位相欠陥としては半整数量子渦、 \mathbb{Z}_2 渦 (ポーラーコア渦)、スピンドメイン、モノポールが、特徴的な構造としては Mermin-Ho 渦などが現れる。このような構造のダイナミクスを調べ、乱流との関係を明らかにしていくことが今後の課題となりうる。多成分 BEC では、このように1成分 BEC にない多彩な位相欠陥が存在し、乱流だけでなく位相欠陥そのもののダイナミクス自体が興味深い研究テーマとなりうる。

一方、波動乱流研究の展望としては、波動 (素励起) の非平衡ダイナミクス研究が挙げられる。冷却原子気体では、密度波、スピン波以外にも、ダイポール BEC ではロトン、ドメイン壁では表面波などが現れる。このような波動は、線形解析のレベルでは従来の超流動ヘリウム、固体物性でも研究されてきたが、その非平衡ダイナミクスはあまり研究されてこなかった。冷却原子気体は、不純物がほとんどないクリーンな系であり、さらには量子効果と非平衡ダイナミクスの関係にも迫ることができるため、冷却原子気体における素励起ダイナミクスは非平衡現象の理解に重要な役割を果たす可能性があり、この方向性の研究は新奇な物理現象を発見できるかもしれない。

参考文献

- [1] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).
- [2] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [3] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
- [4] L. E. Sadler, J. M. Higbie, S. R. Leslie, M. Vengalattore, and D. M. Stamper-Kurn, *Nature* **443**, 312 (2006).
- [5] C. N. Weiler, T. W. Neely, D. R. Scherer, A. S. Bradley, M. J. Davis, and B. P. Anderson, *Nature* **455**, 948 (2008).
- [6] G. Lamporesi, S. Donadello, S. Serafini, F. Dalfovo and G. Ferrari, *Nature Phys.* **9**, 656 (2013).
- [7] N. Navon, A. L. Gaunt, R. P. Smith and Z. Hadzibabic, *Science* **347**, 167 (2015).
- [8] A. Polkovnikov, K. Sengupta, A. Silva, and M. Vengalattore, *Rev. Mod. Phys.* **83** 863 (2011).
- [9] J. Guzman, I. G.-B. Jo, A. N. Wenz, K. W. Murch, C. K. Thomas, and D. M. Stamper-Kurn, *Phys. Rev. A* **84**, 063625 (2011).
- [10] M. Gring, M. Kuhnert, T. Langen, T. Kitagawa, B. Rauer, M. Schreitl, I. Mazets, D. Adu Smith, E. Demler, J. Schmiedmayer, *science* **337**, 1318 (2012).
- [11] C. Hamner, J. J. Chang, P. Engels, and M. A. Hoefer, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 065302 (2011).
- [12] M. A. Hoefer, J. J. Chang, C. Hamner, and P. Engels, *Phys. Rev. A* **84**, 041605 (2011).
- [13] E. A. L. Henn, J. A. Seman, G. Roati, K. M. F. Magalhães, and V. S. Bagnato, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 045301 (2009).
- [14] T. W. Neely, A. S. Bradley, E. C. Samson, S. J. Rooney, E. M. Wright, K. J. H. Law, R. Carretero-González, P. G. Kevrekidis, M. J. Davis, and B. P. Anderson, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 235301 (2013).
- [15] W. J. Kwon, G. M., J. Choi, S. W. Seo, and Y. Shin, *Phys. Rev. A* **90**, 063627 (2014).
- [16] U. Frisch, *Turbulence* (Cambridge University Press, 1995).

参考文献

- [17] P. A. Davidson, *Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers* (Oxford University Press, Oxford, 2004).
- [18] 後藤俊幸, 「乱流理論の基礎」(朝倉書店, 1998).
- [19] 木田重雄, 柳瀬眞一郎, 「乱流力学」(朝倉書店, 1999).
- [20] J. T. Tough, in *Progress in Low Temperature Physics*, edited by D. F. Brewer (North-Holland, Amsterdam, 1982), Vol. VIII, Chap. 3.
- [21] *Progress in Low Temperature Physics*, edited by W. P. Halperin and M. Tsubota (Elsevier, Amsterdam, 2008), Vol. XVI.
- [22] W. F. Vinen, *J. Low Temp. Phys.* **161**, 419 (2010).
- [23] L. Skrbek and K. R. Sreenivasan, *Phys. Fluids* **24**, 011301 (2012).
- [24] 坪田誠, 西森拓, 量子渦のダイナミクス/砂丘と風紋の動力学 (培風館, 東京, 2008).
- [25] W. F. Vinen, *Proc. Roy. Soc.* **A240** 114 (1957).
- [26] W. F. Vinen, *Proc. Roy. Soc.* **A240** 128 (1957).
- [27] W. F. Vinen, *Proc. Roy. Soc.* **A242** 493 (1957).
- [28] W. F. Vinen, *Proc. Roy. Soc.* **A243** 400 (1958).
- [29] R. P. Feynman, "T5. APPLICATION OF QUANTUM MECHANICS TO LIQUID HELIUM." Helium 4: The Commonwealth and International Library: Selected Readings in Physics, 268 (2013).
- [30] K. W. Schwarz, *Phys. Rev. B* **38**, 2398 (1988).
- [31] 山田一雄, 大見哲巨, 超流動 (培風館, 東京, 1995).
- [32] A. Marakov, J. Gao, W. Guo, S. W. Van Sciver, G. G. Ihas, D. N. McKinsey, and W. F. Vinen, *Phys. Rev. B* **91**, 094503 (2015).
- [33] T.-L. Horng, C.-H. Hsueh, S.-W. Su, Y.-M. Kao, and S.-C. Gou, *Phys. Rev. A* **80**, 023618 (2009).
- [34] R. Numasato, M. Tsubota, and V. S. L'vov, *Phys. Rev. A* **81**, 063630 (2010).
- [35] M. T. Reeves, T. P. Billam, B. P. Anderson, and A. S. Bradley, *Phys. Rev. Lett.* **110** 104501 (2013).
- [36] T. P. Billam, M. T. Reeves, B. P. Anderson, and A. S. Bradley, *Phys. Rev. Lett.* **112** 145301 (2014).
- [37] B. Nowak, D. Sexty, and T. Gasenzer, *Phys. Rev. B* **84**, 020506(R) (2011).

-
- [38] B. Nowak, J. Schole, D. Sexty, and T. Gasenzer, Phys. Rev. A **85**, 043627 (2012).
- [39] J. Schole, B. Nowak, and T. Gasenzer, Phys. Rev. A **86**, 013624 (2012).
- [40] A. C. White, C. F. Barenghi, N. P. Proukakis, A. J. Youd, and D. H. Wacks, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 075301 (2010).
- [41] A. S. Bradley and B. P. Anderson, Phys. Rev. X **2**, 041001 (2012).
- [42] A. C. White, C. F. Barenghi, and N. P. Proukakis, Phys. Rev. A **86**, 013635 (2012).
- [43] T. Simula, M. J. Davis, and K. Helmerson, Phys. Rev. Lett. **113**, 165302 (2014).
- [44] G. W. Stagg, A. J. Allen, N. G. Parker, and C. F. Barenghi, Phys. Rev. A **91**, 013612 (2015).
- [45] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein condensation in dilute gases*, 2nd edition (Cambridge University Press, 2008).
- [46] K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, Int. J. Mod. Phys. B **19**, 1835 (2005).
- [47] M. Ueda, *Fundamentals and New Frontiers of Bose-Einstein Condensation* (World Scientific, Singapore, 2010).
- [48] Y. Kawaguchi and M. Ueda, Phys. Rep. **520**, 253 (2013).
- [49] D. M. Stamper-Kurn and M. Ueda, Rev. Mod. Phys. **85**, 1191 (2013).
- [50] D. Vollhardt and P. Wölfle, *The Superfluid Phases of Helium 3* (Taylor & Francis, London, 1990).
- [51] Y. Eto, M. Kunimi, H. Tokita, H. Saito, and T. Hirano Phys. Rev. B **92**, 013611 (2015).
- [52] Y. Eto, M. Takahashi, K. Nabeta, R. Okada, M. Kunimi, H. Saito, and T. Hirano, arXiv:1511.01624.
- [53] Y. Eto, M. Takahashi, M. Kunimi, H. Saito, and T. Hirano, arXiv:1512.01331.
- [54] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard, Phys. Rev. Lett. **84**, 806 (2000).
- [55] T. W. Neely, E. C. Samson, A. S. Bradley, M. J. Davis, and B. P. Anderson, Phys. Rev. Lett. **104**, 160401 (2010).
- [56] M. Vengalattore, S. R. Leslie, J. Guzman, and D. M. Stamper-Kurn, Phys. Rev. Lett. **100**, 170403 (2008).
- [57] É Falcon, C. Laroche, and S. Fauve, Phys. Rev. Lett. **98**, 094503 (2007).
- [58] E. Falcon, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B **13**, 819 (2010).
- [59] F. Boyer and E. Falcon, Phys. Rev. Lett. **101**, 244502 (2008).

- [60] G. Düring, C. Josserand, and S. Rica, Phys. Rev. Lett. **97**, 025503 (2006).
- [61] J. Laurie, U. Bortolozzo, S. Nazarenko and S. Residori, Phys. Rep. **514**, 121 (2012).
- [62] L. Pitaevskii and S. Stringari, Bose-Einstein Condensation (Oxford University Press, Oxford 2003).
- [63] S. Inouye, S. Gupta, T. Rosenband, A. P. Chikkatur, A. Görlitz, T. L. Gustavson, A. E. Leanhardt, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **87**, 080402 (2001).
- [64] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin. Phys. Rev. Lett. **92**, 040403 (2004).
- [65] J. Stenger, S. Inouye, D. M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, A. P. Chikkatur, and W. Ketterle, Nature **396**, 345 (1998).
- [66] A. Griesmaier, J. Werner, S. Hensler, J. Stuhler, and T. Pfau, Phys. Rev. Lett. **94**, 160401 (2005).
- [67] L. Santos and T. Pfau, Phys. Rev. Lett. **96**, 190404 (2006).
- [68] A. Einstein, Sitzber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss., 3 (1925).
- [69] O. Penrose and L. Onsager, Phys. Rev., 104, 576 (1956).
- [70] 田崎晴明, 統計力学 I (培風館, 新物理学シリーズ 37, 2008).
- [71] 田崎晴明, 統計力学 II (培風館, 新物理学シリーズ 38, 2008).
- [72] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, I. E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (Dover Publications, Dover Books on Physics, 1975) .
- [73] A. L. Fetter, J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (Dover Publications, Dover Books on Physics, 2003).
- [74] E. P. Gross, J. Math. Phys. **4**, 195 (1963).
- [75] L. P. Pitaevskii, Sov. Phys.-JETP **13**, 451 (1961).
- [76] Y. Kawaguchi and T. Ohmi, Phys. Rev. A **70**, 043610 (2004).
- [77] M. Möttönen, T. Mizushima, T. Isoshima, M. M. Salomaa, and K. Machida, Phys. Rev. A **68**, 023611 (2003).
- [78] L. Onsager, Nuovo Cimento **6**, Suppl. 2, 249 (1949).
- [79] 巽友正, 流体力学 (培風館, 新物理学シリーズ 21, 1995).
- [80] 今井功, 流体力学 (前編) (裳華房, 物理学選書 (14), 1973).
- [81] T. Frisch, Y. Pomeau, and S. Rica, Phys. Rev. Lett. **69**, 1644 (1992).

参考文献

- [82] B. P. Anderson, P. C. Haljan, C. A. Regal, D. L. Feder, L. A. Collins, C. W. Clark, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **86**, 2926 (2001).
- [83] T. W. Neely, E. C. Samson, A. S. Bradley, M. J. Davis, and B. P. Anderson, Phys. Rev. Lett. **104**, 160401 (2010).
- [84] K. Sasaki, N. Suzuki, and H. Saito, Phys. Rev. Lett. **104**, 150404 (2010).
- [85] T. Ohmi and K. Machida, J. Phys. Soc. Jpn. **67**, 1822 (1998).
- [86] T.-L. Ho, Phys. Rev. Lett. **81**, 742 (1998).
- [87] T. Isoshima, K. Machida, and T. Ohmi, J. Phys. Soc. Jpn. **70**, 1604 (2001).
- [88] M. Takahashi, V. Pietilä, M. Möttönen, T. Mizushima, and K. Machida, Phys. Rev. A **79**, 023618 (2009).
- [89] A. Lamacraft, Phys. Rev. A **77**, 063622 (2008).
- [90] R. Barnett, D. Podolsky, and G. Refael, Phys. Rev. B **80**, 024420 (2009).
- [91] K. Kudo and Y. Kawaguchi, Phys. Rev. A **82**, 053614 (2010); **84**, 043607 (2011).
- [92] E. Yukawa and M. Ueda, Phys. Rev. A **86**, 063614 (2012).
- [93] パリティ 2002年10月号 p.19 (丸善)
- [94] A. N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **30**, 9 (1941); **32**, 19 (1941); Proc. R. Soc. Ser. A **434**, 9 (1991); **434**, 15 (1991).
- [95] V. E. Zakharov, V. S. L'vov, and G. Falkovich, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I: Wave Turbulence* (Springer, Berlin, 1992).
- [96] S. Nazarenko, *Wave Turbulence*, Lecture Notes in Physics Vol. 825 (Springer, Heidelberg, 2011).
- [97] E. Kozik and B. Svistunov, Phys. Rev. Lett. **92**, 035301 (2004).
- [98] V. S. L'vov and S. Nazarenko, J. Low. Temp. Phys. Lett. **91**, 428 (2008).
- [99] C. Nore, M. Abid, M.E. Brachet, Phys. Rev. Lett. **78**, 3896 (1997).
- [100] N. G. Parker and C. S. Adams, Phys. Rev. Lett. **95**, 145301 (2005).
- [101] M. Kobayashi and M. Tsubota, Phys. Rev. A **76**, 045603 (2007).
- [102] M. Caracanhas, A. L. Fetter, G. Baym, S. R. Muniz, V. S. Bagnato, J. Low Temp. Phys. **170**, 133 (2013).
- [103] R. Tsuchitani and M. Tsubota, J. Low Temp. Phys. **174**, 223 (2014).

参考文献

-
- [104] K. J. Thompson, G. G. Bagnato, G. D. Telles, M. A. Caracanhas, F. E. A. d. Santos and V. S. Bagnato, *Laser Phys. Lett.* **11**, 015501 (2014).
- [105] N. Navon, A. L. Gaunt, R. P. Smith, and Z. Hadzibabic, S6.3, 24th Annual International Laser Physics Workshop, Shanghai, China, August 21-25 2015.
- [106] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability* (Clarendon Press, Oxford, 1961).
- [107] K. Sasaki, N. Suzuki, D. Akamatsu, and H. Saito, *Phys. Rev. A* **80**, 063611 (2009).
- [108] H. Takeuchi, N. Suzuki, K. Kasamatsu, H. Saito, and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **81**, 094517 (2010).
- [109] A. Bezett, V. Bychkov, E. Lundh, D. Kobayakov, and M. Marklund, *Phys. Rev. A* **82**, 043608 (2010).
- [110] S. Ishino, M. Tsubota, and H. Takeuchi, *Phys. Rev. A* **83**, 063602 (2011).
- [111] N. Berloff and C. Yin, *J. Low Temp. Phys.* **145**, 187 (2006).
- [112] H. Takeuchi, S. Ishino, M. Tsubota, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 205301 (2010).
- [113] M. Karl, B. Nowak, and T. Gasenzer, *Phys. Rev. A* **88**, 063615 (2013); *Sci. Rep.* **3**, 2394 (2013).
- [114] D. Kobayakov, A. Bezett, E. Lundh, M. Marklund, and V. Bychkov, *Phys. Rev. A* **89**, 013631 (2014).
- [115] B. Villaseñor, R. Zamora-Zamora, D. Bernal, and V. Romero-Rochín, *Phys. Rev. A* **89**, 033611 (2014).
- [116] K. Fujimoto and M. Tsubota, *Phys. Rev. A* **85**, 033642 (2012).
- [117] K. Fujimoto and M. Tsubota, *Phys. Rev. A* **85**, 053641 (2012).
- [118] K. Fujimoto and M. Tsubota, *Phys. Rev. A* **90**, 013629 (2014).
- [119] M. Ottaviani and J. Krommes, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2923 (1992).
- [120] T. Watanabe, H. Fujisaka, and T. Iwayama, *Phys. Rev. E*, **55**, 5575 (1997).
- [121] 石岡圭一, *スペクトル法による数値計算入門* (東京大学出版会, 2004).
- [122] Y. Kawaguchi, H. Saito, K. Kudo, and M. Ueda, *Phys. Rev. A* **82**, 043627 (2010).
- [123] A. Griffin, T. Nikuni, and E. Zaremba, *Bose-Condensed Gases at Finite Temperatures* (Cambridge University Press, 2009).

- [124] P. B. Blakie, A. S. Bradley, M. J. Davis, R. J. Ballagh, C.W. Gardiner, *Adv. in Phys.* **57**, 363 (2008).
- [125] S. W. Seo, W. J. Kwon, S. Kang, Y. Shin, arXiv:1512.07696.
- [126] A. Vinit, E. M. Bookjans, C. A. R. Sa de Melo, and C. Raman, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 165301 (2013).
- [127] S. W. Seo, S. Kang, W. J. Kwon, Y. Shin, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 015301 (2015).
- [128] K. Fujimoto and M. Tsubota, *Phys. Rev. A* **88**, 063628 (2013).
- [129] K. Fujimoto and M. Tsubota, *Phys. Rev. A* **91**, 053620 (2015).
- [130] K. Fujimoto and M. Tsubota, *Phys. Rev. A* **93**, 039901 (2016).
- [131] S. Dyachenko, A. C. Newell, A. Pushkarev, and V. E. Zakharov, *Physica D* **57**, 96 (1992).
- [132] V. Zakharov and S. Nazarenko, *Physica D* **201**, 203 (2005).
- [133] D. Proment, S. Nazarenko, and M. Onorato, *Phys. Rev. A* **80**, 051603(R) (2009).
- [134] G. E. Falkovich, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **93**, 117 (1987).
- [135] V. S. L'vov, Yu. L'vov, A. C. Newell, and V. Zakharov, *Phys. Rev. E*, **56**, 390 (1997).
- [136] K. Yoshida and T. Arimitsu, *J. Phys. A: Math. Theor.* **46**, 335501 (2013).
- [137] G. E. Marti, A. MacRae, R. Olf, S. Lourette, F. Fang, and D. M. Stamper-Kurn, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 155302 (2014).
- [138] H. Saito and M. Kunimi, *Phys. Rev. A* **91**, 041603(R) (2015).
- [139] N. T. Phuc, Y. Kawaguchi, and M. Ueda, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 230401 (2014).
- [140] M. Kunimi and H. Saito, *Phys. Rev. A* **91**, 043624 (2015).
- [141] Y. Kawaguchi, H. Saito, and M. Ueda, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 110406 (2007).
- [142] Y. Eto, H. Saito, and T. Hirano, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 185301 (2014).
- [143] K. Fujimoto and M. Tsubota, *Phys. Rev. A*, **93** 033620 (2016).
- [144] R. W. Anderson, *Basic Notions of Condensed Matter Physics* (Westview Press, 1997).
- [145] V. S. Lutovinov and V. R. Chechetkin, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **76**, 223 (1979) [*Sov. Phys. JETP* **49**, 114 (1979)].
- [146] Fjørtoft, *Tellus* **5**, 225(1953).
- [147] A. V. Kats and V. M. Kontorovich, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **65**, 206 (1973) [*Sov. Phys. JETP* **38**, 102 (1974)].