

Semi-stable sheaves の有界性について.

京大理

丸山正樹

Semi-stable (又は, stable) sheaves の moduli の構成に関する問題で最も重要なものは Semi-stable sheaves の有界性である。この小論ではこの問題を説明し、どこまで解決しているかを述べる。

Y を代数的閉体 k 上の非特異、射影的代数多様体, $\mathcal{O}_Y(1)$ をその上の ample 可逆層とする。

定義 1. Y 上の連接層 E が stable (又は, semi-stable) であることは、次の (i), (ii) が成立する時 \nwarrow 言う。

(i) E は torsion free ($\neq 0$),

(ii) 任意の連接部分層 F ($\neq 0, \subset E$) について、

$$\chi(F(m)) / r(F) = P_F(m) < P_E(m) = \chi(E(m)) / r(E), \forall m \gg 0,$$

(又は, \leqq)

ここで、 Y 上の連接層 G について、 $\chi(G(m)) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(Y, G \otimes \mathcal{O}_X(m))$, $r(G) = Y$ の generic point \bar{x} の G の rank.

$S \in$ universally Japanese (= pseudo-geometric) ring \wedge 上に限
生或る scheme ζ する。 $f: X \rightarrow S$ が smooth, projective,
geometrically integral な morphism, $\mathcal{O}_X(1)$ が f -ample な可逆層 ζ
 ζ する。 (Sch/S) は locally noetherian S -schemes の category ζ す
る。numerical polynomial $H(x)$ ζ , $T \in (\text{Sch}/S) \rightsquigarrow \zeta$,

$$\sum_{X/S}^H(T) = \{E \mid T\text{-flat な } X_S \times T \text{ 上の連接層で}, T$$

の任意の geometric point $t \in T \rightsquigarrow \zeta$, $E_t =$
 $E \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t)$ は $\mathcal{O}_{X_t}(1) = \mathcal{O}_X(1) \otimes_{\mathcal{O}_S} k(t)$ が ζ stable か
 $\zeta \chi(E_t(m)) = H(m) \} / \sim$

$$\bar{\sum}_{X/S}^H(T) = \{E \mid \text{上の条件の内 stable \& semi-stable
が } \zeta \text{ する } k \text{ での}\}$$

$\therefore \zeta$, $E_1 \sim E_2 \Leftrightarrow \exists L; T$ 上の可逆層 s.t. $E_1 \cong E_2 \otimes L$.

明るかに, $\sum_{X/S}^H, \bar{\sum}_{X/S}^H$ は (Sch/S) が ζ (Sets) \wedge の
contravariant functor ζ なす。

定理 1. $\sum_{X/S}^H$ は (S 上) locally of finite type かつ
separated な coarse moduli $M_{X/S}(H)$. ζ す。 $M_{X/S}(H)$ が quasi-
compact $\Leftrightarrow M_{X/S}(H)$: quasi-projective / S .

次に, 射影多様体 Y 上の semi-stable sheaf E を考
えよ。

命題 1. E を Y 上の semi-stable sheaf とする。

- (i) E は次の性質 (a), (b) を持つ \Rightarrow filtration $0 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_\alpha = E$ が入る; (a) $P_{E_i/E_{i-1}}(m) = P_E(m)$,
 $1 \leq i \leq \alpha$, (b) 各 E_i/E_{i-1} は stable.
- (ii) (i) の性質 (a), (b) を持つ filtration $0 = E'_0 \subset E'_1 \subset \dots \subset E'_{\beta} = E$ があるとき, $\alpha = \beta$ で $(1, 2, \dots, \alpha)$ の置換 σ が存在して, $E'_i/E'_{i-1} \cong E_{\sigma(i)}/E_{\sigma(i)-1}$.

上の命題より, $gr(E) = \bigoplus_{i=1}^{\alpha} E_i/E_{i-1}$ は (同型を除いて) 一意的に決まる。

定義 2. semi-stable sheaves E_1 と E_2 が S-equivalent
 $\Leftrightarrow gr(E_1) \cong gr(E_2)$. これを $E_1 \underset{S}{\sim} E_2$ で表わす。

注意 E_1 と E_2 のうち一方が stable ならば,

$$E_1 \underset{S}{\sim} E_2 \Leftrightarrow E_1 \cong E_2.$$

定理 2. 次の性質を持つ S-scheme $\bar{M}_{X/S}(H)$ が存在する。

- (i) $\bar{M}_{X/S}(H)$ は S 上 locally of finite type かつ separated.
- (ii) functor の射 $\varphi: \sum_{X/S}^H \rightarrow h_{\bar{M}_{X/S}(H)} = \text{Hom}_S(*, \bar{M}_{X/S}(H))$
 があり, S-scheme $N_{K \rightarrow H}$ について, functor の射 $\psi:$

$\sum_{X/S}^H \rightarrow P_N$ があるば、射 $\eta: \overline{M}_{X/S}(H) \rightarrow N$ で、 $P(\eta) \varphi = \psi$ となるものが一意的に存在する。

(iii) 'S の任意の geometric point $s \in S$ で、 $\varphi(k(s)) : \sum_{X/S}^H(Spec(k(s))) \rightarrow \overline{M}_{X/S}(k(s))$ は surjective' で、 $\varphi(k(s))(E_1) = \varphi(k(s))(E_2) \Leftrightarrow E_1 \cong_S E_2$.

(iv) 自然な射 $M_{X/S}(H) \rightarrow M_{X/S}(H)$ は open immersion.

(v) $\overline{M}_{X/S}(H)$ は specialization で閉じていて、'たゞ、 $\overline{M}_{X/S}(H)$ が quasi-compact $\Leftrightarrow \overline{M}_{X/S}(H)$ は projective/S.

さて、問題は上の (v) について、

問題 $\overline{M}_{X/S}(H)$ は S 上 projective か？ すなはち、
 $\overline{M}_{X/S}(H)$ は S 上 有限生成 か？

この問題を追求するため K 2,3 の概念を導入しよう

定義 3. $f: X \rightarrow S$ を noetherian scheme と $\overline{M}_{X/S}(H)$ の projective morphism とする。 K_1, K_2 を体として、S の K_i -valued point が与え S で K とする。 X_{K_i} 上の連接層 $E_{i, K}$ について、 E_1 と E_2 が equivalent ($E_1 \cong E_2$) \Leftrightarrow 体 K と S 上の injection $K_i \subset K$ が与えられて、 $E_1 \otimes_{K_i} K \cong E_2 \otimes_{K_i} K$ (X_K 上の層として)。 $f: X \rightarrow S$ の fibres 上の連接層

の equivalence classes のある 集合 を, "a family of the classes of coherent sheaves on the fibres of X over S " と 言う。

定義 4. $f: X \rightarrow S$ と 定義 3 と 同じとする。

\mathcal{F} : a family of the classes of coherent sheaves on the fibres of X over S .

この時, \mathcal{F} が 有界 (bounded, limitée) $\Leftrightarrow \exists T; S\text{-scheme of finite type}, \exists F: \text{coherent sheaf on } X \times_S T \text{ s.t. } \mathcal{F} \subseteq \{F \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) \mid t \in T\} / \sim$.

注意 "flattening stratification" を 使之ば, 上の 定義で「 F が T -flat」を 假定 1 で より いふ もが ある。

前回 と どおり, $f: X \rightarrow S$ が smooth, projective, geometrically integral. S が Λ 上に 有限生成 とする。 $\overline{\mathcal{G}}_{X/S}(H) = \{E \mid E$ は X の geometric fibre/ S 上の semi-stable sheaf で, $\chi(E(m)) = H(m)\} / \sim$ とおく。 $\overline{\mathcal{G}}_{X/S}(H)$ が 有界 とする \Leftarrow , T と F がある。 F は T -flat として おく。 さて 3 で, T の 開集合 T_0 が 存在して, 任意の 代的 開体 k に対して, $T_0(k) = \{t \in T(k) \mid F_t = F \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t)\}$ は semi-stable となる。 T を T_0 で, F を $F|_{X \times_S T_0}$ でおきかえて よると, $F \in \overline{\mathcal{G}}_{X/S}^H(T)$. 定理 2 の (ii) により, $\exists g: T \rightarrow \mathcal{M}_{X/S}(H)$, (iii) が 1) g は surjective. T は quasi-compact だから, $\mathcal{M}_{X/S}(H)$ は quasi-compact. 従って, (iv) が あり,

$\overline{M}_{g,n}(H)$ は projective/S. 故に, 我々の問題は次の問題に帰着した(実は同値)。

問題 $\overline{G}_{g,n}(H)$ は有界か?

注意 $\overline{G}_{g,n}(H)$ の定義の semi-stable という条件を, 例えば indecomposable 置きかえると, 有界でなくなる。我々の問題は自明ではない。

上の問題を考えるのには, (semi-)stable よりも次 \nwarrow 定義する μ -(semi-)stable の方が扱いやすい。

Y , $\mathcal{O}_Y(1)$ を定義1と同じとし, E を Y 上の torsion free ($\neq 0$) な連接層とする。 $d(E, \mathcal{O}_Y(1))$ を E の first Chern class $c_1(E)$ の $\mathcal{O}_Y(1)$ と関連の degree として,

$$\mu(E) = d(E, \mathcal{O}_Y(1)) / r(E)$$

と定義する。

定義5 Y 上の連接層 E が μ -stable (又は, μ -semi-stable)であるとは, 次の条件を満足するとさう言う。

(i) E は torsion free ($\neq 0$),

(ii) 任意の連接部分層 F ($\neq 0, \subset E$) について,

$$\mu(F) < \mu(E) \quad (\text{又は}, \mu(F) \leq \mu(E)).$$

E が semi-stable な \Leftrightarrow μ -stable な \Leftrightarrow , $\bar{\mathcal{G}}_{X_S}(H)$
 $\subseteq \mathcal{G}_{X_S}''(H) = \{E \mid E \text{ は } X \text{ の geometric fibre}/S \text{ 上の } \mu\text{-semi-stable}$
 $\text{sheaf } \tau, \chi(E(m)) = H(m)\} / \sim$. 従って, $\mathcal{G}_{X_S}''(H)$ の有界性が言えれば充分である。

以下, A は noether環, S は noetherian A -scheme とする。
 $f: X \rightarrow S$ は, smooth, projective, geometrically integral とし,
 f -ample な 可逆層 $\mathcal{O}_X(1)$ を固定する。

$f: X \rightarrow S$ の geometric fibre X_s 上の 連接層 $E \hookrightarrow \dots$
 \hookrightarrow , 整数 $a_0(E), \dots, a_n(E)$ が存在して,
 $\chi(E(m)) = \sum_i \dim H^i(X_s, E \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_X(m)) = \sum_{i=0}^n a_i(E) \binom{m+n-i}{n-i}$.

$E \hookrightarrow \dots$ で, 次の条件を考える。

- (1) E は $\mathcal{O}_{X_s}(1) = \mathcal{O}_X(1) \otimes_{\mathcal{O}_S} k(A) \hookrightarrow \dots$ で μ -semi-stable.
- (2) $a_0(E) = nd$, $a_1(E) = a_1$, $a_i(E) \geq a_i$ ($2 \leq i \leq n$), ここで, d は X_s の $\mathcal{O}_{X_s}(1)$ に関する次数。
- (3) E は Serre の 条件 (S_2) を満足する。
- (4) $a_0(E) = nd$, $a_1(E) = a_1$, $a_2(E) \geq a_2$, ここで, d は (2) と同じ。
- (5) 次数 n の numerical polynomial $H(x) \hookrightarrow \dots$, $\chi(E(m)) = H(m)$ かつ, $n(E) = n$.

上の条件の $\dots \hookrightarrow \dots$ を満足する E の family

を定義しよう。

$$\sum_{X_S}(n, r, a_1, \dots, a_n) = \{E \mid E \text{ は条件(1), (2) を充たす}\}$$

$$\sum'_{X_S}(n, r, a_1, a_2) = \{E \mid E \text{ は条件(1), (3), (4) を充たす}\}$$

$$\sum''_{X_S}(n, r, H) = \{E \mid E \text{ は条件(1), (5) を充たす}\}$$

有界性 $\kappa \mapsto \infty$ で、例えば次の命題が考えられる。

$B_{n,r}(\Lambda)$: Λ, n, r を固定する時、すべての $\sum_{X_S}(n, r, a_1, \dots, a_n)$ が有界。

$B'_{n,r}(\Lambda)$: Λ, n, r を固定する時、すべての $\sum'_{X_S}(n, r, a_1, a_2)$ が有界。

$B''_{n,r}(\Lambda)$: Λ, n, r を固定する時、すべての $\sum''_{X_S}(n, r, H)$ が有界。

$\sum''_{X_S}(n, r, H)$ は ($\Lambda \kappa \mapsto \infty$ の条件が少し違うが) 前の $\mathcal{G}_{X_S}''(H)$ と同じものだから、我々問題は $B''_{n,r}(\Lambda)$ が、すべての $n, r, \Lambda \kappa \mapsto \infty$ で成立するか? というところだ。 $B''_{n,r}(\Lambda)$ が成立する時、

「semi-stable sheaves の有界性が; 次元 n , 階数 r $\kappa \mapsto \infty$ で, (Λ -scheme の category で) 成立する。」
と言うことである。

命題 2 $B_{n,r}(\Lambda) \Rightarrow B''_{n,r}(\Lambda)$ 。
 $B'_{n,r}(\Lambda) \Rightarrow B''_{n,r}(\Lambda)$ 。

従って, semi-stable sheaves の有界性を示すには,
 $B'_{n,n}(\Lambda)$ を証明すれば良いことになる。大切な
ことは, 次元によっての帰納法を使う場合,
 $B''_{n,n}(\Lambda)$ を直接証明するよりも, $B'_{n,n}(\Lambda)$ を証明す
る方が容易に思われるることである。

今までくわがての結果をまとめると,

定理3 (i) $n=1, 2$ の時, $B_{n,n}(\Lambda), B'_{n,n}(\Lambda)$ 従,
 $\Rightarrow B''_{n,n}(\Lambda)$ も, すべての n, Λ について成立する。

(ii) $B_{2,n}(\Lambda), B'_{2,n}(\Lambda)$ 従, $\Rightarrow B''_{2,n}(\Lambda)$ も, すべ
ての n, Λ について成立する。

(iii) $n=3, 4$ かつ Λ が標数 0 の体の時, $B_{n,n}'(\Lambda)$
従, $\Rightarrow B''_{n,n}(\Lambda)$ も, すべての n について成立す
る。

この定理の証明は容易ではない。証明の途
中で使われる結果で, それ自身興味のあるも
のを 2, 3 あげよう。

定理4 Y を代数的閉体上の非特異, 射影
的代数多様体, $\mathcal{O}_Y(1)$ を Y 上の very ample 可逆層と
する。 L を $|\mathcal{O}_Y(1)|$ の very ample 部分一次系とする。

Y 上の $(\mathcal{O}_Y(1))_K$ 關於 \mathbb{P} の μ -semi-stable sheaf $E \rightarrow \mathbb{P}$,
 $r(E) < \dim Y$ とする。この時, L の空でない開集合 $U(E)$ が存在して, $\forall Z \in U(E)$, $E \otimes \mathcal{O}_Z$ は $\mathcal{O}_Z(1) = \mathcal{O}_Y(1) \otimes \mathcal{O}_Z |_K$ 關於 \mathbb{P} の μ -semi-stable.

注意 上の定理で $r(E) < \dim Y$ という条件は除けない。例えば, \mathbb{P}_n と普通の $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)$ をと, たとえ, 接バンド $\wedge T_{\mathbb{P}_n}$ を考える。勝手な $\mathbb{P}^m \cong H \in |(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1))|$ について, 完全列

$$0 \longrightarrow T_H \longrightarrow T_{\mathbb{P}_n}|_H \longrightarrow \mathcal{O}_H(1) \longrightarrow 0$$

を得る. $c_1(T_H) = n \cdot H^2$, $c_1(T_{\mathbb{P}_n}|_H) = (n+1)H^2$. 故に,
 $\mu(T_H) = \frac{n}{(n+1)} > \frac{(n+1)}{n} = \mu(T_{\mathbb{P}_n}|_H)$.

となり, $T_{\mathbb{P}_n}|_H$ は μ -semi-stable でない。

定理 3 の (i) は定理 4 の直接の系である。

Y を非特異, 射影曲面とし, $\mathcal{O}_Y(1)$ を very ample 可逆層, $L \subseteq |\mathcal{O}_Y(1)|$ を very ample 部分一次系とする。 E が Y 上の torsion free, 階数 2 の連接層とする。
 L の空でない開集合 $W(E)$ が存在して, $W(E)$ の勝手な元 C について, C は非特異, $E|_C$ は locally free となる。さて, $C \in W(E)_K$ について,

$d(E, C) = \min \{d(E, \mathcal{O}_Y(1)) - 2\deg D \mid D: \text{line subbundle of } E|_C\}$

とおくと、 $d(E, C)$ は整数である。

$$d(E) = \max \{d(E, C) \mid C \in W(E)\}$$

は有限であり、 $W(E)$ の空でない開集合 $W'(E)$ がある、 $d(E) = d(E, C), \forall C \in W'(E)$.

定理 5 $Y, \mathcal{O}_Y(1), L, E$ は上と同様とする。さらに、基礎体の標数は 0 とし、 E は μ -semi-stable とする。この時、

$$d(E) \geq -C^2, \quad C \in L.$$

注意 上の定理で“標数 0”という条件は除けない。例えば “ $Y = \mathbb{P}_2, \mathcal{O}_Y(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1), L = |\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)|, E = T_{\mathbb{P}_2}^{(\mathbb{P}^n)}$ ($p = \text{標数}$)”とする時は、 $d(E) = -p^n$ となる。

定理 5 の証明は、W. Barth が P_n 上の階数 2 の stable bundle を調べたのを κ 使って方法 (Math. Ann. 226 (1977) 125-150) を真似ればよい。この定理は、この場合定理 4 の様なことは成立しないが、一般的の C について、 $E|_C$ が μ -semi-stable がさあまり離れないことを意味する。定理 3 の (iii) の $n=3$ の場合は、定理 4, 5 を使って証明される。 $n=4$

の場合は、定理 5 の高階数の場合への、3 より、として一般化から出る。

定理 5 の様なことが一般の階数で成立すれば、 $B'_{n,n}(\Lambda)$ が、 Λ が標数の体という仮定の下で証明できることと思われる。

最後に文献であるが、定理 1, 2 へ述べた moduli $K \rightarrow \mathbb{C}$ では次のとおりである。

M. Maruyama: Stable vector bundles on an algebraic surface,

Nagoya Math. J., 58, 1975.

D. Gieseker: On moduli of vector bundles on an algebraic surface,

Ann. of Math., 106, 1977.

M. Maruyama: Moduli of stable sheaves, I, J. Math. Kyoto Univ.,

17, 1977.

M. Maruyama: Moduli of stable sheaves, II, J. Math. Kyoto Univ.,

18, 1978.

有界性 $K \rightarrow \mathbb{C}$ で基本的なことは、

S. Kleiman: Les théorèmes de finitude pour le foncteur de Picard, Sem

de Géométrie Algébrique de Bois Marie, 1966/67, Exposé XIII, lect.

Note in Math., 225, Springer-Verlag, 1971.

この小論の詳しい内容は次の論文にある。

H. Maruyama: Boundedness of semi-stable sheaves of small ranks,
submitted to Nagoya Math. J..