

フルマ - 多様体に関する
ホッジ予想について

東大理 塩田義治

§0.

$m \geq 1$, $n \geq 0$ とする。 $(n+1)$ 次元の射影
空間 \mathbb{P}^{n+1} 内の非特異超曲面

$$(1) \quad X_m^n = x_0^m + x_1^m + \cdots + x_{n+1}^m = 0$$

と、 n 次元 m 次の Fermat 多様体とする。以下
断りのない限り、複素数は \mathbb{C} 上で考へる。

次に F とする。 X_m^n に関する Hodge 予想: $n = 2p+1$.

$$(2) \quad H^{p,p} \cap H^n(X_m^n, \mathbb{Q}) = C(X_m^n)_\mathbb{Q},$$

(左辺は p 次元の代数的サブルーブル生成子空間) & m, n に関する条件 (P_m^n) の下に証明する
方法を述べる。この山は、 m が素数の場合の最近
の Ran [R] の結果の拡張をもとにした同時に、
証明の簡略化をねらってある。この際基礎となる
ことは X_m^n の半純的構造 ([F], §1) である。

§1

二 n 個 2 12 (2) n T_n 由 E 記過 1 3, m, n 是

前 a 由 ' & l. G_mⁿ 是 次 n 等 記 1 3

$$G_m^n = \underbrace{(\mu_m \times \dots \times \mu_m)}_{(n+2) \times} / (\text{diagonal}).$$

μ_m 是 1 ~ m 乘 素 的 圓 圓 等. G_mⁿ ~ 1 ~

$$g = [s_0 : \dots : s_{n+1}] \quad (s_i \in \mu_m)$$

由 g <. G_mⁿ 是 X_mⁿ 的 自 己 同 型 & 1 ~ 作 用 于 3:

$$g : X_m^n \rightarrow X_m^n$$

$$(x_0 : \dots : x_{n+1}) \mapsto (s_0 x_0 : \dots : s_{n+1} x_{n+1})$$

從 ~ 2 G_mⁿ ~ H¹(X_mⁿ, Q). H¹(X_mⁿ, C) ... 是 1 ~ 2

11 3. i ≠ n ~ & 2. 由 h S 1 + {0} & 0 ~ 1 ~ 2 ~

7. G_mⁿ 是 自 由 且 有 限 团 于 3. i = n ~ & 2. G_mⁿ

指 標 α 1: 関 于 3 H¹(X_mⁿ, C) ~ 因 有 量 由 V(α) & 2.

<: V(α) = {ξ ∈ H¹(X_mⁿ, C) | g*(ξ) = α(g) ξ}. 由 7.

G_mⁿ 的 指 標 \hat{G}_m^n 是 (1). 由 7. 2 ~ 2 - 3 且 1 ~ 3:

$$\hat{G}_m^n = \{ \alpha = (a_0, \dots, a_{n+1}) \mid a_i \in \mathbb{Z}/m, a_0 + \dots + a_{n+1} = 0 \}$$

$$\alpha(g) = s_0^{a_0} \cdots s_{n+1}^{a_{n+1}}$$

由 a i 2 ~ 2 固 定 于 3:

$$G_m^n = \{ \alpha \in \hat{G}_m^n \mid a_i \neq 0, \}$$

$$|\alpha| = \sum_{i=0}^{n+1} \langle a_i \rangle / m \quad \langle a_i \rangle \in a_i, 1 \leq \langle a_i \rangle \leq m-1$$

$$H_{\text{prim}}^n(X_m^n) = \begin{cases} H^n(X_m^n, \mathbb{C}) & n: \text{odd} \\ \text{primitive part of } H^n(X_m^n, \mathbb{C}) & n: \text{even} > 0 \\ \ker(\deg: H^0(X_m^0, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}) & n=0 \end{cases}$$

$$H^{p,q} = \text{type } (p,q) - \text{subspace of } H_{\text{prim}}^n(X_m^n), p+q=n$$

Th. I. ν_k 上 $n \in \mathbb{Z}$ は α で ≥ 2 なら立つ 3.

$$(i) H_{\text{prim}}^n(X_m^n) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{O}_m^n} V(\alpha), \dim V(\alpha) = 1 \quad (\forall \alpha \in \mathcal{O}_m^n).$$

$$(ii) H^{p,q} = \bigoplus_{|\alpha|=q+1} V(\alpha) \quad (p+q=n).$$

$$(iii) (H^{p,p} \cap H^n(X_m^n, \mathbb{Q}))_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{B}_m^n} V(\alpha) \quad (n=2p)$$

$$\mathcal{B}_m^n = \{\alpha \in \mathcal{O}_m^n \mid |\alpha| = p+1, \forall t \in (\mathbb{Z}/m)\}$$

$$\text{すなはち } \alpha \stackrel{\text{def}}{=} (t\alpha_0, \dots, t\alpha_{n-1}).$$

$$(vi) ((H^{p,p+1} + H^{p+1,p}) \cap H^n(X_m^n, \mathbb{Q}))_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{B}_m^n} V(\alpha) \quad (n=2p+1)$$

$$\mathcal{B}_m^n = \{\alpha \in \mathcal{O}_m^n \mid |\alpha| = p+1 \text{ or } p+2, \forall t\}$$

証明 12. Ogus, Ann. Math. 108 (1978) 2 は Katz,

Ann. ENS. 2 (1969) の定理, (iii), (iv) は $H^n(\mathbb{O}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(S_m)$ は

すなはち $G_m^n \times \text{Gal}(\mathbb{Q}(S_m)/\mathbb{Q})$ が (ii) の可換性 + 2 は 3.

$$\text{ただし } n \text{ が偶数のとき}, C(X_m^n)_{\mathbb{Z}} \subset H^n(X_m, \mathbb{Z})$$

X_m^n の次元 $n/2$ の代数的アーベル多様体の部分は \mathbb{Z}

部分群, $C_{\text{prim}}(X_m^n)_{\mathbb{Z}}$ は primitive part と呼ぶ

$$C_{\text{prim}}(X_m^n) = C_{\text{prim}}(X_m^n) \otimes \mathbb{C} \subset H_{\text{prim}}^n(X_m)$$

とある. 例題として $n=4$ の場合 $G_m^4 - \text{point}$ の場合をみてみよう.

では $\mathcal{C}_m^n \subset \Omega_m^n$ をみる.

$$C_{\text{prim}}(X_m^n) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{C}_m^n} V(\alpha).$$

例題 - $n=4$ のとき ($p=n/2$)

$$H^{p,p} \cap H^n(X_m, \mathbb{Q}) \supset C(X_m)_{\mathbb{Q}}$$

では $\mathcal{C}_m^n \subset \Omega_m^n$ である. X_m^n は実多様体

である. 次のように定義されるべき:

$$\text{Hodge}(X_m^n) : \quad \mathcal{C}_m^n = \Omega_m^n \quad ? \quad (n: \text{even})$$

注意 $n=0$ のとき. これは $n=0$ と $n=2$ の場合

正しく ($n=0$ の場合は, $n=2$ の Lefschetz 定理を用いるべき.)

以下は $n=2$. m は固定して. n は偶数とする

場合 $n=2$. $\forall \alpha \in \Omega_m^n$ が \mathcal{C}_m^n に属する条件

は?

§2.

前節で X_m^n 上の type (p, p) の不變係數 α を口
2-類 (既に 2 Hodge class) の構造が α から導
かれるから、対応する 代数的アソルト構成
を述べて置くことにする。

まず $X_m^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ の構造と復習を $([F] \S 1)$
次の図式が因式分解してある: $n = r+s$, $r, s \geq 1$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \beta^{-1}(Y) & \hookrightarrow & Z_m^{r,s} & \xrightarrow{\pi} & Z_m^{r,s}/\mu_m \hookrightarrow (X_m^{r-1} \times \mathbb{P}^s) \amalg (\mathbb{P}^r \times X_m^{s-1}) \\
 (\ast) \quad \beta' \downarrow & & \beta \downarrow & \searrow \psi & \downarrow \bar{\psi} \quad \downarrow \text{proj.} \\
 Y = X_m^{r-1} \times X_m^{s-1} & \xrightarrow{j} & X_m^r \times X_m^s & \xrightarrow{\varphi} & X_m^n \hookrightarrow X_m^{r-1} \amalg X_m^{s-1} \\
 & & (x_i) \quad (y_j) & & (z_k)
 \end{array}$$

この図式の順序を述べる。

ψ : m 次の有理写像: $z_i = x_i y_{s+1}$, $z_{r+1+j} = \varepsilon x_{r+1} y_j$
 $(0 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq s)$. ε は $\varepsilon^m = -1$ とする.

γ : ψ の不變定理 $x_{r+1} = y_{s+1} = 0$.

β : $X_m^r \times X_m^s$ と Y の blow-up., β' は制限.

$\psi = \beta \circ \gamma$. morphism とする.

$\pi, \bar{\psi}$ は γ の逆像. $\bar{\psi}$ の作用は γ の作用と合致する.

ψ は次の型の \mathbb{P}^1 型 \mathbb{P}^1 と equivariant:

$$h : G_m^r \times G_m^s \rightarrow G_m^n$$

$$([s_0 : \dots : s_r : 1], [s'_0 : \dots : s'_s : 1]) \mapsto [s_0 : \dots : s_r : s'_0 : \dots : s'_s]$$

从上， $G_m^r \times G_m^s$ 是 \mathbb{Y} 在 \mathbb{P}^{r+s+1} 上的 $\mathbb{Z}_m^{r,s}$ 。且 $\text{Ker}(h) = \mu_m$ 是 \mathbb{Y} 上自明的。因此 $\mathbb{Z}_m^{r,s}$ 是 $\mathbb{Z}_m^{r,s}/\mu_m$ 的一个固定子群。

$$\pi : \mathbb{Z}_m^{r,s} / \mu_m = \text{Ker}(h) \hookrightarrow \mathbb{Z}_m^{r,s}/\mu_m$$

$$\psi = \bar{\varphi} \circ \pi \text{ 是 } \mathbb{Z}_m^{r,s}/\mu_m \text{ 的一个非零元}$$

因此 $\mathbb{Z}_m^{r,s}/\mu_m$ 是 X_m^n 的部分子群。

$$X_m^{r-1} = \{(x_0 : \dots : x_r : 0 : \dots : 0)\} \text{ 是 } \mathbb{Z}_m^{r,s}/\mu_m$$

$$X_m^{s-1} = \{(0 : \dots : 0 : y_0 : \dots : y_s)\}$$

它们在 \mathbb{Y} 中是 blow-up 的点。且 π^{-1} 和 $\bar{\varphi}$ 是。

$\mathbb{Z}_m^{r,s}/\mu_m$ 作商后是 $G_m^r \times G_m^s / \mu_m \cong G_m^n$ 是 $\mathbb{Z}_m^{r,s}/\mu_m$ 的一个 equivariant。

上式是用 \mathbb{Z}_m^n 。 $H^n(\mathbb{Z}_m^{r,s}/\mu_m)$ 是通过 π 从 \mathbb{Z}_m^n 得到的。

$$(1) H^n(\mathbb{Z}_m^{r,s}/\mu_m) \cong H^n(\mathbb{Z}_m^{r,s})^{\mu_m}$$

$$\cong_{\beta} [H^n(X_m^r \times X_m^s) \oplus H^{n-2}(X_m^{r-1} \times X_m^{s-1})]^{\mu_m}$$

$$\cong H^n(X_m^r \times X_m^s)^{\mu_m} \oplus H^{n-2}(X_m^{r-1} \times X_m^{s-1})$$

$$(2) H^n(\mathbb{Z}_m^{r,s}/\mu_m) \cong H^n(X_m^n) \oplus \sum_{j=1}^r H^{n-2j}(X_m^{r-1}) \oplus \sum_{k=1}^s H^{n-2k}(X_m^{s-1})$$

blow-up 时 $\mathbb{Z}_m^{r,s}/\mu_m$ 是 $\mathbb{Z}_m^{r,s}/\mu_m$ 的一个子群。

SGA 7 II, XVIII. Katz, SGA 5 VII, 2 is "Complex Analysis and Algebraic Geometry" (若 its - Cambridge) の i-7 に G_m の場合の \mathbb{G}_m^n の場合の結果を示す。

\cong 2 (1) は $n = r + s$ の \mathbb{G}_m^n の場合の結果を示す。 \mathbb{G}_m^n -equivariant は $r+s$ の場合の \mathbb{G}_m^n の場合の結果を示す。 Th.I (i) の結果は \mathbb{G}_m^n の場合の結果を示す。 然るに後で $\mathbb{G}_m^n \otimes \alpha$ の場合の結果を示す。 これは \mathbb{G}_m^n の場合の結果を直接用いて $\mathbb{G}_m^n \otimes \alpha$ の場合の結果を得る。

Th.II. $m \in \mathbb{N}$ 固定。 $n = r+s$, $r, s \geq 1$ かつ $r+s$ が偶数である場合の \mathbb{G}_m^n の場合の結果を示す：

$$H_{\text{prim}}^n(X_m^n) \underset{f}{\cong} [H_{\text{prim}}^r(X_m^r) \otimes H_{\text{prim}}^s(X_m^s)]^{\mu_m} \oplus [H_{\text{prim}}^{r-1}(X_m^{r-1}) \otimes H_{\text{prim}}^{s-1}(X_m^{s-1})].$$

- a) f は \mathbb{G}_m^n -equivariant:
- b) $x (x \neq 1)$ の右辺の \mathbb{G}_m^n 一項 ($x \neq 1 \Rightarrow x = \bar{x}$) の層 β と γ と β と γ の type (p, q) $\Rightarrow f(x) \in \text{type}(p, q)$.
- y の type (p', q') $\Rightarrow f(y) \in \text{type}(p'+1, q'+1)$.

- c) f は代数的かつ \mathbb{G}_m^n の層 β を保存する。

(c1) r, s は既約で $r \leq s$ $f : [C^*(X_m^r) \otimes C(X_m^s)]^{\mu_m} \hookrightarrow C(X_m^n)$.

(c2) r, s は既約で $r \leq s$ $f : C(X_m^{r-1}) \otimes C(X_m^{s-1}) \hookrightarrow C(X_m^n)$.

$\therefore \exists C(X^n)$ は倍数の元 ($n = 2p$) の和の形で書かれて
ある元の代数的 + 1 のルの primitive part.

より詳しに $Z_1 (2+Z_2)$ が X_m^{r-1} (2 は X_m^{s-1}) 上の
内数の元の代数的 + 1 のルの形と書き.

$$f(\text{cl}(Z_1) \otimes \text{cl}(Z_2)) = \text{const. cl}(Z_1^V Z_2)$$

とある. たゞ $Z_1^V Z_2$ は X_m^n 上の $Z_1 \subset X_m^{r-1}$ と
 $Z_2 \subset X_m^{s-1}$ の \mathbb{P}^1 上の元の積合; すなはち代数的 + 1 の
ル (join) である.

注意. 上の Th. II の (c1), (c2) は Fermat の方程
 X_m^n 上の代数的 + 1 のルを. 但し之は $X_m^{n'}$, $n' < n$
との構成する方法と等しい. 例え (c1) は,
 $X_m^r \times X_m^s$ 上の + 1 のルが; X_m^n ($n = r+s$) 上の + 1 のル
を導く方法. 特別の場合 $r = s$ は $[F]$ 上の元の
積合. 標数 $p \geq X_m^r$ が supersingular である條件, 或は
標数 $p \geq X_m^2$ (曲面) の関する Tate の方程の解の個数
を述べる. したがつて (c2) は $X_m^{r-1} \times X_m^{s-1}$ 上の + 1 のルが;
 X_m^n ($n = r+s$) の + 1 のルと \mathbb{P}^3 上の \mathbb{P}^1 の
 $\text{Ran}[R]$ は -2 の倍数の \mathbb{P}^1 の和であることを証明する.
即ち式 (*) は基上上の証明の詳しき見易い形である.

§ 3.

$n = r+s$, $r, s \geq 1$ 且 $\beta \in \Omega_m^n$ 定義 3:

$$\Omega_m^{r,s} = \{(\beta, \gamma) \in \Omega_m^r \times \Omega_m^s \mid \beta = (b_0, \dots, b_{r+1}), \\ \gamma = (c_0, \dots, c_{s+1}), b_{r+1} + c_{s+1} = 0\}$$

$$\Omega_m^{r,s} \ni (\beta, \gamma) \mapsto \beta \# \gamma = (b_0, \dots, b_r, c_0, \dots, c_s) \in \Omega_m^n.$$

2. $(\Omega_m^{r-1} \times \Omega_m^{s-1}) \ni (\beta', \gamma') \rightarrow \beta' * \gamma' \in \Omega_m^n$ 且 同樣

12. 定義 3: $\beta' = (b_0, \dots, b_r), \gamma' = (c_0, \dots, c_s)$ 1= 2 且 $\beta' * \gamma' = (b_0, \dots, b_r, c_0, \dots, c_s).$

由 3. 6. 12.

$$\Omega_m^n \xleftarrow{\text{bijection}} \Omega_m^{r,s} \sqcup (\Omega_m^{r-1} \times \Omega_m^{s-1})$$

且由 Th. II 的分解定理可得此定理的證明，即

$$\begin{cases} V(\alpha) \longleftrightarrow V(\beta) \otimes V(\gamma) & \text{if } \alpha = \beta \# \gamma, \\ V(\alpha) \longleftrightarrow V(\beta') \otimes V(\gamma') & \text{if } \alpha = \beta' * \gamma'. \end{cases}$$

Th. II, (c1), (c2) 1. 5. 1

$$\text{Cor. } C_m^n \supseteq \bigcup_{\substack{r+s=n \\ r, s \text{ even}}} [(C_m^r \times C_m^s) \cap \Omega_m^{r,s}] \cup \bigcup_{\substack{r+s=n \\ r, s \text{ odd}}} [C_m^{r-1} \times C_m^{s-1}]$$

类似地有 $C_{m+2}^n \supseteq \bigcup_{\substack{r+s=n \\ r, s \text{ even}}} (C_m^{r-1} \times C_m^{s-1}) \oplus \bigcup_{\substack{r+s=n \\ r, s \text{ odd}}} (C_m^r \times C_m^s)$ 为 C_m^n 的子集。

又：2. Hodge (X_m^n) 在 n 次同調 3 中的 \mathbb{R} 线性子空间

由 Ω_m^n 定義 3 及 $\Omega_m^n \subset C_m^n$ 得 Ω_m^n 在 n 次同調 3 中的 \mathbb{R} 线性子空间

$\forall \alpha \in \mathcal{B}_m^n$ (n : even, >2) は $\frac{1}{2} \alpha$ の \mathbb{Z}_{n+2} の 条件

(P1) $\exists \beta \in \mathcal{B}_m^r$, $\exists \gamma \in \mathcal{B}_m^s$, $(\beta, \gamma) \in \mathcal{D}_m^{r,s}$ s.t.

$$\beta * \gamma \sim \alpha \quad (\sim \text{は } \widetilde{\mathcal{S}}_{n+2} \text{- 同値の意})$$

(P2) $\exists \beta' \in \mathcal{B}_m^{r-1}$, $\exists \gamma' \in \mathcal{B}_m^{s-1}$ s.t.

$$\beta' * \gamma' \sim \alpha$$

もしも P1 が 成立する。

$$\pm 2. \quad \alpha = (a_0, \dots, a_{n+1}) \in \mathcal{O}_m^n \quad \text{then}$$

$$\alpha \sim (\underbrace{1, \dots, 1}_{x_1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{x_2}, \dots, \underbrace{m-1, \dots, m-1}_{x_{m-1}})$$

と T_2 の α は $\alpha \in \mathcal{B}_m^n$ と T_2 の 条件 は

$$\sum_{v=1}^{m-1} \langle t \cdot v \rangle x_v = (\frac{n}{2} + 1)m, \quad \forall t \in (\mathbb{Z}/m)^*$$

となる。今

$$\sum \langle t \cdot v \rangle x_v = my$$

の 非負 整数 解 $(x_1, \dots, x_{m-1}; y)$ (x_i は $i \geq 1$) の 和

半群 \mathcal{M}_m と が \subset . \mathcal{M}_m の 元 素 和 $= 0$ の 元 の

和 と は 1 つ ある と き indecomposable と が いふ。X が

の 集合 $I_m \subset \mathcal{M}_m$ は 有限個 か し 成り ("Gordan の 定理"). 勿論 \mathcal{M}_m の 最小 の 生成元 系 と が いふ。

- すなはち $\mathcal{M}_m(y)$ が 5 つ 以上 y を 1 つ おいて 部分集合 と

习 3. $M_m(1) \ni [\frac{m}{2}] \in \sigma$ 元 $(1, 0, \dots, 0, 1; 1), (0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0; 1)$

$\dots (0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0; 1)$ ($t, t' \in L_{\frac{m+2}{2}}$ 且 $t \neq t'$ 时 m : 偶数)

由上习 3. $\exists \gamma \in M_m$ 且 γ 为 quasi-decomposable 且 $\exists \eta \in M_m(1)$ s.t. $\gamma + \eta = \xi' + \xi''$.

$\xi', \xi'' \in M_m, \neq \xi$ 且 $\forall \beta \in \gamma$ 定义于 ξ .

$\therefore \exists \gamma \in M_m(1) \cap (P_m), (P_m^n) \in \gamma \in \xi$. ($m \geq 1, n$: even)

(P_m) $I_m \ni \xi$ 全 γ . quasi-decomposable.

(P_m^n) $I_m \cap \xi \subset \gamma$. $3 \leq n \leq \frac{m}{2} + 1$ 且 ξ , $t \in I_m$ 全 γ . quasi-decomposable.

$\therefore \exists \gamma \in I_m$. $M_m \cong M_m(1) \cup M_m(2)$ 且 γ 为 ξ 且 ξ 为 γ .

(P_m) 为偶数且 ξ . 且 ξ 为 γ . 结论得证.

Th III. $\begin{cases} (P_m^n) \Rightarrow \text{Hodge}(X_m^n) \\ (P_m) \Rightarrow \text{Hodge}(X_m^n) \text{ for all } n \text{ (even)} \end{cases}$

Lemma. m 为素数且 $m = 4$ 或 $m \equiv 1 \pmod{4}$. $\therefore I_m = M_m(1)$.

即 $\text{rank}(\langle t, v \rangle_{t \in I_m, v \in m-1}) = \frac{m+1}{2} = 2$.

Cor(R) m 为素数且 $m = 4$ 或 $m \equiv 1 \pmod{4}$. $\text{Hodge}(X_m^n)$ 为
仅 ± 1 的 n 且成立. L 为且 $C(X_m^n) \cong \mathbb{P}^n$. X_m^n 且 $\frac{n}{2}$ 为元的线型部分 $\text{Hodge}(X_m^n) \cong \mathbb{P}^{\frac{n}{2}}$ 且 $3 \leq n \leq 3$.

最後の部分は Th II の末尾と X_m^0 が $m = n$ の
とき成り立つから、帰納法で証明。すなはち
① $n < \infty$ 上でいきが否かは意味ある問題
(題) である。

m が事実上 ≤ 10 とす。一般に $I_m \subset M_m(1)$ が
ある。小さな m の実験より \exists と \forall (P_m) を満
たす \exists である。 $(m \leq 10 \text{ とする}, \text{ たてて } \exists \text{ と } \forall)$

問題 (ア) $d_m = \max_{(x,y) \in I_m} y$ は m の評価できるか?

(イ) (P_m) は $\exists \sim \forall$ 成立するか?

最後に、証の結果を述べておく。

Th. IV. 条件 (P_m) の下で ($i < j$, m が事実上 ≤ 10
 $\forall i, j \in \mathbb{N}$) 任意の直積 $X_m^{r_1} \times \dots \times X_m^{r_k}$ の (任意
 $p \leq r_1 + \dots + r_k$ かつ $p \geq n$) Hodge 分解が成立する。

文献。(詳細は山川先生の著書を参照)

[R] Z. Ran, Cycles on Fermat hypersurfaces (to appear)

[F] T. Katsura - T. Shioda, On Fermat varieties

Tôhoku Math. J. (1979)