

*p-adic unit ball について*

## 栗原 章

$R$  を complete discrete valuation ring としてその剰余体が有限体  $\mathbb{F}_p$  であるものとする。Mumford [1] は複素上半平面  $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}; I_m(z) > 0\}$  の  $R$  上の類似物  $X_D$  を構成した(後で詳しく述べる)。更に Cerednik [2], [3] は  $\mathcal{D}$  と  $X_D$  の数論的関係を伊原理論の立場から明確にした。以下で我々の問題とするとは一般に有界対称領域  $D$  に対して、 $D$  の  $R$  上の類似物を構成しようと試みることである。結果として  $D$  が  $l$  次元 unit ball  $\{(z_1, \dots, z_l) \in \mathbb{C}^l; |z_1|^2 + \dots + |z_l|^2 < 1\}$  であるときは  $D$  の  $R$  上の満足すべき類似物  $X_D$  が構成できることを示す。そのためには道具として岩堀-松本, Bruhat-Tits による  $R$  の商体  $K$  上の半単純代数群の理論と Mumford による Geometric Invariant Theory, Torus Embedding を用いる。

本文は筆者の得た結果であるが、それとは独立に Mustafim [5] は Mumford [1] が用いた join による

方法で我々の  $X_I$  と同一と思われる物を構成している。(cf. also Drinfel'd [4])

1°  $\mathbb{F}_q = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\}$  の  $R$  上の類似物  $X_I$  (Mumford [1])

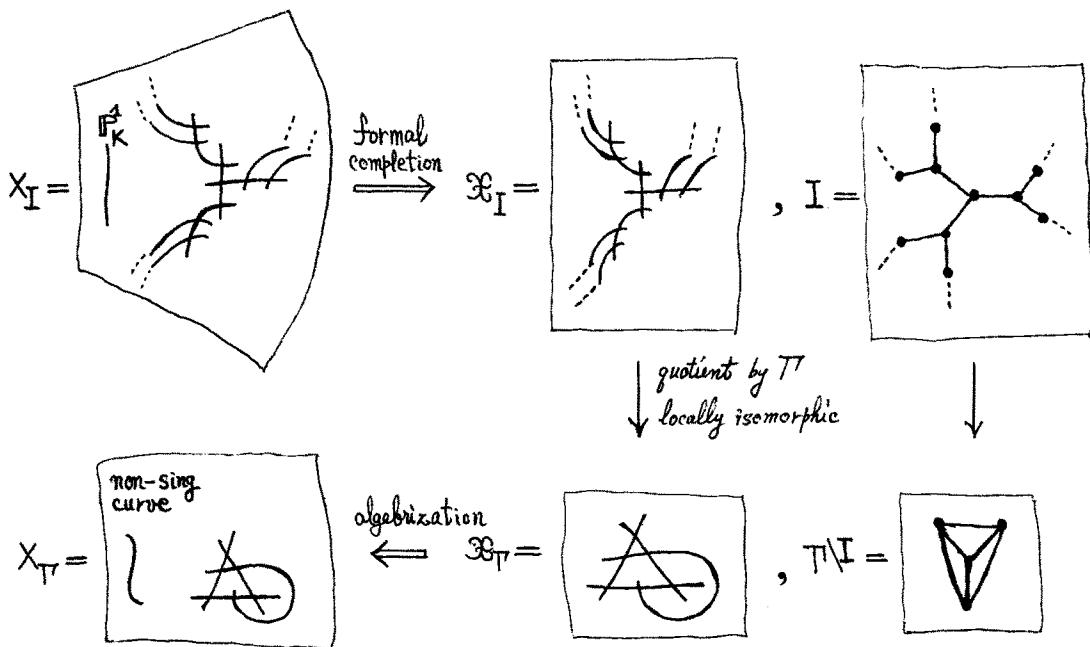
Mumford は我々の  $R$  より一般の像数環  $R'$  について構成しているが、我々の  $R$  に対しては記述が簡単になるので以下を水を復習する。(図参照)

$\mathbb{P}^1_R = \operatorname{Proj} R[X, Y]$  を考える。  $X^{(n)}$  ( $n \geq 0$ ) を次の様に定義する。即ち,  $X^{(0)} = \mathbb{P}^1_R$  であり,  $X^{(n-1)}$  の special fibre  $X_0^{(n-1)}$  の double point である  $\mathbb{F}_q$ -valued points をすべて blow up したものと  $X^{(n)}$  とする。 $U^{(n)} = X^{(n)} - \{\text{double pt である } \mathbb{F}_q\text{-valued pts}\}$  とおくと,  $U^{(0)} \subset_{\text{open}} U^{(1)} \subset_{\text{open}} U^{(2)} \subset_{\text{open}} \dots$  であり、これらをはり合わせて  $X_I = \bigcup_{n \geq 0} U^{(n)}$  とおく。明らかに  $X_{I,\eta} = \mathbb{P}^1_K$  ( $\eta = \text{generic pt of } \operatorname{Spec}(R)$ )、また  $X_{I,0}$  の各成分は  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$  でありその  $g+1$  個の  $\mathbb{F}_q$ -valued points で他の成分と交わってある。群  $\operatorname{PGL}_2(K) = \operatorname{Aut}(\mathbb{P}^1_K/K)$  の元は  $X_I$  の rational な automorphism をひきおこすが、実際それは  $X_I$  上到る所定義され、従って  $\operatorname{PGL}_2(K) = \operatorname{Aut}(X_I/R)$  となる ( $R$  上の scheme の  $R$  上の自己同型群が  $K$  上の代数群!)。次の様な無限個の simplices からなる 1 次元単体複体  $I$  を考える。即ち ( $I$  の 0 次元 simplex の集

合) = ( $X_{I,0}$  の成分の集合) とし, 0 次元 simplices  $v_1, v_2$  ( $v_1 \neq v_2$ ) がある (unique な) 1 次元 simplex に含まれるのは対応する  $X_{I,0}$  の成分  $E_1, E_2$  が交わるときとする。 $PGL_2(K)$  は  $I$  に作用する。

さて torsion-free discrete subgroup  $\Gamma \subset PGL_2(K)$  で  $\Gamma \backslash PGL_2(K)$  が compact となるものを考える。そのとき以下の手順で  $R$  上の curve  $X_\Gamma$  が構成される (その意味で  $X_I$  は  $X_\Gamma$  の類似物なのである)。 $\mathcal{X}_I$  を  $X_I$  の special fibre  $X_{I,0}$  に沿って formal completion とする。然らば  $\Gamma$  の  $\mathcal{X}_I$  への作用は Zariski topology に廻して不連続的であり  $R$ -formal scheme category で quotient  $\mathcal{X}_\Gamma = \Gamma \backslash \mathcal{X}_I$  が存在する。 $\mathcal{X}_\Gamma$  は  $Spf(R)$  上 proper であり dualizing sheaf  $(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\Gamma/R})^\vee$  は  $\mathcal{X}_{\Gamma,0} = \mathcal{X}_\Gamma \times \text{Spec}(F_p)$  上 ample である。従って GAGA により  $R$  上の projective scheme  $X_\Gamma$  が唯一存在し  $\mathcal{X}_\Gamma$  は  $X_\Gamma$  の  $X_{\Gamma,0}$  に沿って formal completion となる。 $X_{\Gamma,0}$  は genus  $\geq 2$  の non-singular curve となる。一方、有限単体複体  $\Gamma \backslash I$  を考えると,  $X_{\Gamma,0}$  の成分及びその交わり方は上記の如き意味で  $\Gamma \backslash I$  で記述される。

$f=2$  で絵を書くと例えば次の様になる。



さて、以上の構成を一般化することを念頭に置いて torus embedding の立場から見直してみる。

$\Gamma$  の simplex  $\sigma$  に対して  $X_{\sigma}^{imm} = X_I - (\sigma \text{ に含まれない } \Gamma \text{ の vertices} \text{ に} \text{ 対応するすべての成分})$  とおく。然らば  $X_I = \bigcup \sigma X_{\sigma}^{imm} = \bigcup_{\dim(\sigma)=1} X_{\sigma}^{imm}$ .

一方、 $PGL_2(K)$  は  $\Gamma$  の 1 次元 simplex の集合に transitive に作用する。 $\gamma \in PGL_2(K)$  に対して  $X_{\gamma\sigma}^{imm}$  は  $X_{\sigma}^{imm}$  の copy であるから、 $\rightarrow$  の 1 次元 simplex  $\sigma$  に対して  $X_{\sigma}^{imm}$  を作ればよい。 $\pi$  を  $R$  の素元として、 $P_R^1 = \text{Proj } R[x, y]$  の  $\pi = y = 0$  を center とする blown-up  $B$  を考える。と  $B = \text{Proj } R[\pi x^2, xy, y^2]$  であるが  $B$  は次の様に言うことができる。 $T = \begin{bmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{bmatrix} \subset SL_2$  を考える。

$X^*(T)$ ,  $X_*(T)$  を  $T$  の character 全体のなす加群, multiplicative one-parameter subgroup 全体のなす加群とする。  $\varepsilon \in X^*(T)$ ,  $\lambda \in X_*(T)$  と  $\varepsilon: [\frac{t}{t}] \rightarrow t$ ,  $\lambda: t \rightarrow [\frac{t}{t}]$  とすれば  $X^*(T) = \mathbb{Z}\varepsilon$ ,  $X_*(T) = \mathbb{Z}\lambda$ 。 $X_*(T)_{\mathbb{R}} = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  は次のように affine Weyl chamber に分割されて 1 次元単体複体となる。

$$X_*(T)_{\mathbb{R}} = \left( \text{---} \cdot \right)$$

simplex  $\sigma = [0, \frac{1}{2}\lambda]$  に対して torus embedding  $T_\sigma$  が定義されるが今の場合  $T_\sigma = \text{Spec } \mathbb{R}[t, \pi t^{-2}]$  である。  $T$  は  $SL_2$  の自然な  $\mathbb{P}^1$  への作用により  $\mathbb{P}^1$  に作用する。そのとき  $B = T \setminus (T_\sigma \times \mathbb{P}_R^1)^{ss}$  である。但し semi stability は  $\mathcal{O}_{T_\sigma} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$  に関して考えるものとする。ここで "blowing-up" を使わずに torus embedding を用いて  $X_I$  が構成されたことになる。我々はこの立場で一般的な構成をすることになる。

Remark  $D$  を既約有界対称領域とし  $Y$  をその compact dual とする。そのとき、複素单纯 Lie 群  $G$  とその maximal parabolic subgroup がある。て  $Y = G/P$  と書ける。 $D$  が  $l$  次元 unit ball なら  $Y = \mathbb{P}^l(\mathbb{C}) = SL_{l+1}(\mathbb{C}) / \boxed{\mathbb{C}^*}$  また一般に  $Y$  は projective で  $\text{Pic}(Y) = \mathbb{Z}$  である。

## 2° 一般的構成

data  $(R, G, X, \mathcal{O}_X(1), p, \phi)$  から出発する。ここで  $R$  は前と同じ、 $G$  は  $R$  上の split simple simply connected group scheme,  $X$  は  $R$  上の projectiveかつflatな integral scheme  $\mathcal{O}_X(1)$  は  $X$  上の ample sheaf,  $p: G \times_R X \rightarrow X$  は  $G$  の  $X$  への作用,  $\phi: p^* \mathcal{O}_X(1) \xrightarrow{\sim} p_X^* \mathcal{O}_X(1)$  は  $G$  の  $\mathcal{O}_X(1)$  への作用とする。但し  $p_X: G \times_R X \rightarrow X$  は projection。これらに対して次の如き  $(X_I, \mathcal{O}_{X_I}(d), p_I, \phi_I)$  を構成する。  
 $X_I$  は  $R$  上の locally of finite type scheme で flatかつ  $X_{I,\eta} = X_\eta$ ,  $\mathcal{O}_{X_I}(d)$  は  $X_I$  上の invertible sheaf である。て  $\mathcal{O}_{X_I}(d)|_{X_{I,\eta}} = \mathcal{O}_X(d)|_{X_\eta}$  ここで  $d$  は構成の途中で unique に定まる正整数,  $p_I$  は抽象群  $G(K)$  の  $X_I$  への作用で  $X_{I,\eta} = X_\eta$  上では  $p$  から induce される  $G(K)$  の  $X_\eta$  への作用と一致するもの,  $\phi_I$  は  $G(K)$  の  $\mathcal{O}_{X_I}(d)$  への作用である。て  $X_{I,\eta}$  上では  $\phi$  から induce される  $G(K)$  の  $\mathcal{O}_X(d)|_{X_\eta}$  への作用と一致するものである。

$G = SL_2$ ,  $X = \mathbb{P}_R^1$ ,  $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$  のときは 10 のものと一致する。このときは  $d=2$  であって  $\mathcal{O}_{X_I}(-2)$  は dualizing sheaf  $(\mathcal{O}_{X_I/R})$  と  $SL_2(K)$ -equivariant に isomorphic である。

$X_I$  の構成は Toroidal Embeddings I, pp202-209 がヒントとなる。以下その要領を述べる。

$T$  を  $G$  の maximal split torus とし,  $X_*(T)$  を  $T$  の multiplicative one-parameter subgroup 全体のなす加群とする。

$X_*(T)_{\mathbb{R}} = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  は affine Weyl chamber  $\Lambda$  の分割により單体複体となり,  $G(K)$  の Bruhat-Tits building  $I$  の sub-complex と見なされる。 $X_*(T)_{\mathbb{R}}$  の simplex  $\sigma$  を  $\rightarrow$  fixする。然らば torus embedding  $T_{\eta} \subset T_{\sigma}$  が定義され,  $T$  は  $T_{\sigma} \times X$  に自然に作用する。 $T$  は  $\mathcal{O}_{T_{\sigma}} \otimes \mathcal{O}_X(1)$  にも作用し, この作用に属する  $T_{\sigma} \times X$  の semi-stable pts [resp. stable pts] 全体のなす  $T_{\sigma} \times X$  の open subscheme を  $(T_{\sigma} \times X)_{\mathbb{R}}^{\text{ss}}$  [resp.  $(T_{\sigma} \times X)_{\mathbb{R}}^{\text{s}}$ ] と書き  $X_{\sigma}^{\text{comp}} = T \setminus (T_{\sigma} \times X)_{\mathbb{R}}^{\text{ss}}$  [resp.  $X_{\sigma}^{\text{geom}} = T \setminus (T_{\sigma} \times X)_{\mathbb{R}}^{\text{s}}$ ] とおく。 $X_{\sigma}^{\text{comp}}$  は  $\mathbb{R}$  上 projective である。 $X_{\sigma, \eta}^{\text{comp}} = X_{\sigma, \eta}^{\text{geom}} = X_{\eta}$  である。適当な正整数  $d$  に対して  $\mathcal{O}_{T_{\sigma}} \otimes \mathcal{O}_X(d)$  は  $X_{\sigma}^{\text{comp}}$  に descent  $\mathcal{O}_{X_{\sigma}^{\text{comp}}}(d)$  を持つ。次に  $\sigma$  を一般に  $I$  の simplex とする。 $G(K)$  は  $I$  に作用しているが, ある  $g \in G(K)$  があって  $g\sigma \subset X_*(T)_{\mathbb{R}}$  となる。 $X_{\sigma}^{\text{comp}}$  及び  $\mathcal{O}_{X_{\sigma}^{\text{comp}}}(d)$  を  $X_{g\sigma}^{\text{comp}}$ ,  $\mathcal{O}_{X_{g\sigma}^{\text{comp}}}(d)$  の  $g$  でひねった copy とする。然らば  $X_{\sigma}^{\text{comp}}$ ,  $\mathcal{O}_{X_{\sigma}^{\text{comp}}}(d)$  は "well-defined" であることが分かる。

$\mathbb{G} = \mathrm{SL}_2$ ,  $X = \mathbb{P}^1$  のときは  $\dim(\sigma) = 0$  なら  $X_\sigma^{\mathrm{comp}} \cong \mathbb{P}_R^1$ ,  $\dim(\sigma) = 1$  なら  $X_\sigma^{\mathrm{comp}} \cong \mathrm{Proj} R[\pi_1 x^2, xy, y^2]$  となることは前に述べた。

さて一般の data に戻って、我々の idea は  $\Gamma$  の simplex  $\sigma$  に対して  $X_\sigma^{\mathrm{comp}}$  の open subscheme  $X_\sigma^{\mathrm{imm}}$  を適当にとてそれらをはり合わせて  $X_\Gamma = \bigcup_{\sigma \subset \Gamma} X_\sigma^{\mathrm{imm}}$  を得ようというものであった。それは次のようにする。

まず次のことが分かる。一般に  $\Gamma$  の simplex  $\sigma$  に対して  $H_\sigma = \{g \in G(K); g\sigma = \sigma\}$  とおく。

(1) simplex  $\sigma \subset X_*(\Gamma)_R$  及び  $h \in H_\sigma$  をとる。そのとき  $p_\sigma(h)$ :

$T_\sigma \times_R X \longrightarrow T_\sigma \times_R X$  であって  $(T_\sigma \times_R X)_\eta = T_\eta \times_K X_\eta$  で  $(\tau, x) \mapsto (\tau, \tau h \tau^{-1} \cdot x)$  となるものが唯一つ存在する。 $p_\sigma$  は  $H_\sigma$  の  $T_\sigma \times_R X$  への作用をを与える。 $T(R) \subset H_\sigma$  である。

(2)  $N$  を  $T$  の normalizer とする。 $N(K)$  の  $\Gamma$  への作用は  $X_*(\Gamma)_R$  を不变にする。simplex  $\sigma \subset X_*(\Gamma)_R$  と  $(n_1, n_2) \in T(K) \cdot N(R)$  (半直積) をとる。 $n = n_1 n_2 \in N(K)$  とおく。

そのとき,  $p(n_1, n_2): T_\sigma \times_R X \longrightarrow T_{n\sigma} \times_R X$  であって generic fibre で  $(\tau, x) \mapsto (n_2 \tau n_1^{-1} n_1^\dagger, n_2 \cdot x)$  となるものが唯一つ存在する。

さて次の (a)~(d) を満たす system  $\{(T_\sigma \times_R X)^{\mathrm{aff}}; \sigma \subset X_*(\Gamma)_R\}$  を考える。

(a) 各  $\sigma \subset X_*(T)_R$  に  $\tau \subset \sigma$

$$T_\tau \times_R X_\tau \subset (T_\sigma \times_R X)^{\text{aff}} \underset{\text{open}}{\subset} (T_\sigma \times_R X)^s$$

(b) 各  $\sigma \subset X_*(T)_R$  に  $\tau \subset \sigma$ ,  $(T_\sigma \times_R X)^{\text{aff}}$  は  $T$ -invariants かつ  $f_T(T(R))$ -invariants.

(c) 各  $\sigma \subset X_*(T)_R$  及び  $(n_1, n_2) \in T(K) \cdot N(R)$  に  $\tau \subset \sigma$  で  $n = n_1 n_2$

$$\in N(K)$$
 とあくとき,  $f((n_1, n_2)(T_\sigma \times_R X)^{\text{aff}}) = (T_{n\sigma} \times_R X)^{\text{aff}}$ .

(d) 各  $\sigma \subset X_*(T)_R$  とその face  $T$  に  $\tau \subset \sigma$ ,  $T_\tau \underset{\text{open}}{\subset} T_\sigma$  であるが,  $(T_\tau \times_R X)^{\text{aff}} = (T_\sigma \times_R X)^{\text{aff}} \cap (T_\sigma \times_R X)$ .

一方 (a)~(d) を満たす system の中で最大のものが唯一存在することが分かる。そこで、

(e)  $\{(T_\sigma \times_R X)^{\text{aff}}; \sigma \subset X_*(T)_R\}$  は (a)~(d) のもとで最大とする。

(a), (b) により  $\sigma \subset X_*(T)_R$  に  $\tau \subset \sigma$  で  $X_\sigma^{\text{aff}} = T \setminus (T_\sigma \times_R X)^{\text{aff}}$  とあくと  $X_\sigma^{\text{aff}}$  は universal geometric quotient であり  $X_\sigma^{\text{aff}} \underset{\text{open}}{\subset} X_\sigma^{\text{geom}}$  である。  $H_\sigma$  の  $T_\sigma \times_R X$  への作用は  $T$  の  $T_\sigma \times_R X$  への作用と可換であり、従って  $H_\sigma$  は  $(T_\sigma \times_R X)^{\text{ss}}$  に作用しその作用は  $X_\sigma^{\text{comp}}$  に descent する。そこで  $X_\sigma^{\text{imm}} = \bigcap_{R \in H_\sigma} X_\sigma^{\text{aff}}$  とあくと  $X_\sigma^{\text{imm}} \underset{\text{open}}{\subset} X_\sigma^{\text{comp}}$  であり  $X_\sigma^{\text{imm}}$  は  $H_\sigma$  で不变である。

$\sigma \subset X_*(T)_R$  に対して  $X_\sigma^{\text{imm}}$  が定義されたか 一般の

$\sigma \subset I$  に対しては  $g \in G(K)$  で  $g\sigma \subset X_*(T)_R$  となるものをとり  $X_\sigma^{\text{imm}}$  を  $g$  でひねった  $X_{g\sigma}^{\text{imm}}$  の copy として定義する。然るば  $\sigma \subset I$  について  $X_{\sigma, \eta}^{\text{imm}} = X_\eta$  であり、 $\sigma$  が  $I$  の face である時は自然に  $X_\sigma^{\text{imm}} \subset X_I^{\text{imm}}$  である。そこで  $X_I = \bigcup_{\sigma \subset I} X_\sigma^{\text{imm}}$  を  $\sigma \cap \tau = \emptyset$  なら  $X_\sigma^{\text{imm}} \cap X_\tau^{\text{imm}} = X_\eta$ ,  $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$  なら  $X_\sigma^{\text{imm}} \cap X_\tau^{\text{imm}} = X_{\sigma \cap \tau}^{\text{imm}}$  として定義する。 $X_\sigma^{\text{comp}}$  上の invertible sheaf  $\mathcal{O}_{X_\sigma^{\text{comp}}}(d)$  から  $X_I$  上の invertible sheaf  $\mathcal{O}_{X_I}(d)$  が作られ  $G(K)$  は  $X_I$  及び  $\mathcal{O}_{X_I}(d)$  に自然に作用することが分かる。

$\mathfrak{X}_I$  及び  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_I}(d)$  を  $X_I$  及び  $\mathcal{O}_{X_I}(d)$  の special fibre に沿った formal completion とする。然るば  $G(K)$  は  $\mathfrak{X}_I$  及び  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_I}(d)$  に作用する。今ま torsion-free discrete subgroup  $T \subset G(K)$  で  $T \backslash G(K)$  が compact となるものを考えると  $T$  の  $\mathfrak{X}_I$  への作用は Zariski topology に因て不連続的であり  $R$ -formal scheme category で quotient  $\mathfrak{X}_T = T \backslash \mathfrak{X}_I$  が取れまた  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_I}(d)$  は  $\mathfrak{X}_T$  へ descent を持つ。即ち  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_T}(d) = T \backslash \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_I}(d)$ 。 $\mathfrak{X}_T$  は  $R$  上 of finite type である。

Remark (i)  $G = \mathrm{SL}_2$ ,  $X = \mathbb{P}^1$  の場合,  $d=2$  であって,  $\mathfrak{X}_T$  は  $\mathrm{Spf}(R)$  上 proper であり,  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_T}(-2)$  は  $\mathfrak{X}_{T,0} = \mathfrak{X}_T \times_R \mathbb{F}_q$  上で ample であった。従って algebrization が出来た。

(ii) 一般に  $\mathcal{X}_\pi$  は  $\text{Spf}(R)$  上 proper とは限らない。例えば  $G = \text{SL}_2$  とし  $G$  の  $m$  次対称表現を考え、それにより  $X = \mathbb{P}^m$  に作用させる。そのとき、 $\mathcal{X}_\pi$  が  $R$  上 proper となるのは  $m = \text{odd}$  のときである。

$m \geq 3, m = \text{odd}$  のときに  $\mathcal{X}_\pi$  が algebraizable かどうかは知らない。

(iii)  $G = \text{SL}_{l+1}, X = \mathbb{P}^l$  のときは後に述べる様に  $d = l+1$  であって  $\mathcal{X}_\pi$  は  $R$  上 proper であり  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\pi}(-l+1)$  は  $\mathcal{X}_{\pi,0}$  上 ample である。しかし、一般的の  $G$  と  $X = G/P$  ( $P$  は特に maximal parabolic subgroup) については  $\mathcal{X}_\pi$  は proper ではない様に思われる。しかし例えば  $G = \text{Sp}_2, X = \text{Sp}_2 / \begin{smallmatrix} & 1 \\ 1 & \end{smallmatrix}$  のときは  $d = 2$  であって  $\mathcal{X}_\pi$  は  $R$  上 proper ではないが  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\pi}(-2)$  は  $\mathcal{X}_{\pi,0}$  上 ample である。

### 3° $p$ -adic unit fall

2° の data を  $G = \text{SL}_{l+1}, X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^l, \mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^l}(1)$  と特殊化する。作用は自然なものを考える。然らば  $d = l+1$  であり  $\mathcal{X}_\pi$  は  $\text{Spf}(R)$  上 proper であり  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\pi}(-l+1)$  は  $\mathcal{X}_{\pi,0}$  上 ample である。従ってEGAIIIのGAGAにより  $\mathcal{X}_\pi, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_\pi}(-l+1)$  は algebraize されて  $X_\pi, \mathcal{O}_{X_\pi}(-l+1)$  となる。 $X$  では  $\mathcal{O}_X(\text{positive})$  が ample であったが  $X_\pi$  では  $\mathcal{O}_{X_\pi}(\text{negative})$

が ample となるところが興味深い。 $X_\pi$  は  $R$  上 locally a complete intersection であるか dualizing sheaf  $(\mathcal{O})_{X_\pi/R}$  に  $\rightarrow$  して  $(\mathcal{O})_{X_\pi/R} \cong \mathcal{O}_{X_\pi}(-l+1)$  である。 $X_{\pi,\eta}$  は smooth である、 $X_\pi$  は regular scheme である。 $X_{\pi,0}$  は  $l$  次元有限単体複体  $\pi \setminus \Gamma$  で記述される。即ち  $X_{\pi,0}$  の成分  $E$  と  $\pi \setminus \Gamma$  の vertex  $v$  は bijective であって、成分  $E_1, \dots, E_m$  と対応する vertices  $v_1, \dots, v_m$  について  $E_1, \dots, E_m \neq \emptyset \Leftrightarrow v_1, \dots, v_m$  はある simplex に含まれる。

次の表示が出来る。

$$\begin{aligned} X_\pi &= \text{Proj } \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X_\pi, \mathcal{O}_{X_\pi}(-n(l+1))) \\ &= \text{Proj } \bigoplus_{n \geq 0} H^0(\mathcal{X}_\pi, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_\pi}(-n(l+1))) \\ &= \text{Proj } \bigoplus_{n \geq 0} \left[ H^0(\mathcal{X}_\Gamma, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_\Gamma}(-n(l+1))) \right]^{\pi \text{-inv}} \end{aligned}$$

従って rank 有限の  $R$ -free module  $H^0(\mathcal{X}_\Gamma, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_\Gamma}(-n(l+1)))^{\pi \text{-inv}}$  の元を保型形式と考えることが自然である。

筆者は次のことを証明しようとしている。 $\mu$  を  $SL_{l+1}(K)$  の invariant measure で open compact subgroup  $SL_{l+1}(R)$  に対して  $\mu(SL_{l+1}(R)) = (1-g)(1-g^2) \cdots (1-g^l)$  であるものとする。 $l = \text{odd}$  なら負の measure である。

(Conj.)  $X_{\pi,\eta}$  は  $\mathbb{P}^l$  と proportional であってその proportional constant は  $\mu(\pi \setminus SL_{l+1}(K))$  である。

即ち  $i_1, \dots, i_k$  を positive integer で  $i_1 + \cdots + i_k = l$  あるものと

すれば Chern number の間に

$$c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k} [X_{\pi, \eta}] = \mu(T \backslash \mathrm{SL}_{k+1}(K)) \cdot c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k} [\mathbb{P}^l]$$

ある関係がある。

$l=1$  では容易。  $l=2$  のときは Mumford; An algebraic surface with K ample,  $(K^2)=9$ ,  $P_g=q_f=0$ , to appear, による。  $l=3$  のときも同様の方法で計算することが出来る。

以下では (Conj) が成立つものとて話を進める。特に  $l=1, 2, 3$  では正り。然らば Hirzebruch と同様に

$$\mathrm{rank}_R H^0(\mathcal{L}_I, \mathcal{O}_{\mathcal{L}_I}(-\nu(l+1)))^{T-\text{inv}} = \binom{(l+1)\nu-1}{l} (-1)^l \mu(T \backslash \mathrm{SL}_{k+1}(K)).$$

for  $\nu \geq 2$  when  $\mathrm{ch}(K)=0$

for  $\nu \gg 0$  when  $\mathrm{ch}(K) \neq 0$ .

また Yau の結果により次の (i)~(iii) は 同値である。  $\mathbb{C}$  上の non-singular projective variety  $V$  に対して,  $n=\dim(V)$  とすると,

(i)  $V$  の universal covering は unit ball である。

(ii)  $V$  の canonical class は ample で  $V \subset \mathbb{P}^n$  は proportional である。

(iii)  $V$  の canonical class は ample で  $C_1^{n-2} C_2[V] : C_1^n [V] = C_1^{n-2} C_2[\mathbb{P}^n] : C_1^n [\mathbb{P}^n]$ .

従って  $\mathrm{ch}(K)=0$  のとき  $X_{\pi, \eta}$  を任意に  $\mathbb{C}$  上の variety に specialize すればそれを  $\hat{X}_{\pi, \eta}$  と書くとき  $\hat{X}_{\pi, \eta}$  の universal covering は いまだ unit ball となる。

## References

- [1] D. Mumford, An analytic construction of degenerating curves over complete local rings, *Compositio Math.*, 24 (1972), 129–174.
- [2] I.V. Čerednik, Towers of algebraic curves uniformized by discrete subgroups of  $PGL_2(k_w) \times E$ , *Mat. Sbor.*, 99 (141) (1976), 211–247.
- [3] ———, Uniformization of algebraic curves by discrete arithmetic subgroups of  $PGL_2(k_w)$  with compact quotients, *Mat. Sbor.*, 100 (142) (1976), 59–88.
- [4] V.G. Drinfel'd, Coverings of  $p$ -adic symmetric regions, *Funct. Anal. Appl.*, Vol. 10, No. 2 (1976), 107–115.
- [5] G.A. Mustafin, Non-archimedean uniformizations, *Mat. Sbor.* 105 (147) (1978), 207–237.

Л. 1