代数幾何学シンポジウム記録
1978年度　pp.177-201

Yang-Mills 方程式の解の空間について

京大数理研　　村瀬元彦

§0. Introduction

Eを3次元複素射影空間 $\mathbb{P}^3$ 上の simple algebraic vector bundle of rank n とする．以下ではEの Chern number が，$c_1(E)=0$，$c_2(E)>0$ となっている様なものを扱う．さらに，$\mathbb{P}^3$ の general line ℓ に対し，Eの ℓ への制限 $E|_\ell$ が algebraically trivial になっていると仮定する．（例えば rank が2の場合には $c_1(E)=0$ のもとでこの仮定は常に満たされる．Grauert-Mülich の定理，Barth [4].）

$E|_\ell$ が代数的に自明でない様な $\mathbb{P}^3$ の projective line ℓ を jumping line of E と呼ぶ．

Problem

上の様なEに対しては，その isomorphism class はEの jumping lines によって決まるか？

例えば rank=2 の時，$c_2(E)=1,2$ であれば肯定的

である．(Hartshorne [6])．

さて，一方で，1977年あたりから，物理学で扱われていた "instanton" が実は上に述べた代数的 vector bundle の実例を与えることが知られるようになった．ここで instanton とは次の様なものである；実4次元球面 S^4 を底空間に持ち $SU(n)$ を構造群とする C^∞-principal fibre bundle $\mathbb{P}$ をひとつ固定したとき，$\mathbb{P}$ 上の C^∞-connection form ω であって，それから作った curvature form の L^2-norm が最小になるようなもの．(Instanton と vector bundle の対応については [3]，[7] を参照．また「数学」第30巻第2号 pp. 160 に簡潔な解説がある．)

ここでは次の結果を紹介する；

Theorem 1. (pp. 12)

$SU(2)$-instanton に対応する rank 2 の vector bundle に対しては，その同型類は jumping lines によって定まる．(cf. Hartshorne [5]，pp. 15.)

実は "irreducible" という条件のもとで，上の定理は $SU(3)$-instanton に対応する rank 3 の vector bundle に

ついても成立する．一般の irreducible $SU(n)$-instanton ($n \geq 4$) についても正しいであろうと思われるがまだ判らない．以下では主に $SU(2)$ の場合を扱い，$n \geq 3$ については §3 で簡単に触れるにとどめる．詳しくは [9] 参照．

Instanton は S^4 上に定義された (anti-) self-dual Yang-Mills 方程式と呼ばれる1階の非線型微分方程式の解としても特徴づけられる．Atiyah-Hitchin-Singer は index theorem を用いてその解空間の次元をもとめたが ([1])，具体的にどんな幾何学的 parameter によって解が決まるのか，はその結果からは出ない．

ところで，E の jumping lines は，$\mathbb{P}^3$ の lines を分類する Grassmann manifold $Gr(1,3)$ 上の divisor を為している．この $Gr(1,3)$ は S^4 の natural な複素化になっており，しかも jumping lines の為す divisor と connection ω の "poles" の為す divisor とが一致しているのである．その divisor の degree は，$Pic(Gr(1,3)) \cong \mathbb{Z} \cong H^4(\mathbb{P}^3, \mathbb{Z})$ の元として $c_2(E)$ に等しい．Instanton から algebraic vector bundle への対応が1対1であるこ

とから，次の定理が成り立つ．

Theorem 2.

(Anti-) self-dual Yang-Mills方程式の解は，その複素領域に於ける“poles”の場所によって決まる．

§1. では instanton について簡単に述べる．§2. で theorem 1 の証明を行ない，§3. で rank が高い場合（即ち $SU(n)$ $n \geqq 3$ の場合）について少し触れる．“Pole”についての話は [8] に譲る．

§1. Instantons.

（文献は Atiyah-Ward [3], Hartshorne [5], [7] の他，general reference として Atiyah et.al. [2] を挙げる．）

実4次元球面 $S = S^4$ を底空間とする位相的 $SU(n)$-principal bundle を P とする．P に associate した rank n の vector bundle を $E = P \times_{SU(n)} \mathbb{C}^n$ で表わす．P の位相的同型類は第2 Chern 類 $c_2(P) \in H^4(S, \mathbb{Z})$ によって定まるが，S に unique C^ω-structure を入れた時，P の実解析的同型類も $c_2(P)$ によって

決まるので，以下ではPはC^ω-bundleと仮定してよい．

Sの向きを固定して同型$H^4(S,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$を決めたとき，$c_2=c_2(P)>0$となる様な$P$のみを扱う．$\omega$を$P$の$C^\omega$-connection form，$\Omega$を対応するcurvature formとする．$\Omega=d\omega+\frac{1}{2}[\omega,\omega]$である．$\Omega$をLie環$su(n)$に値を持つ2-form on Sと見為せばHodge star operatorによる$*\Omega$が定義出来る．

Proposition 1.

次の(1)，(2)は同値；

(1) ωは$\|\Omega\|^2 \underset{\text{def}}{=} -\frac{1}{4\pi^2}\int_S \operatorname{trace}(\Omega\wedge*\Omega)$の最小値を与える．

(2) ωは$*\left(d\omega+\frac{1}{2}[\omega,\omega]\right)=-\left(d\omega+\frac{1}{2}[\omega,\omega]\right)$を満たす．

（証明は簡単な計算で出来る．[7]参照）

上の(1) or (2)を満たすconnection ωを<u>SU(n)-instanton</u>と呼ぶ．また(2)の方程式をanti-self-dual Yang-Mills方程式という．（これに対し$*\Omega=\Omega$をself-dual Yang-Mills方程式と呼ぶ．Self-dualとanti-self-dual の違いは S の orientation によるものなので本質的ではない．以下では専ら anti-self-dual 方程式を扱う．)

ω を P の instanton とすれば，

$$\|d\omega + \tfrac{1}{2}[\omega, \omega]\|^2 = c_2(P)$$

が成立する．つまり curvature の L^2-norm の最小値は $c_2(P)$ で与えられている．この時 $c_2 = c_2(P) \in \mathbb{Z}$ を "instanton number" と称し，ω を c_2-instanton solution と呼ぶことがある．

<u>Definition 1.</u>

P の C^ω-bundle automorphism $f: P \to P$，即ち C^ω-diffeomorphism で各 fibre を保ち，$\forall g \in SU(n)$, $\forall p \in P$ に対し $f(p \cdot g) = f(p) \cdot g$ を満たす f，を gauge 変換と呼ぶ．P の 2 つの connection ω, ω' に対して，

$\omega' = f^* \omega$ 　なる gauge 変換 f が存在するとき ω と ω' とは gauge 同値である，と称する．

$SU(n)$ の自己の上への作用を conjugation で定めるとき，$f \in \Gamma(P \times_{SU(n)} SU(n))$ と思うことが出来

る．従って local trivializations をまとめて $\mathbb{P}$ を変換函数系 $\{g_{\mu\nu}\}$ で表わせば，f は，

$f=\{f_\mu\}$，各 f_μ は $f_\mu = g_{\mu\nu} f_\nu g_{\mu\nu}^{-1}$ を満たす $SU(n)$-valued function，のように表示出来る．このとき，f は $\Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ なる線型変換を定義することが判る．

Gauge 同値なものを除いてどのくらい instanton があるか，を問題にする．

§2. Algebraic Vector Bundles over $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$

$\mathbb{H}$ を Hamilton 4元数体とする．$\mathbb{H} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \cong \mathbb{C}^2$ と見て $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 \cong \mathbb{H}^2/\mathbb{C}^*$ とすれば，$j: \mathbb{H}^2 \ni (h_1, h_2) \rightsquigarrow (jh_1, jh_2) \in \mathbb{H}^2$ によって involution $j: \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ が定義される．

$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 \cong \mathbb{H}^2/\mathbb{C}^* \xrightarrow{\ \pi\ } \mathbb{H}^2/\mathbb{H}^* \cong S^4 = S$ なる natural projection を π で表わす．Involution j は π の各 fibre を保つ．

Theorem. (Atiyah-Ward [3])

SU(n)-Instanton ω は gauge 同値なものを除いて 1 対 1

に $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ 上の $\overbrace{\text{vector bundle}}^{\text{rank } n}$ $E(\omega)$ に対応する．また，

$c_1(E(\omega))=0$，$c_2(E(\omega))=c_2(P)>0$ であり，$\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ の general line l への制限 $E(\omega)|_l$ は代数的自明である．

証明は，induced bundle π^*P の fibre を $SL(n,\mathbb{C})$ に拡大したものに $\pi^*\omega$ によって almost complex structure を入れ，ω が instanton であることとその almost c.s. が integrable であることとが同値であることを用いて行なわれる．（[2]，[7] 参照）

$\mathbb{P}^3$ に同次座標 $(z_0:z_1:z_2:z_3)$ を入れ，対応する Plücker 座標を p_{ij} で表わす．これと次の関係にあるような $\mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$ の同次座標をとる；

$$\begin{pmatrix} p_{01} \\ p_{23} \\ p_{02} \\ p_{13} \\ p_{03} \\ p_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & -1 & & & & \\ & & 1 & -i & & \\ & & 1 & i & & \\ & & & & 1 & -i \\ & & & & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$ の中で方程式 $z_0^2=z_1^2+\cdots+z_5^2$ によって定義される2次超曲面を Gr と書く．Gr は，$\mathbb{P}^3$ の line を分類する Graßmann manifold $Gr(1,3)$ に等しい；

$Gr=Gr(1,3)$．このとき，$\mathbb{P}^3$ の involution j によって natural に $\mathbb{P}^5$ に involution が induce される．そ

れは同次座標 $(z_0:\cdots:z_5)$ に関する complex conjugation に他ならない．その involution による Gr の不動点は，従って $S=S^4$ である．

$Fl = Fl(0,1,3) \hookrightarrow Gr\times \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ を flag variety, $\alpha: Fl\to Gr$, $\beta: Fl\to\mathbb{P}^3$ を自然に定義される projection, $\tau:\mathbb{P}^3 \rightsquigarrow Gr$ を algebraic correspondence とする．

$$\begin{tikzcd} & Fl \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ Gr & & \mathbb{P}^3 \arrow[ll, squiggly, "\tau"] \end{tikzcd}$$

S を Gr の real point として埋め込む写像を ι で表わせば，次の図式は可換になる；

$$\begin{tikzcd} & Fl \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ Gr \arrow[rr, phantom, "\circlearrowright"] & & \mathbb{P}^3 \arrow[dl, "\pi"] \\ & S \arrow[ul, hook, "\iota"] & \end{tikzcd}.$$

c_2-instanton ω と，ω に対応する $\mathbb{P}^3$ 上の vector bundle $E(\omega)$ をとる．$c_1(E(\omega))=0$ に注意すれば，$\mathbb{P}^3$ の任意の line ℓ に対し，

$$E(\omega)|_\ell \neq \text{trivial} \iff h^1(E(\omega)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)|_\ell)\neq 0$$

であることが判る．そこで，次のように定義しよう；

Definition. 2.

$$\operatorname{supp}\left(R^1\alpha_*\beta^*\left(E(\omega)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)\right)\right) = J(\omega) \hookrightarrow Gr(1,3)$$

を $E(\omega)$ の jumping lines の為す set と呼ぶ.

$J(\omega) \ni x \iff E(\omega)|_{\tau^{-1}(x)} \neq \text{trivial}$, が成り立つ.

よって, α は local には $Gr\times\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\text{proj.}} Gr$ なる projection と同型だから, $\alpha_*\beta^*E(\omega)|_{Gr-J(\omega)}$ は $Gr-J(\omega)$ 上の locally free sheaf になることが判る. また, その

$$\begin{tikzcd}
 & & \beta^*E(\omega) \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
\alpha_*\beta^*E(\omega) \arrow[d] & & Fl \arrow[dll, "\alpha"'] \arrow[drr, "\beta"] & & E(\omega) \arrow[dll] \arrow[d] \\
Gr & & E \arrow[ull] \arrow[d] & & \mathbb{P}^3 \arrow[dll, "\pi"] \\
 & & S \arrow[ull, "\iota"] & &
\end{tikzcd}$$

の vector bundle としての引きもどしは

$$\iota^*\left(\alpha_*\beta^*E(\omega)|_{Gr-J(\omega)}\right) = E \quad (\text{real analytic bundle として})$$

を満たすので,

$$\widetilde{E}_\omega \underset{\text{def}}{=\!=} \alpha_*\beta^*E(\omega)|_{Gr-J(\omega)}$$ を実解析的 vector bundle E の“解析接続”と呼ぶことにする.

以下では SU(2)-instanton, 即ち rank 2 の vector bundle のみを扱う. $\mathrm{Pic}(Gr(1,3)) \cong \mathbb{Z}$ に注意する.

<u>Proposition. 2.</u> (Barth [4].)

$n=2$ のとき $J(\omega)$ は $Gr(1,3)$ の divisor であり, その degree を coherent analytic sheaf $R^1\alpha_*\beta^*(E(\omega)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1))$ の第1 Chern class ($\in H^0(Gr, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$) で定義すれば

$$\deg J(\omega) = c_2(E(\omega))$$

が成立する.

(cf. §3.)

Rank 2 の vector bundle $E(\omega)$ はさらに次の性質をもつ;

1) $H^0(\mathbb{P}^3, E(\omega)) = 0$, i.e. $E(\omega)$ は simple. (従ってこの場合は stable.)

2) $\mathbb{P}^3$ の involution j に lying over する bundle map $\tilde{j}$ で, $\tilde{j}: E(\omega) \longrightarrow E(\omega)$, $\forall \xi \in \mathbb{P}^3$ に対し $\hat{j}_\xi : E(\omega)_\xi \to E(\omega)_{j\xi}$, $\hat{j}^2 = -\mathrm{id}_{E(\omega)}$, を満たす anti-linear map $\hat{j}$ が存在する.

2) は $SU(2) \cong Sp(1)$ であることに由来する. つまり $E(\omega)$ は symplectic structure を許す訳である.

実は，0) $c_1(E)=0$, $c_2(E)>0$，1)，2) を満たす rank 2 vector bundle は instanton に対応することが知られている；$\exists\omega$ s.th. $E(\omega)\cong E$.（[3], [5].）

このとき，Gr 上の involution を $\overline{}$ で表わせば，$J(\omega)=\overline{J(\omega)}$ が成り立ち，$\widehat{\tilde{E}}_\omega$ は Gr の complex conjugation $\overline{}$ に lying over する anti-linear involution を持つ.

<u>Theorem. 1.</u>

1°). ω, ω' を2つの $SU(2)$-instantons とする．このとき，$E(\omega)\cong E(\omega') \iff J(\omega)=J(\omega')$（set theoretical に等しい.）

即ち，instanton に対応する vector bundle の isomorphism class はその jumping lines の為す divisor によって定まる.

2°). k-instanton solution ω に対しては $c_2(E(\omega))=k$ が成り立ち，jumping lines の為す set $J(\omega)$ は $J(\omega)=\overline{J(\omega)}$，$J(\omega)\cap S=\phi$ を満たす degree k の divisor である.

従ってすべての k-instantons は，complete linear

system $|kD|$ の subset でパラメトライズされる．ここに D は $\mathrm{Pic}(Gr(1,3))$ の positive generator．
2°) は Barth の定理の帰結である．

<u>Proof.</u> $E(\omega)\cong E(\omega')\Longrightarrow J(\omega)=J(\omega')$ は trivial ゆえ以下では $J(\omega')=J(\omega)\Longrightarrow E(\omega)=E(\omega')$ のみ証明する．

1. Atiyah-Ward によれば，$E\to S$ に適当な local trivialization をとることによって ω を S 上の有理形式として表現出来る．但し S には

$$S=\{x\in \mathbb{P}^5_{\mathbb{R}}\mid x_0^2=x_1^2+\cdots+x_5^2\}$$

によって定まる自然な実代数構造を与えておく．

さて，$Gr-J(\omega)$ は affine 代数多様体ゆえ適当な affine open set で cover し，各々の affine open set の上で bundle $\widetilde{E}_\omega$ が代数的に自明になる様に出来る．その local trivialization に関して，S 上有理的に表示された ω を $Gr-J(\omega)$ に type $(1,0)$ の form として解析接続する．2つの open sets の共通部分では connection form の変換則によってつなぐことにより $Gr-J(\omega)$ 上 global に type $(1,0)$ の connection form $\widetilde{\omega}$ を得る．但し $\widetilde{\omega}$ は pole を持つかも知れ

ないが，もともとωが$\mathcal{S}$上 rational なので，$\tilde{\omega}$ も $Gr-J(\omega)$ 上一価 rational になる．

2.

次にこの証明に於て本質的な役割をはたす命題を述べる．それは微分方程式 $*\Omega=-\Omega$ の幾何学的意味を明らかにするものである：

<u>Proposition. 3</u>（［7］pp. 84，命題 3.）

$\Omega=d\omega+\frac{1}{2}[\omega,\omega]$ に対し，

$$*\Omega=-\Omega \iff \forall \zeta\in\mathbb{P}^3 \quad d\tilde{\omega}+\frac{1}{2}[\tilde{\omega},\tilde{\omega}]\big|_{\tau(\zeta)}\equiv 0.$$

これを用いると次のことが判る．

<u>Lemma 1</u>.

$\tilde{\omega}$ は $Gr-J(\omega)$ で holomorphic．

<u>Proof</u>. $Gr\setminus J(\omega)\ni x$ に対し x を含む affine open set のひとつを U としよう．U 上で $\tilde{E}_\omega|_U$ の trivialization をひとつきめ，それに関して $\tilde{\omega}$ を $su(2)$-valued 1-form として表わす．

$\tau^{-1}(x)$ の相異なる 2 点 ζ_1, ζ_2 をとる．$\tau(\zeta_i)\cap U$ $(i=1,2)$ 上で $\tilde{E}_\omega$ は trivial であり，かつ $\tilde{\omega}|_{\tau(\zeta_i)\cap U}$ は

$d\tilde{\omega}|_{\tau(\zeta_i)\cap U} + \frac{1}{2}[\tilde{\omega},\tilde{\omega}]|_{\tau(\zeta_i)\cap U} = 0$ を満たしているから，この方程式を解くことにより $\tilde{\omega}|_{\tau(\zeta_i)\cap U}$ が $\tau(\zeta_i)\cap U$ 上の正則形式であることを知る．

$\tau(\zeta_1)\cong\tau(\zeta_2)\cong\mathbb{P}^2$ は x で transversal に交わるので x の近傍で $\tau(\zeta_1)$ の座標 x_1, x_2，$\tau(\zeta_2)$ の座標 x_3, x_4 をとって $\tilde{\omega} = \sum_{m=1}^{4} \tilde{\omega}_m(x_1,\cdots,x_4)\,dx_m$ のように表わされる．$x=(0,0,0,0)$ としたとき，

$$\tilde{\omega}|_{\tau(\zeta_1)\cap U} = \tilde{\omega}_1(x_1,x_2,0,0)\,dx_1 + \tilde{\omega}_2(x_1,x_2,0,0)\,dx_2$$

$$\tilde{\omega}|_{\tau(\zeta_2)\cap U} = \tilde{\omega}_3(0,0,x_3,x_4)\,dx_3 + \tilde{\omega}_4(0,0,x_3,x_4)\,dx_4$$

のように表示されるから，$\tilde{\omega}$ は x で正則である．□

3.

$\alpha|_{Fl-\alpha^{-1}(J(\omega))} = \bar{\alpha}$， $\beta|_{Fl-\alpha^{-1}(J(\omega))} = \bar{\beta}$， $\bar{\alpha}\circ\bar{\beta}^{-1} = \bar{\tau}$， と書く．

$$\begin{tikzcd} & Fl-\alpha^{-1}(J(\omega)) \arrow[dl, "\bar{\alpha}"'] \arrow[dr, "\bar{\beta}"] & \\ Gr\setminus J(\omega) & & \mathbb{P}^3 \arrow[ll, "\sim", "\bar{\tau}"'] \end{tikzcd}$$

Lemma 2.

$$\bar{\alpha}^*\bar{\alpha}_*\bar{\beta}^*E(\omega) \cong \bar{\beta}^*E(\omega).$$

Proof. $\alpha : Fl \longrightarrow Gr$ は local には $\mathrm{proj}_1 : Gr\times\mathbb{P}^1 \longrightarrow Gr$

なる 1^{st} factor への projection と同型だから，これは，次の自明な Lemma からの帰結である．

<u>Lemma. 2′.</u>

U を任意の open complex manifold，K を任意の compact complex manifold，$\varphi : U \times K \longrightarrow U$ を 1^{st} factor への projection，とする．$U \times K$ 上の locally free sheaf $\mathcal{F}$ が $\mathcal{F}|_{\varphi^{-1}(u)} = \text{free on } \varphi^{-1}(u)$ for $\forall u \in U$ を満たせば，$\varphi^* \varphi_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$．

$$
\begin{tikzcd}
 & & \bar{\alpha}^*\bar{\alpha}_*\bar{\beta}^*E(\omega) \cong \bar{\beta}^*E(\omega) \arrow[dll] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[drr] & & \\
\bar{\alpha}_*\bar{\beta}^*E(\omega) \arrow[d] & & Fl \setminus \alpha^{-1}(J(\omega)) \arrow[dll, "\bar{\alpha}"'] \arrow[drr, "\bar{\beta}"] & & E(\omega) \arrow[dll] \arrow[d] \\
Gr \setminus J(\omega) & & E \arrow[ull, hook] \arrow[d] & & \mathbb{P}^3 \arrow[dll, "\pi"] \\
 & & S \arrow[ull, hook, "\iota"] & &
\end{tikzcd}
$$

$Fl - \alpha^{-1}(J(\omega))$ には connection $\bar{\alpha}^*\tilde{\omega}$ が定義されている．$\forall z \in \mathbb{P}^3$ に対し $\bar{\beta}^{-1}(z)$ 上で $\bar{\alpha}^*\tilde{\omega}|_{\bar{\beta}^{-1}(z)}$ は flat であるから，$\bar{\beta}^*E(\omega)|_{\bar{\beta}^{-1}(z)}$ の flat section 全体

$$\Gamma_{flat}\left(\bar{\beta}^*E(\omega)|_{\bar{\beta}^{-1}(z)}\right)$$
$$=\left\{ s\in H^0\left(\bar{\beta}^*E(\omega)|_{\bar{\beta}^{-1}(z)}\right) \;\middle|\; ds+\left(\bar{\alpha}^*\tilde{\omega}|_{\bar{\beta}^{-1}(z)}\right)s=0\right\}$$

が，z に holomorphic によって定まる $\mathbb{C}$ 上の 2 次元 vector space として定義できる．そこで z での fiber を $\Gamma_{flat}(\bar{\beta}^*E(\omega)|_{\bar{\beta}^{-1}(z)})$ とする $\mathbb{P}^3$ 上の vector bundle を $E_{flat}(\omega)$ と書くことにする．

<u>Lemma. 3.</u>

$$E_{flat}(\omega)\cong E(\omega).$$

<u>Proof.</u> $\bar{\beta}^*E(\omega)|_{\bar{\beta}^{-1}(z)}$ は trivial bundle $\beta^*E(\omega)|_{\beta^{-1}(z)}$ の $\bar{\beta}^{-1}(z)$ への制限であるから，flat connection $\bar{\alpha}^*\tilde{\omega}|_{\bar{\beta}^{-1}(z)}$ も trivial connection の制限として得られる．即ち，$\bar{\beta}^*E(\omega)$ に定義された connection は自然に $\beta^*E(\omega)$ に拡張され，そのとき β の各 fibre $\beta^{-1}(z)$ $(z\in\mathbb{P}^3)$ にそっては拡張された connection は 0 になっている．従って，

$$E_{flat}(\omega)\cong\beta_*\beta^*E(\omega)\cong E(\omega).\ \square$$

4.

ω,ω' を 2 つの $SU(2)$-instanton とする．$J=J(\omega)$

$= J(\omega')$ は $Gr(1,3)$ の divisor である．このとき $E(\omega)$ と $E(\omega')$ とは real analytic bundle としては同型であるが，実はこのことから次が成り立つ．

<u>Lemma. 4.</u>

$$\bar{\alpha}_* \bar{\beta}^* E(\omega) \cong \bar{\alpha}_* \bar{\beta}^* E(\omega').$$

<u>Proof.</u> ともに Stein manifold $Gr \setminus J$ 上定義された bundle ゆえ topological に（あるいは real analytic に）同型であることを見ればよい．

$Gr \setminus J \ni x$ に対し $\widetilde{E}_\omega = \bar{\alpha}_* \bar{\beta}^* E(\omega)$ の x に於ける vector bundle としての fibre を $\widetilde{E}_{\omega,x}$ で表わせば，$\widetilde{E}_{\omega,x} = H^0(\bar{\beta}^* E(\omega)|_{\bar{\alpha}^{-1}(x)}) = H^0(E(\omega)|_{\tau^{-1}(x)})$．同様に $\widetilde{E}_{\omega',x} = H^0(E(\omega')|_{\tau^{-1}(x)})$．ところで，$\pi^*\omega$ によって $\psi_{x,\omega} : E(\omega)|_{\tau^{-1}(x)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2$ なる complex analytic isomorphism が定まっており，同様に $\pi^*\omega'$ によって $\psi_{x,\omega'} : E(\omega')|_{\tau^{-1}(x)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2$ なる complex analytic isomorphism が定まっている．従って complex vector bundle としての同型

$$\psi_{x,\omega'}^{-1} \circ \psi_{x,\omega} : E(\omega)|_{\tau^{-1}(x)} \xrightarrow{\sim} E(\omega')|_{\tau^{-1}(x)}$$

を定義することが出来るが，これは section の同

型 $\Psi_x : H^0(E(\omega)|_{\tau^{-1}(x)}) \xrightarrow{\sim} H^0(E(\omega')|_{\tau^{-1}(x)})$

を induce する．Ψ_x は x には real analytic によるので，$\hat{E}_\omega$ と $\tilde{E}_{\omega'}$ とは C^ω-bundle として同型．$\square$

$G_r - J$ に解析接続された $\hat{\omega}'$ を $\hat{E}_\omega \xrightarrow{\sim} \tilde{E}_{\omega'}$ で引きもどし，$\hat{E}_\omega = \hat{E}$ に2つの connection $\hat{\omega}, \hat{\omega}'$ が与えられた，と思うことが出来る．（このとき $\hat{\omega}'$ は gauge 変換をうける．）

5.

$\zeta \in \mathbb{P}^3$ に対し，β を $\bar{\alpha}^{-1}(\bar{\tau}(\zeta)) \setminus \bar{\beta}^{-1}(\zeta)$ に制限した写像は image への同型をあたえている．そこで，$\beta(\bar{\alpha}^{-1}(\bar{\tau}(\zeta)) \setminus \bar{\beta}^{-1}(\zeta)) = U_\zeta$ と書く．U_ζ は $\mathbb{P}^3$ の open set である．

<u>Lemma. 5</u>.

$\mathbb{P}^3$ の任意の点 ζ_0 に対し，$\zeta_1, \cdots, \zeta_\sigma \in \mathbb{P}^3$ を次の 1)，2) を満たすようにとれる；

1) $\bigcup_{\mu=1}^{\sigma} U_{\zeta_\mu} = \mathbb{P}^3$

2) ζ_0 と ζ_μ を通る line は jumping line でない．

<u>Proof.</u> $\forall \zeta \in \mathbb{P}^3$ に対して $\bar{\tau}(\zeta)$ は必ず S と1点で交わるが，$\beta(\alpha^{-1}(S)) = \mathbb{P}^3$ なので，1)を満たす有限点列 $\zeta_1, \cdots, \zeta_\sigma$ が存在することは明らか．2)の条件は，$\bar{\tau}(\zeta_0) \cap \bar{\tau}(\zeta_\mu) \neq \phi$ という条件だが，$\tau(\zeta_0) \cap \tau(\zeta_\mu) \neq \phi$ であり $\bar{\tau}(\zeta)$ は $\tau(\zeta)$ の open dense subset ゆえ，2)は $\zeta_1, \cdots, \zeta_\sigma$ を general にとれば満たされる．$\square$

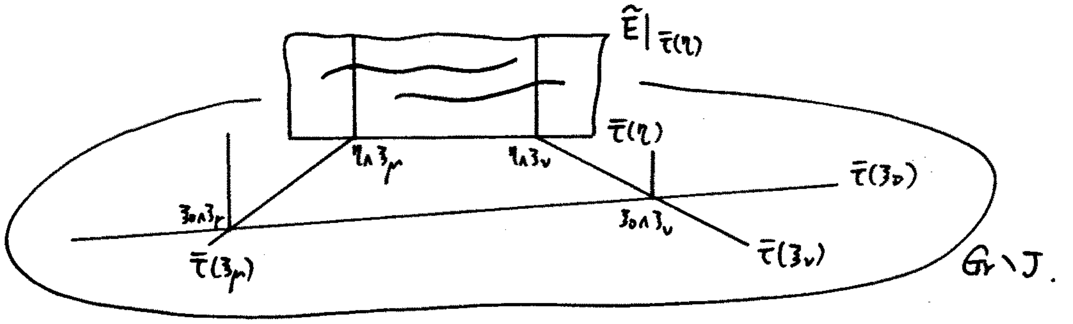
よって，lemma 2，lemma 4 により $\bar{\beta}^* E(\omega) \cong \bar{\beta}^* E(\omega')$ だから，lemma 3 を考慮して $E_{flat}(\omega) \cong E_{flat}(\omega')$ を言えばよい．

<u>Definition. 3.</u>

$\mathbb{P}^3$ の相異なる2点 ζ, η に対し，ζ と η を通る line に対応する $Gr(1,3)$ の点を $\zeta \wedge \eta = \eta \wedge \zeta$ で表わす．$\tau^{-1}(\zeta \wedge \eta) \ni \zeta, \eta$．

$U_{\zeta_\mu} \ni \eta$ をとる．$\widetilde{E}_{,\eta \wedge \zeta_\mu}$ を"初期値の空間"とみて同型 $\widehat{E}_{,\eta \wedge \zeta_\mu} \cong E_{flat}(\omega)_{,\eta}$ を得る．同様に $\widetilde{E}_{,\eta \wedge \zeta_\mu} \xrightarrow{\sim} E_{flat}(\omega')_{,\eta}$ が得られるから，これをつないで $\varphi_\mu(\eta) : E_{flat}(\omega)_{,\eta} \xrightarrow{\sim} E_{flat}(\omega')_{,\eta}$ が定義

出来る．$\varphi_\mu(\eta)$ は $\eta \in U_{\zeta_\mu}$ に holomorphic に depend する．



次に $U_{\zeta_\mu} \cap U_{\zeta_\nu} \ni \eta$ とする．$E_{flat}(\omega), \eta$ を $\tilde{E}_{\eta\wedge\zeta_\mu}$ と見た場合と $\hat{E}_{\eta\wedge\zeta_\nu}$ と見た場合のはり合わせを，

$$
\begin{array}{ll}
\tilde{E}_{\eta\wedge\zeta_\mu} & \\
\downarrow & \text{flat connection } \tilde{\omega}|_{\bar{\tau}(\zeta_\mu)} \text{ による平行移動} \\
\hat{E}_{\zeta_0\wedge\zeta_\mu} & \\
\downarrow & \text{flat connection } \tilde{\omega}|_{\bar{\tau}(\zeta_0)} \text{ による平行移動} \\
\hat{E}_{\zeta_0\wedge\zeta_\nu} & \\
\downarrow & \text{flat connection } \tilde{\omega}|_{\bar{\tau}(\zeta_\nu)} \text{ による平行移動} \\
\tilde{E}_{\eta\wedge\zeta_\nu} &
\end{array}
$$

で定義する．合成した map を $g^{\omega}_{\nu\mu}(\eta): \hat{E}_{\eta\wedge\zeta_\mu} \xrightarrow{\sim} \hat{E}_{\eta\wedge\zeta_\nu}$ で表わす．$\{g^{\omega}_{\mu\nu}\}$ は vector bundle $E_{flat}(\omega)$ の，covering $\bigcup_{\mu=1}^{\sigma} U_{\zeta_\mu}$ に属する変換函数系になっている．同様にして $\{g^{\omega'}_{\mu\nu}\}$ も定義できる．

さて，$\hat{\omega}|_{\bar{\tau}(\zeta_0)}$ も $\tilde{\omega}'|_{\bar{\tau}(\zeta_0)}$ もともに flat であ

るから，sectionの base を適当に選んで

$$\widetilde{\omega}\big|_{\tau(\zeta_0)} = \widetilde{\omega}'\big|_{\tau(\zeta_0)}$$ のようにしておく．

$\widetilde{E}_{\eta\wedge\zeta_\mu}$ の自己同型を，

$$\begin{array}{l}
\widetilde{E}_{\eta\wedge\zeta_\mu} \\
\big\downarrow \cdots \text{flat connection } \widetilde{\omega}'\big|_{\tau(\zeta_\mu)} \text{ による平行移動} \\
\widetilde{E}_{\zeta_0\wedge\zeta_\mu} \\
\big\downarrow \cdots\cdots \text{flat connection } \widetilde{\omega}\big|_{\tau(\zeta_\mu)} \text{ による平行移動} \\
\widetilde{E}_{\zeta_\mu\wedge\eta}
\end{array}$$

によって定める．合成した map を $h_\mu^{\omega\omega'}(\eta)$ で表わす．このとき，定義から

$$(h_\mu^{\omega\omega'})^{-1} \circ g_{\mu\nu}^{\omega} \circ h_\nu^{\omega\omega'} = g_{\mu\nu}^{\omega'}$$

が成り立つ．従って $\{g_{\mu\nu}^{\omega}\} \cong \{g_{\mu\nu}^{\omega'}\}$.

$\{g_{\mu\nu}^{\omega}\} \cong E(\omega)$，$\{g_{\mu\nu}^{\omega'}\} \cong E(\omega')$ を証明するには少し議論を要するがここでは略す．これで，

$E(\omega) \cong E(\omega')$ が証明された．□

§3. SU(3) - instantons.

Definition. 4.

$SU(n) \hookrightarrow SU(n+1)$ によって $SU(n)$-instanton は自然

に $SU(n+1)$-instanton となるが，$SU(\ell)$-instanton (for $\ell < n$) とはなっていない $SU(n)$-instanton を irreducible $SU(n)$-instanton と呼ぶ．

$SU(n)$-instanton は $\mathbb{P}^3$ 上の rank n の algebraic vector bundle に対応するが，irreducible instanton は simple algebraic vector bundle に対応する．

Reducible $SU(3)$-instanton に対応する vector bundle $E(\omega)$ は，$SU(2)$-instanton に対応する rank 2 の vector bundle F と line bundle との extension として表わされる；

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow E(\omega) \longrightarrow F \longrightarrow 0 \quad .$$

従って $E(\omega)$ の同型類は $J(\omega)$ ではきまらない．しかし，

Theorem. 3.

Instanton に対応する simple algebraic vector bundle of rank 3 の同型類は，その jumping lines の為す set（この場合も divisor になっている）によって定まる．

$\mathbb{F}$ を $\mathbb{P}^3$ 上の vector bundle で，$\mathbb{P}^3$ の general line l への制限 $\mathbb{F}|_l$ が自明になっている様なもの，としよう．Projection $\beta^*\mathbb{F}\to\mathbb{F}l$ を図のように p で

$$\begin{tikzcd} & \beta^*\mathbb{F} \arrow[dd, "p"'] \arrow[dr] & \\ & & \mathbb{F} \arrow[dd] \\ & \mathbb{F}l \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ Gr & & \mathbb{P}^3 \end{tikzcd}$$

表わす．$\beta^*\mathbb{F}$ の各 fibre を projectify した bundle を $\mathbb{P}(\beta^*\mathbb{F})$ で表わし，$\mathbb{F}l$ への projection を $\bar{p}:\mathbb{P}(\beta^*\mathbb{F})\longrightarrow\mathbb{F}l$ で示す．rank $\mathbb{F}=n$ とする．このとき

$$\alpha\circ\bar{p}:\ \mathbb{P}(\beta^*\mathbb{F})\longrightarrow Gr$$

は，$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^{n-1}$ の複素解析族を与えている．

$x\in Gr$ が $\mathbb{F}$ の jumping line $\Leftrightarrow (\alpha\circ\bar{p})^{-1}(x)\neq\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^{n-1}$

である．従って jumping line が divisor であるかどうかを調べるには，$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^{n-1}$ の変形族を作った時，special なものがどんな風に出てくるかを見ればよい．$n=3$ の場合にそれを実行することによって，theorem.3. が得られるのである．しかし詳細は[9]に譲る．(1979年1月30日．Do A.K., m.p.!)

文献

1. M.F. Atiyah, N.J. Hitchin, & I.M. Singer : Deformations of Instantons. Proc. Natn. Acad. Sci. U.S.A. <u>74</u>, 2662. (1977)

2. ——— : Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry. Proc. R. Soc. Lond. A. <u>362</u>, 425-461 (1978)

3. M.F. Atiyah, & R.S. Ward : Instantons and Algebraic Geometry. Commun. Math. Phys. <u>55</u>, 117-124 (1977)

4. W. Barth : Some Properties of Stable Rank-2 Vector Bundles on $\mathbb{P}_n$. Math. Ann. <u>226</u>, 125-150 (1977)

5. R. Hartshorne : Stable Vector Bundles and Instantons. Commun. Math. Phys. <u>59</u>, 1-15 (1978)

6. ——— : Stable Vector Bundles of Rank 2 on $\mathbb{P}^3$. (preprint)

7. 村瀬元彦 : Classical Euclidean Yang-Mills 場に於ける self-duality の幾何学的意味について. 数理研講究録 <u>324</u>, 64-96 (1978)

8. ——— : (ソリトンと holonomic quantum field theory 研究会報告集掲載予定)

9. ——— : (線型微分方程式の超局所解析 研究集会報告集掲載予定)