

位相的自明な法バンドルをもつ
コンパクトな複素曲線の近傍について

上田哲生

二次元複素多様体とその連結かつコンパクトな一次元複素部分多様体 C を考えよう。以下 C を (非特異既約) 曲線とよぶ。我々の目的は曲線 C の近傍の複素解析的 (あるいは幾何学的) な性質を, 特に C の自己交点数が零の場合について, 調べることである。I では結果を, II では証明のスケッチを述べる。

I. 1°. 向きのついた微分多様体としては, C の近傍の構造は C の法束 N_C の Chern 類 $c(N_C) \in H^2(C, \mathbb{Z})$ によつて, 即ち C の自己交点数 $(C^2) \in \mathbb{Z}$ によつて定まる。この位相的性質は次のように複素解析的性質に反映される:

- (1) $(C^2) < 0 \iff C$ は強擬凸な近傍をもつ。
- (2) $(C^2) > 0 \implies C$ (の近傍) は次の性質

なもつ :

Property (A). 曲線 C の近傍 V 及び $V-C$ の上の強擬凸函数 (= 強多重劣調和函数) Φ が存在して

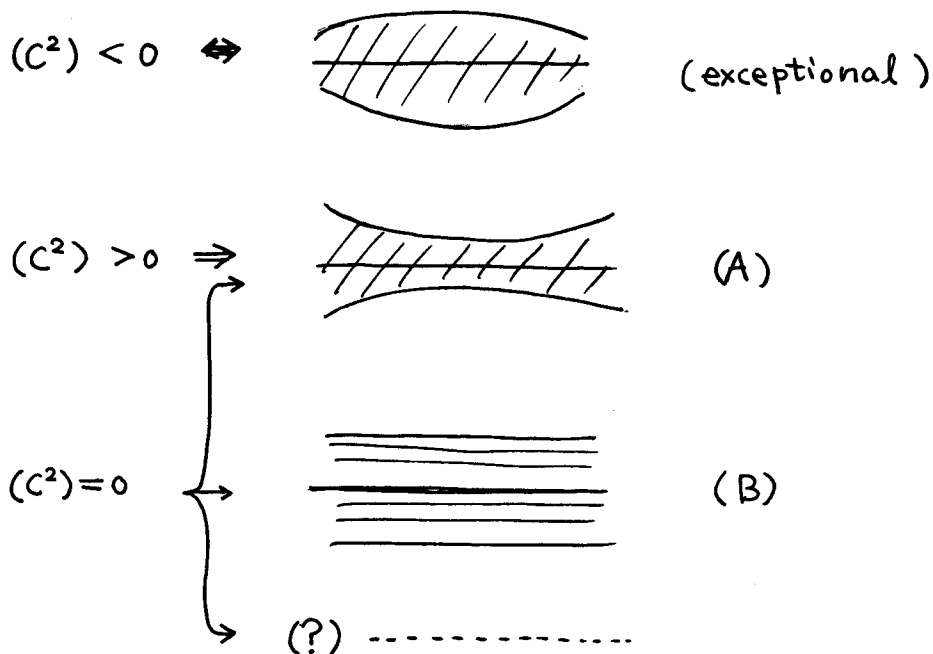
$$\lim_{p \rightarrow C} \Phi(p) = +\infty \quad \text{となる。} \quad \text{—}$$

REMARK. 性質 (A) より C の強擬凸近傍の基本系 (連続な family) の存在が導かれる。即ち

$$C \cup \{p \in V-C \mid \Phi(p) > N\} \quad (N \text{ は充分大}),$$

2° ところが $(C^2) = 0$ の場合, 即ち C の法束 N_C が位相的に自明の場合, には状況は複雑になる。性質 (A) ももつ場合とそうでない場合の両方が存在する。後者の簡単な例として, 曲線 C がその近傍における正則函数の零点であるもの, また, ある曲線上の位相的に自明な直線束の零切断, 等がある。これらを一般化して次の性質 (B) を考えよう:

Property (B). 曲線 C の近傍の開被覆 $\{V_\lambda\}$ 及び各 V_λ 上の正則函数の系 $\{w_\lambda\}$ で, 各 V_λ 上 $w_\lambda = 0$ は C の局所方程式であり, 各 $V_\lambda \cap V_\mu$ 上 w_λ / w_μ は絶対値 1 の定数となるものがある。—



REMARK. ① 性質(B)は次の様にも述べられる：
 曲線 C の近傍に C を divisor として与える（一般に多価の）乗法的函数 w で、その乗数が絶対値 1 の定数なるものがある。

② (B)が成立つとして、 $t_{\mu} = w_{\lambda} / w_{\mu}$ とおくと、 C の被覆 $\{V_{\lambda} \cap C\}$ に関する 1-cocycle $\{t_{\mu}\}$ は、 C の複素法束 N_C を定義している。また N_C の位数が有限 m なら、①の乗法的函数は m 個であり、これより C の近傍の一価正則函数 w^m でその divisor が mC なるものができる。

③ 性質 (A), (B) は両立しない。(O. Suzuki [9])
 これを見るために, (B) が成立していると仮定
 しよう。各 V_λ 上 $w_\lambda = \text{定数 (充分小)}$ で与えられ
 る foliation は, C の近傍における foliation を
 定めている。各 leaf は

$$\Sigma_\varepsilon = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{ p \in V_\lambda \mid |w_\lambda(p)| = \varepsilon \}$$
 なる実解析的
 超曲面に含まれている。



(i) N_C の位数有限のときは, 各 leaf は $w^m = \text{定数}$
 なるコンパクトな曲線, また (ii) N_C の位
 数無限のときは各 leaf は Σ_ε の中の稠密な集合
 となる。 Σ_ε の近傍に擬凸函数 (=多重劣調和函
 数) φ があるとしよう。(i) の場合, φ は曲線
 $w^m = \text{定数}$ 上定数で φ は w^m に従属した函数。
 (ii) の場合, φ は Σ_ε 上定数である。実際, φ は
 Σ_ε のある点 p_0 で最大値をとり, p_0 を通る
 leaf の上で, 最大値の原理により定数。これ
 が Σ_ε で稠密だからここでも定数となる。

また同様に, Σ_ε の近傍で定義された正則函数は, (i) の場合 w^m に従属, (ii) の場合 Σ_ε 上定数だから定数。

3° 上のような性質を調べるために, $(C^2) = 0$ なる曲線をその type (1, 2, ... または infinite) に従って次のように分類する: (II. 2° を見よ)

DEFINITION 1. $\{(V_\lambda, w_\lambda)\}$ を C の近傍の被覆 $\{V_\lambda\}$ 及び各 V_λ 上の正則函数 w_λ で $w_\lambda = 0$ が C の局所方程式を与えるものからなる系とする。系 $\{(V_\lambda, w_\lambda)\}$ が各 $V_\lambda \cap V_\mu$ 上 $|w_\lambda/w_\mu| = 1 + O(|w_\lambda|^m)$ なるとき type n とよぶ。——

DEFINITION 2.

C が finite type $n \iff \begin{cases} \text{type } n \text{ の系が存在し} \\ \text{type } n+1 \text{ の系はない。} \end{cases}$

C が infinite type \iff いかなる k に対しても type k の系が存在する。

少くとも type 1 の系は存在する。このような系 $\{(V_\lambda, w_\lambda)\}$ をとり, 曲線 C と点 p との距離を与える滑らかな函数 $r(p)$ とし, $r(p) \sim |w_\lambda(p)|$ ($p \in V_\lambda, p \rightarrow C$) なるものをとっておく。

4°

THEOREM 1. 曲線 C は, $(C^2)=0$, finite type n とする。このとき性質 (A) が成立つ。より詳しく, 任意の正数 ε に対して, 強擬凸函数 ψ を $\psi(p) \sim 1/r(p)^{n+\varepsilon}$ ($p \rightarrow C$) となる様にとれる。

THEOREM 2. 曲線 C は上と同様とする。また V を C のある近傍, ψ を $V-C$ 上の擬凸函数とする。ある正数 ε があって, $\psi(p) = o(1/r(p)^{\varepsilon})$ ($p \rightarrow C$) ならば, ψ は $V-C$ 上定数である, こゝに V' は V に含まれる C のある近傍。—

REMARK. ψ は強擬凸でなくともよい。また $p \rightarrow C$ のとき $\psi(p) \rightarrow +\infty$ とならなくともよい。

COROLLARY. 曲線 C は上と同様とする。 V を C のある近傍, f を $V-C$ 上の正則函数とする。ある正数 ε があって $\log |f(p)| = o(1/r(p)^{\varepsilon})$ ($p \rightarrow C$) ならば, f は定数である。—

REMARK. 曲線 C 上に特異点をもつ正則関数は一次元の場合の孤立特異点をもつ正則関数の類似と見られるが, 我々の場合, 一変数のときにも, また $(C^2) > 0$ のときにも現われない制限が関数の増大度にくわある。これは C の近傍の global な structure に由来している。

5° infinite type の場合について結果を述べるために, まず定義をする。曲線 C の種数を g とすると, C の Picard 多様体 $\text{Pic}(C)$ は実 $2g$ 次元トーラス \mathbb{T}^{2g} と同一視される。 $\text{Pic}(C)$ の部分集合 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1$ を次の様に定める。

$$\mathcal{E}_0 = \{ E \in \text{Pic}(C) \mid E \text{ は位数有限} \}$$

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ E \in \text{Pic}(C) \mid \log \frac{1}{d(E^k, 1)} = O(\log k) \ (k \rightarrow \infty) \right\}$$

ここに $d(E^k, 1)$ は E の k 階テンサー E^k と, $\text{Pic}(C)$ の単位元 1 との距離 ($\text{Pic}(C)$ の群の演算によって不変な距離, あるいはそれと同値などんな距離でもよい。)

THEOREM 3. C を曲線, $(C^2) = 0$, infinite

type とする。さらに C の複素法束 N_C が \mathcal{E} に属せば, C は性質 (B) をもつ。—

REMARK ① $Pic(C) - \mathcal{E}$ は測度零の集合。この意味で \mathcal{E}_1 の点は "general" である。しかし \mathcal{E}_1 はやせた集合 (nowhere dense な閉集合の可算和)。

② 種数 $g=0$, については, Kodaira-Spencer [] の定理の最も簡単な場合。 $g=1$ については Arnol'd の結果 (の一部)。

6° TH. 1 及び 3 によつて次の表を得る。

N_C \ TYPE	FINITE	INFINITE
\mathcal{E}	(A)	(B)
$Pic(C) - \mathcal{E}$		(?)

(?) の部分については, (B) の場合があることは判るが, (A) の場合があるか, あるいは (A)(B) のいづれでもない場合があるか否か不明。

7° 曲線 C がコンパクトな曲面に含まれている場合に上の結果を応用する。Hartshorne が

提起した次の問題を考えよう。

PROBLEM. S を二次元コンパクト複素多様体 (以下曲面とよぶ), C を S の (既約) 曲線とする。 $S-C$ がコンパクトな曲線を含まないとする。 $S-C$ が Stein 多様体となる条件は何か? $(C^2) \cong 0$ で必要充分か? —

◎ まず, Grauert [2] によつて, $(C^2) > 0 \Rightarrow S-C$ は Stein, 実はもっと強く, $S-C$ は natural に affine algebraic となる。

◎ $(C^2) = 0$, C は非特異としよう。まず C の法束 N_C が位数有限のとき。表により, (A), (B) のいずれかが成立つが, (B) の場合にはその周りの正則函数の零点であり, C と交わらないコンパクトな曲線がある。これは $S-C$ が曲線を含まないという仮定に反す。したがつて (A), 即ち $S-C$ は Stein。ただし $(C^2) = 0$ だから natural には $S-C$ は affine algebraic ではない。
次に N_C が位数無限のとき。 $S-C$ がコンパクト

な曲線を含まず, $S-C$ は Stein ではない例をつくろう。([10]) 射影平面 \mathbb{P}_2 上の非特異三次曲線 (従って楕円曲線) を C_0 とする。 C_0 上に相異なる九個の点 $\{P_j\}_{j=1, \dots, 9}$ をとる。 $\{P_j\}$ たちにおける blowing up によって得られる曲面を S , 曲線 C_0 の proper image を C と書く。 $\{P_j\}$ を適当な ("general" な) 位置にとれば 『 \mathbb{P}_2 上の曲線 D が C_0 との交点 $C_0 \cap D$ が集合 $\{P_j\}$ に含まれる様なものはない』, 『 C の法束 N_C は \mathcal{E}_1 に含まれる』 という二条件を同時に満たすことができる。 このとき $S-C$ はコンパクトな曲線を含まず, また C は性質 (B) をもつ (II, 2° を見よ) ので, $S-C$ は Stein ではない。(I, 2°. REMARK ③)

REMARK. 上の例において $V = \cup \{U \mid \mu < \varepsilon\}$ なる C の近傍をとると, V も $S-V$ も, S の擬凸な部分領域で, そこには非定数正則関数が存在しない例である (V の方は Grauert_[3] の例)

8°

THEOREM (Lefschetz) X はコンパクト複素多様体, Y はその解析的集合とする。 Y が強擬凹近傍の基本系をもてば, $H_1(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$ は 全射準同型 である。—

THEOREM 4. C を, 曲面 S 上の曲線, $(C^2) = 0$, finite type n とする。また N_C の位数を m とする。また S の一次元ベキ χ 数は偶数とする。このとき, (1) $n \leq m$
(2) $n = m$ なら $H^1(S, \mathbb{O}) \neq 0$ 。—

上定理の状況において, S の structure は C の近傍の structure によって双有理同値を除いて決定される。(一般に Stein space の structure はその境界によってきまる) C が楕円曲線のとときに, S を具体的に決定しよう。(M. Suzuki によって提起された問題)

THEOREM 5. S を曲面, C を S 上の楕円曲線

$(C^2)=0$, finite type とする。 S, C は次のいずれかである: (i) S は Hopf 曲面で既約曲線をただ一つ含むもの。 (ii) S は楕円曲線を base とする \mathbb{P}^1 -bundle で unique な global section C をもち $S-C$ は解析的に自明でない \mathbb{C} -bundle となるもの。(このような S は base の楕円曲線の modulus のみによって一意にきまる)。 —

II. 1°. 種数 g のコンパクト Riemann 面の Picard 群様体 $\text{Pic}(C) = \ker(H^1(C, \mathbb{C}) \xrightarrow{c} H^1(C, \mathbb{Z}))$ は $H^1(C, \mathbb{T}) = \mathbb{T}^{2g}$ と同一視される, ここに $\mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} \mid |t|=1\}$ (乗法群)。即ち, C の開被覆を $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}$ とし, $\text{Pic}(C)$ に属する直線束 E に対して, 各 U_λ 上の fiber 座標 $\{s_\lambda\}$ を適当にとれば, 変換関数系 $\{t_{\lambda\mu}\}$ を $t_{\lambda\mu} \in \mathbb{T}$ とできる。この様な E を (unitary) flat な直線束とよぼう。 E の fiber norm を $|s_\lambda|$ によって定めておく。

2° n -次元複素群様体上の曲線 C で $(C^2)=0$

なるものを考えよう。C に関して type k の
 函数系 $\{v_\lambda, w_\lambda\}$ があるとす。 (DEF. 1)

$t_{\lambda\mu} = w_\lambda / w_\mu |_{v_\lambda \cap v_\mu \cap C}$ とおけば " $|t_{\lambda\mu}| = 1$ で",
 $\{t_{\lambda\mu}\}$ は C の被覆 $\mathcal{U} = \{v_\lambda\}$, $v_\lambda = v_\lambda \cap C$, に関して
 C の法束 N_C を定義する。各 v_λ 上の正則函数 f_λ
 をとり、 (u_λ, z_λ) が v_λ における局所座標を与
 えるようにする。 $v_\lambda \cap v_\mu$ 上で

$$t_{\lambda\mu} w_\mu - w_\lambda = f_{\lambda\mu|k+1}(z_\lambda) w_\lambda^{k+1} + \dots$$

と書ける。 $f_{\lambda\mu|k+1}$ を $v_\lambda \cap v_\mu$ 上の函数とみ
 る。 $\{f_{\lambda\mu|k+1}\}$ を被覆 \mathcal{U} に関する 1-cochain とみ
 ると、これは $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(N_C^{-k}))$ の element である。
 これを表わす $H^1(C, \mathcal{O}(N_C^{-k}))$ の element を、
 k -th obstruction とよぼう。 k -th obstruction
 が消えれば、函数系 $\{w_\lambda\}$ を変形して新しく
 type $k+1$ の函数系がつくられる。そしてこ
 れから $(k+1)$ -th obstruction が定義される。こ
 うして、ある函数系から出発して、順次現われた
 obstruction が消える限り続けていく。消えない
 obstruction が n -th に現われたとき曲線 C を
 type n と、全ての obstructions が消えるとき

infinite type とよぶ。これは出発点にとった
 函数系によらないことが証明される。この定
 義は明らかに DEF. 2 と同じである。

REMARK ① $g=0$ のときは $\text{Pic}(C)=\{1\}$: 一点
 で, $H^1(C, \mathcal{O})=0$ だから全ての obstructions は
 a priori に消える。

② $g=1$ のとき, N_C の位数が無限なら,
 やはり全ての obstructions は a priori に消える。

実際, $(k\text{-th obstruction}) \in H^1(C, \mathcal{O}(N_C^k))=0$.

従って ①, ② の場合, C は infinite type .

3° TH. 1.2 の証明の準備のために, 1° の状
 況に戻ろう。Flat な直線束 E の定数 [resp. 正
 則, 反正則, 調和] 切断とは, その fiber 座標
 による表現が定数 [resp. \parallel] な函数であるも
 のをいう, ここに(反正則)=(正則函数の複素共
 役)。これらのつくる層をそれぞれ, $\mathcal{L}(E)$,
 $\mathcal{O}(E)$, $\overline{\mathcal{O}}(E)$, $\mathcal{H}(E)$ と書く。Kashiwara に従っ
 て (Kodaira [8] p124-126) 次の完全系列を考
 えよう。

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(E) & \longrightarrow & \mathcal{O}(E) \oplus \overline{\mathcal{O}}(E) & \longrightarrow & \mathcal{H}(E) \longrightarrow 0 \\
 & & c & \longmapsto & c \oplus (-c) & & \\
 & & & & f \oplus \bar{g} & \longmapsto & f + \bar{g}
 \end{array}$$

これより,

$$0 \longrightarrow H^1(C, \mathcal{O}(E)) \xrightarrow{\varphi} H^1(C, \mathcal{O}(E) \oplus \overline{\mathcal{O}}(E)) \xrightarrow{\psi} H^1(C, \mathcal{H}(E))$$

を得るが

$$\dim H^1(C, \mathcal{O}(E)) = \begin{cases} 2g & E = 1 \\ 2g - 2 & E \neq 1 \end{cases} .$$

$$\dim H^1(C, \mathcal{O}(E)) = \dim H^1(C, \overline{\mathcal{O}}(E)) = \begin{cases} g & E = 1 \\ g - 1 & E \neq 1 \end{cases} .$$

(注. $H^1(C, \overline{\mathcal{O}}(E)) \cong H^1(C, \mathcal{O}(E^{-1}))$: 反- \mathbb{C} -線型な対応) により, φ は全射, ψ は零写像。従って $H^1(C, \mathcal{O}(E)) \rightarrow H^1(C, \mathcal{H}(E))$ は零写像。これは, $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E))$ の元は, 調和な切断の 0-cochain の coboundary であることを示している。

4° 2° の状況に戻ろう。 $\{t_{\mu}\}$ を C の近傍の被覆 $\mathcal{U} = \{U_{\mu}\}$ に関する 1-cocycle とみて C の近傍上の flat な直線束 F が定義される。 F の C 上への制限は N_C に一致する。 divisor C の定

める直線束 $[C]$ の C 上への制限も N_C に一致するが、 F と $[C]$ とが一致するのは丁度性質 (B) が成立するときである。

C を finite type n としよう。type n の函数系 $\{(\mathcal{V}_\lambda, w_\lambda)\}$ をとる。 $\{1/w_\lambda^n\}$ は F^{-n} の有理型切断からなる Cousin I data である。実際

$$t_{\lambda\mu} w_\mu - w_\lambda = f_{\lambda\mu|n+1}(z_\lambda) w_\lambda^{n+1} + \dots \quad (*)$$

$$t_{\lambda\mu}^{-n} (1/w_\mu^n) - 1/w_\lambda^n = -n f_{\lambda\mu|n+1}(z_\lambda) + \dots$$

この右辺を $f_{\lambda\mu}$ とおくと、 $\{f_{\lambda\mu}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(F^{-n}))$ 。この C 上の制限は $\{-n f_{\lambda\mu|n+1}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(N_C^{-n}))$ で coboundary ではない。ここで \mathcal{O} で見たことをつかうと、これは調和切断の \mathcal{O} -cochain の coboundary である： $t_{\lambda\mu}^{-n} h_\mu^0 - h_\lambda^0 = -n f_{\lambda\mu|n+1}$ なる $\{h_\lambda^0\}$ がある。 h_λ^0 を \mathcal{V}_λ 上の函数 $h_\lambda(z_\lambda)$ とみる。 $f_{\lambda\mu} - t_{\lambda\mu}^{-n} h_\mu^0 + h_\lambda^0$ は各 $\mathcal{V}_\lambda \cap \mathcal{V}_\mu$ 上の多重調和函数であり、 $\mathcal{V}_\lambda \cap \mathcal{V}_\mu$ 上 0 になる。しかも $\{f_{\lambda\mu} - t_{\lambda\mu}^{-n} h_\mu^0 + h_\lambda^0\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{H}(F^{-n}))$ 、 \mathcal{H} は多重調和切断のなす層。これを正則及び反正則函数の和に書くと、 $f_{\lambda\mu} - t_{\lambda\mu}^{-n} h_\mu^0 + h_\lambda^0 = g'_{\lambda\mu} + \overline{g''_{\lambda\mu}}$ 、 $\mathcal{V}_\lambda \cap \mathcal{V}_\mu$ 上 $g'_{\lambda\mu} = \overline{g''_{\lambda\mu}} = 0$ 。 $\{g'_{\lambda\mu}\}$ 、 $\{g''_{\lambda\mu}\}$ はそれぞれ

$Z^1(V, \mathcal{O}(F^{-n}))$, $Z^1(V, \mathcal{O}(F^n))$ の元。また $\{g'_{\lambda\mu}/w_\lambda\}$, $\{g''_{\lambda\mu}/w_\lambda\}$ はそれぞれ order $n+1$ 以上の項を無視して, F^{-n-1} , F^{n-1} の正則切断の 1-cocycle。これらを C 上に制限して調和切断の 0-cochain の coboundary と表わす。----- という操作を続けて

$$h_\lambda = \sum_{\substack{d, k \geq 0 \\ j+k \leq n}} h_{\lambda, j, k}(\alpha_\lambda) w_\lambda^j \bar{w}_\lambda^k \quad h_{\lambda, j, k} : \text{調和} \\ (h_{\lambda, 0, 0} = h_\lambda^0)$$

$$z'' \quad f_{\lambda\mu} = t_{\lambda\mu}^{-n} h_\mu - h_\lambda + (\text{order} \geq n+1 \text{ の項})$$

なるものが構成される。即ち, $V_\lambda \cap V_\mu$ 上

$t_{\lambda\mu}^{-n} (1/w_\mu^n - h_\mu)$ と $1/w_\lambda^n - h_\lambda$ とは order $\geq n+1$ の項を除いて一致する。滑らかな函数 α_λ によって修正して, $\{1/w_\lambda^n - h_\lambda + \alpha_\lambda\}$ を C に "pole" をもつ F^{-n} の滑らかな切断とすることが出来る。これを φ とする。 $|\varphi|^{1+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$) を少し修正すれば強擬凸函数を得る (TH. 1)。また, $|\varphi|^{1-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$) を修正して, その complex Hessian がいたるところ正負の固有値をもつようにできる。TH. 2 はこの函数と ψ との比較をすることによって証明される。

5° TH.3 の証明について。求める函数系を形式的巾級数として構成する。このときの obstructions がすべて消えるための必要充分条件が infinite type であること。この巾級数の収束を, 条件 $N_c \in \Sigma$ があるときには証明することができ。 $N_c \in \Sigma_0$ のときは, Kodaira-Spencer [5] と同様にできる。 $N_c \in \Sigma_1$ の場合に必要な Lemmas をあげる。

C をコンパクト Riemann 面とし, C の有限開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ を一つ固定しておく。 $E \in \text{Pic}(C)$ とする。 $C^i(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E))$ を E の正則切断のなる i -cochain で, 各切断が有界なもの全体とする。 E に標準的なノルムがあるから, これから普通の仕方です $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E))$ にノルムが導入される。 また coboundary 写像 $\delta: C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E)) \rightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E))$ は $E \neq 1$ なら単射である。

LEMMA 1 ある定数 $K (> 0)$ があって, 任意の $E \in \text{Pic}(C)$, および任意の $f \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(E))$ に対して,

$$\|\delta f\| \cong \frac{d(E, 1)}{K} \|f\| \quad \text{が成'立つ。}$$

証明は正值調和函数についての Harnack の定理に帰着させることによつて, elementary になされる。Kodaira-Spencer の lemma によつて, E を固定すれば, δ は開写像であるが, この "開き具合" が, E が 1 に近づくとき小さくなる。これが $d(E, 1)/K$ よりは大きいというのが LEMMA である。

LEMMA. 2 (Siegel [8])

$\varepsilon_j, j=1, 2, \dots$ は次の条件を充す数列とする:
 (i) $0 < \varepsilon_j < (2j)^{-\nu} \quad (j=1, 2, \dots), \nu > 0$

$$(ii) \quad \frac{1}{\varepsilon_{j+k}} \leq \frac{1}{\varepsilon_j} + \frac{1}{\varepsilon_k} \quad (j > k)$$

このとき, 函数方程式

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_{j-1}} A_j u^j = \sum_{k=2}^{\infty} \left(u + \sum_{l=2}^{\infty} A_l u^l \right)^k \left(\frac{A(u)^2}{1-A(u)} \right)$$

の解 $A(u) = u + A_2 u^2 + A_3 u^3 + \dots$ は正の収束

半径をもつ。——

REMARK. Siegel [8] では次のような問題が扱われている。 $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ を \mathbb{C} の原点 0 の周りの正則変換で $|a_1| = 1$, $a_j \neq 1$ ($\forall j$) なるものとする。原点の周りの座標を $z = \varphi(\zeta) = \zeta + c_2 \zeta^2 + c_3 \zeta^3 + \dots$ によってとり直し $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(\zeta) = a_1 \zeta$ という形にできるか? 係数の比較によって形式的巾級数 $\zeta + c_2 \zeta^2 + \dots$ は一意的に定まる。

Siegel は $\log \frac{1}{|a_k - 1|} = O(\log k)$ ($k \rightarrow \infty$) ならば巾級数が収束することを示している。上の LEMMA はこの証明の実質的な部分である。
(また, Arnold [1] をも参照.)

REFERENCES.

- [1] Arnol'd, V.I. Bifurcations of invariant manifolds of differential equations and normal forms in neighborhoods of elliptic curves. Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya Vol. 10. No. 4. pp 1-12. Oct-Dec. (1976)
- [2] Grauert, H. Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. Math. Ann. 146 331-368 (1962)
- [3] ———. Bemerkenswerte pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten. Math. Z. 81 377-391 (1963)
- [4] Hartshorne, R. Ample subvarieties of Algebraic varieties, Lec. notes. in math. 156 Springer.
- [5] Kodaira, K. - Spencer, D.C. A theorem of completeness of characteristic systems of complete continuous systems. Amer. J. Math. 81 (1959) 477-500.
- [6] Kodaira, K. 複素多様体と複素構造の変形. 東大セミナー 31 (1974).
- [7] Miyajima, K. 埋め込みの equivalence について. 数学 30 卷 4 号 (1978).

- [8] Siegel, C.L. Iterations of analytic functions
Ann. of Math. 43 (1942) 607-612
- [9] Suzuki, O. Neighborhoods of a compact
non-singular algebraic curve imbedded in a
2-dimensional complex manifold. Publ. RIMS,
Kyoto Univ. 11 (1975) 189-199.
- [10] Ogus, A. The formal Hodge filtration
Invent. math. 31 (1976) 193-228.