代数幾何学シンポジウム記録
1978年度　pp.118-138



# 対称型式とその応用
## （酒井による cotangent dimension の理論）

東大　理　倉本義之

本稿は，酒井文雄氏による cotangent dimension の理論の紹介である。詳しくは [9] を参照されたい。

$X$ を非特異完備代数多様体（もしくはコンパクト複素多様体）とし，$\Omega_X^1$ を $X$ 上の正則 1-型式の芽のなす層とする。$\Omega^1_X$ の対称積に付随して，$X$ の cotangent dimension とよばれる不変量 $\lambda(X)$ が定義される。小平次元 $\kappa(X)$ による分類に $\lambda(X)$ を加えて，より精密な分類理論を作ることが目標である。

## §1. ベクトル束の対称積に関する事実

$X$ を $n$ 次元コンパクト複素多様体とし，$E$ を $X$ 上のベクトル束とする。ここで，ベクトル束とは有限階局所自明連接層を意味するものとする。$S^mE$ を $E$ の $m$ 階対称積とするとき，

$\Omega(X, E) = \oplus_{m=0}^{\infty} H^0(X, S^m E)$ は自然な積によって graded ring となる。

<u>定義</u>. X の E-dimension $\lambda(E, X)$ とは,

$$\lambda(E, X) = \mathrm{tr.deg.}\ \Omega(X, E) - \mathrm{rank}(E) .$$

P(E)を projective bundle Proj ($\oplus_{m=0}^{\infty}$ とし, $\mathcal{O}_{P(E)}(1)$ を P(E)上の tautological line bundle とする。

$\mathrm{rank}(E) = r$ とおけば, $\lambda(E) \neq -r$ のとき $\lambda(E, X) = \kappa(\mathcal{O}_{P(E)}(1), P(E)) - (r-1)$ となることが直ちにわかる。( $\lambda(E, X) = -r$ のときは定義により $\kappa(\mathcal{O}_{P(E)}(1), P(E)) = -\infty$ である。) $\dim P(E) = n + r - 1$ であるから, $-r \leq \lambda(E, X) \leq n$ となる。

<u>定義</u>. inverse Chern class $\tilde{c}_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$ とは,

$$\sum \tilde{c}_i(E) = (\sum (-1)^i c_i(E))^{-1} = (c(E^\vee))^{-1}$$

によって定義される。ここに, $c(E) = \sum c_i(E)$ は E の total Chern class, $E^\vee$ は E の dual である。

$\tilde{c}_1(E) = c_1(E)$, $\tilde{c}_2(E) = c_1^2(E) - c_2(E)$, $\cdots$ となる。

$\xi = c_1(\mathcal{O}_{P(E)}(1))$ と書くと次が成り立つ.

$$\xi^{n+r-1}[P(E)] = \tilde{c}_n(E)[X] \qquad ([6])$$

<u>命題1.</u> E を X 上のベクトル束とする。

ある $m>0$ に対して $S^m E$ が global section で生成されるならば，$\lambda(E,X)\geqq 0$ 。さらに，このとき $\lambda(E,X)=n \Leftrightarrow \tilde{c}_n(E)>0$ 。

命題2. $0\to E'\to E\to E''\to 0$ を $X$ 上のベクトル束の完全列とすると，

$$\dim H^0(X,S^m E)\leqq \sum_{\substack{p+q=m\\ p,q\geqq 0}} \dim H^0(X,S^pE'\otimes S^qE'').$$

さらに，列が split するならば等号が成り立つ。

系. $E'$ (resp. $E''$) が自明ならば，

$$\lambda(E,X)\leqq\lambda(E'',X)\quad(\text{resp. } \lambda(E,X)\leqq\lambda(E',X)).$$

さらに，列が split すれば等号が成り立つ。

例1. (a) $E$ を $\mathbb{P}_1$ 上の階数2のベクトル束とする。ある整数 $p$, $q$ があって，$E\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(p)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(q)$ となることが知られているがこのとき

$$\lambda(E,\mathbb{P}_1)=\begin{cases} 1 & p>0 \text{ または } q>0 \text{ のとき}\\ 0 & p=q=0 \text{ のとき}\\ -1 & p=0,\ q<0 \text{ または } p<0,\ q=0 \text{ のとき}\\ -2 & p<0,\ q<0 \text{ のとき}\end{cases}.$$

(b) $C$ を楕円曲線とし，$F_r$ を unique extension

$$0\to\mathcal{O}_C\to F_r\to F_{r-1}\to 0,\quad r=2,3,\cdots$$

とする。ここに，$F_1=\mathcal{O}_C$ 。Atiyah [1] により

$S^m(F_2) = F_{m+1}$, すべての $r$ に対して $\dim H^0(C, F_r) = 1$。よって $\lambda(F_2, C) = -1$。

命題3. $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ を $X$ 上のベクトル束の完全列とすると，次の spectral sequence が存在する。

$$E_1^{pq} = H^q(X, \Lambda^{-p} E' \otimes S^{m+p} E) \Rightarrow H^{p+q}(X, S^m E'') \quad (-m \leqq p \leqq 0).$$

命題4. $f : X \to Y$ をコンパクト複素多様体 $X, Y$ の間の surjective morphism とし，$E$ を $Y$ 上のベクトル束とすると，

$$\lambda(f^*E, X) = \lambda(E, Y).$$

命題5. $f : X \to Y$ をコンパクト複素多様体 $X, Y$ の間の fiber space とし，$E$ を $X$ 上のベクトル束とすると，

$$\lambda(E, X) \leqq \lambda(E_y, X_y) + \dim Y.$$

ここに，$X_y = f^{-1}(y)$ は general fiber，$E_y$ は $E$ の $X_y$ への制限とする。

命題6. $E, F$ をコンパクト複素多様体 $X, Y$ 上のベクトル束とすると，

$$\lambda(\pi_X^* E \oplus \pi_Y^* F, X \times Y) = \lambda(E, X) + \lambda(F, Y).$$

ここに，$\pi_X$，$\pi_Y$ は直積 $X \times Y$ から $X$，$Y$ への射影とする。

## §2. Cotangent Dimension と Fiber Spaces

$X$ を $n$ 次元コンパクト複素多様体とする。$\Omega^1_X$ を $X$ 上の正則 1-型式の芽の層とする。

定義．$Q_m(X) = \dim H^0(X, S^m \Omega^1_X)$ (cotangent $m$-genus)

$\lambda(X) = \lambda(\Omega^1_X, X)$ (cotangent dimension)。

次のような事実が定義から直ちにわかる。

$-\dim X \leqq \lambda(X) \leqq \dim X$ .

$Q_m(X) \sim O(m^{n-1+\lambda})$ （漸近的）.

$\lambda(X) = -\dim X \Longleftrightarrow$ すべての $m > 0$ に対して $Q_m(X) = 0$ .

$\Omega^1_X$ が自明 $\Rightarrow Q_m(X) = \binom{m+n-1}{m}$ $(\Rightarrow \lambda(X) = 0)$.

$\Omega^1_X$ が ample $\Rightarrow \lambda(X) = \dim X$ .

命題 7．$f : X \to Y$ をコンパクト複素多様体 $X$，$Y$ の間の generically surjective meromorphic map とすると，各整数 $m > 0$ に対し injection

$$f^* : H^0(Y, S^m \Omega^1_Y) \hookrightarrow H^0(X, S^m \Omega^1_X)$$

が存在し，

$$\lambda(X) + \dim X \geqq \lambda(Y) + \dim Y$$

が成り立つ。さらに，$\dim X = \dim Y$ で $f$ が bimeromorphic ならば，$f^*$ は isomorphism である。

系． $Q_m(X)$，$\lambda(X)$ は $X$ の bimeromorphic invariants である。

注意． $X$ が特異点をもつ複素空間のとき，$X$ の非特異モデル $X^*$ をとって　$Q_m(X) = Q_m(X^*)$　$\lambda(X) = \lambda(X^*)$　と定義することができる。

定理 1． $f : X \to Y$ をコンパクト複素多様体の間の不分岐被覆とすると，

$$\lambda(X) = \lambda(Y) \quad .$$

証明　$\Omega^1_X = f^*\Omega^1_Y$ より，命題 4 を使えばよい。

定理 2． $X$，$Y$ をコンパクト複素多様体とするとき，

$$\lambda(X \times Y) = \lambda(X) + \lambda(Y) \quad .$$

証明　$\Omega^1_{X\times Y} = \pi_X^*\Omega^1_X \oplus \pi_Y^*\Omega^1_Y$ より，命題 6 から従う。

注意． $\overline{X}$ をコンパクト複素多様体，$D$ を $\overline{X}$ 上の単純正規交叉型因子とする。$X = \overline{X} - D$ とする。

$$\overline{Q_m}(X) = \dim H^0(\overline{X}, S^m(\Omega^1_{\overline{X}}(\log D)))$$ ( logarithmic

cotangent m-genus),

$\bar{\lambda}(X) = \lambda(\Omega^1_{\bar{X}}(\log D), \bar{X})$ (logarithmic cotangent dimension)

と定義する。

fiber space とはコンパクト複素多様体の間の surjective morphism $f: X \to Y$ で general fiber が連結であるものを意味するものとする。

定理3. $f: X \to Y$ を fiber space とすると,

$$\lambda(\Omega^1_{X,y}, X_y) \leqq \lambda(X_y) .$$

ここに $X_y$ は general fiber, $\Omega^1_{X,y}$ は $\Omega^1_X$ の $X_y$ への制限とする。さらに, この fiber space が generically locally trivial ならば等号が成り立つ。

証明　conormal bundle $\check{N}_{X_y/X}$ は自明束 I であるから, 完全列

$$0 \to I \to \Omega^1_{X,y} \to \Omega^1_{X_y} \to 0$$

がある。よって命題2の系からはじめの主張が出る。あとは, 上の完全列の extension class はこの family の y での Kodaira-Spencer class に対応するので, それが split することとこの

fiber space が generically locally trivial になることとが同値であるのに注意すればよい。

<u>定理4.</u> $f: X \to Y$ を fiber space とするとき，

$$\lambda(X) \leqq \lambda(X_y) + \dim Y \quad .$$

ここに，$X_y$ は general fiber。

<u>証明</u> 命題5と定理3より直ちに出る。

<u>定理5.</u> $f: X \to Y$ を fiber space とし，

$\lambda(Y) = \dim Y$ と仮定すると，

$$\lambda(X) = \lambda(\Omega^1_{X,Y}, X_y) + \lambda(Y) \quad .$$

ここに $X_y$ は general fiber。

<u>証明</u> $\kappa$ に関する藤田の結果（[5] Proposition 1.）を使って示される。詳細は略す。

<u>系.</u> $f: X \to Y$ を F を fiber とする fiber bundle とし，$\lambda(Y) = \dim Y$ と仮定すれば，

$$\lambda(X) = \lambda(F) + \lambda(Y) \quad .$$

<u>例2.</u> B を種数 $\geqq 2$ の曲線，$f: S \to B$ を B 上の楕円曲面とする。C を f の general fiber とする。完全列

$$0 \to \mathcal{O}_C \to \Omega^1_{S|C} \to \mathcal{O}_C \to 0$$

に対し，次の2つの場合が考えられる。

(i) $\lambda(\Omega^1_{S|C}, C) = 0$，このとき列は split する。

(ii) $\lambda(\Omega^1_{S|C}, C) = -1$，このとき列は non-trivial extension を与える。（例 1.(b) 参照）

この事と定理 3，5 より

$$\lambda(S) = \begin{cases} 1 & \text{constant moduli (constant } j\text{-invariant)} \\ 0 & \text{non-constant moduli (non-constant } j\text{-invariant)} \end{cases}$$

がわかる。

<u>注意</u>．楕円曲面の family $\Phi: \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ で，各 fiber $S_t$ が種数 $\geq 2$ の曲線 $B_t$ 上の楕円曲面になっているものをとる。$j(t_0)$ が constant で $j(t)$ が一般に non-constant であると仮定する。ここに $j(t)$ は $S_t$ の $j$-invariant とする。すると $\lambda(S_{t_0}) = 1$，$\lambda(S_t) = 0$ となり，cotangent dimen が deformation invariant ではないということの実例を与える。

<u>定理 6</u>．$X$ をコンパクト複素多様体，$a$ を $X$ の meromorphic function field の超越次数とすると，

$$\lambda(X) \leq a(X).$$

<u>証明</u>　[11] Theorem 3.8 より直ちに出る。

<u>Conjecture Λ.</u>　X を非特異完備代数多様体（あるいはコンパクト複素多様体）とすると，

$\Lambda_+ :\ \lambda(X) \leq \kappa(X)$ if $\kappa(X) \geq 0$ .

$\Lambda_{-\infty} :\ \lambda(X) \leq \dim X - 2$ if $\kappa(X) = -\infty$ .

$\Lambda_+$ は次の特別な場合 $\Lambda_0$ から従う。

<u>Conjecture $\Lambda_0$</u>.　$\kappa(X) = 0 \Rightarrow \lambda(X) \leq 0$ .

。X が Kähler で $H^2(X, \mathbb{Q})$ において $c_1(X) = 0$ のとき $\Lambda_0$ が成り立つ。（Kobayashi [7]）

。代数曲面に対して Λ が成り立つ。

。ある $m$ に対し $|mK|$ に base point がなければ $\Lambda_+$ は成り立つ。（前原－藤田）

。次の Conjecture M には反例があることが上野健爾氏により指摘された。

<u>Conjecture M</u>.　$f : X \to Y$ を fiber space とするとき，$\lambda(Y) \neq -\dim Y$ ならば

$$\lambda(X) \leq \lambda(X_y) + \lambda(Y) .$$

ここに，$X_y$ は general fiber .

<u>反例</u>（上野）　X を $\lambda(X) = \dim X$ なる非特異射影代数多様体とする。X の Lefschetz pencil によ

る map : $X \to \mathbb{P}_1$ の不定点を除去して, surjective morphism $f: X' \to \mathbb{P}_1$ を得る。ここに $X'$ は $X$ に birational で, $\lambda(X') = \lambda(X)$。楕円曲線 $E$ と分岐被覆 $\pi: E \to \mathbb{P}_1$ をとり, fiber product $X'' = E \times_{\mathbb{P}_1} X'$ をつくる。$\Phi: X'' \to X'$, $g: X'' \to E$ を射影とする。

$$\begin{array}{ccc} X'' & \xrightarrow{\Phi} & X' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow[\pi]{} & \mathbb{P}_1 \end{array}$$

fiber space $g: X'' \to E$ を考えると, general fiber $g^{-1}(y)$ に対し明らかに $\lambda(g^{-1}(y)) \leqq \dim X'' - 1$. $E$ は楕円曲線だから $\lambda(E) = 0$. また, $\dim X'' = \dim X' = \dim X$ だから命題7より $\lambda(X'') \geqq \lambda(X')$。よって $\lambda(X'') = \lambda(X) = \dim X$。すなわち,

$$\lambda(X'') = \dim X > \dim X - 1 \geqq \lambda(g^{-1}(y)) = \lambda(g^{-1}(y)) + \lambda(E).$$

## §3. アーベル多様体の部分多様体と射影空間の完全交叉部分多様体

この節では部分多様体を考察する。

命題8. $X$ をコンパクト複素多様体 $Y$ の部分多様体とすると, 次の spectral sequence が

ある。

$$E_1^{pq} = H^q(X, \bigwedge^{-p} N_{X/Y}^{\vee} \otimes S^{m+p}\Omega^1_{Y|X})$$
$$\Rightarrow H^{p+q}(X, S^m\Omega^1_X) \quad .$$

<u>証明</u>　完全列 $0 \to N_{X/Y}^{\vee} \to \Omega^1_{Y|X} \to \Omega^1_X \to 0$ に命題3を適用する。

$A$ をアーベル多様体，$X$ をその $n$ 次元部分多様体とすると，上野 [11] p. 116 の議論により，$Q_m(X) \geq \binom{m+n-1}{m}$ がわかる。よって $\lambda(X) \geq 0$。

<u>定理7.</u>　$X$ をアーベル多様体 $A$ の部分多様体とする。normal bundle $N_{X/A}$ が ample ならば，

$$\lambda(X) = \min(\dim X, \operatorname{codim} X) \quad .$$

<u>証明</u>　case (i) $\dim X > \operatorname{codim} X$．$\Omega^1_{A|X}$ は自明束 $I$ であるから，spectral sequence

$$E_1^{pq} = H^q(X, \bigwedge^{-p} N_{X/A}^{\vee} \otimes S^{m+p} I) \Rightarrow H^{p+q}(X, S^m\Omega^1_X)$$
$$(-m < p < 0)$$

がある。$N_{X/A}$ を ample と仮定したから，Sommese の消滅定理（[10] Proposition (1.14)）により，

$$E_1^{p,q} = 0 \quad \text{for } p<0,\ p+q \leq (\dim X - \operatorname{codim} X) - 1 \ .$$

よって，$E_\infty^{p,-p} = \begin{cases} 0 & \text{if } p<0 \\ H^0(X, S^m I) & \text{if } p=0 \end{cases}$

従って，$Q_m(X) = \binom{m+\dim A-1}{m}$。ゆえに，

$\lambda(X) = \operatorname{codim} X$。

case (ii) $\dim X \leqq \operatorname{codim} X$.

$\tilde{c}(\Omega^1_X) = \tilde{c}(\Omega^1_{A|X})\, c(N_{X/A})$ であるから，

$\tilde{c}_n(\Omega^1_X) = c_n(N_{X/A})$。ここに $n = \dim X$。$N_{X/A}$ は ample で，$\dim X \leqq \operatorname{codim} X = \operatorname{rank} N_{X/A}$ だから，$c_n(N_{X/A}) > 0$（Bloch-Gieseker [3]）．$\Omega^1_X$ が global section で生成されるから，命題 1 より $\lambda(X) = \dim X$ を得る。 Q.E.D.

次に射影空間内の完全交叉部分多様体を考えよう。$X$ を $\mathbb{P}_{n+r}$ 内の $r$ 個の超曲面の完全交叉とし，各超曲面の次数を $d_1, \cdots, d_r$ とすると，

$$N = N_{X/\mathbb{P}_{n+r}} = H^{d_1} \oplus \cdots \oplus H^{d_r}.$$

ここに $H$ は $\mathbb{P}_{n+r}$ の超平面束の $X$ への制限とする。$k \leqq r$ に対し，

$$\bigwedge^k N^\vee = \bigoplus_{1 \leqq i_1 \leqq \cdots \leqq i_k \leqq r} H^{-d_{i_1} - \cdots - d_{i_k}}.$$

[8] P. 521 によれば，$H^i(X, S^m \Omega^1_{\mathbb{P}|X} \otimes H^t) = 0$ for $i < n$, $m \geqq t+2$.

よって，命題8の spectral sequence において，

$E_1^{p,q} = H^q(X, \wedge^{-p} N^\vee \otimes S^{m+p} \Omega^1_{\mathbb{P}|X}) = 0$ for $q \neq n$.

ゆえに $m<n$ ならば，$E_1^{p,-p}=0$，$E_\infty^{p,-p}=0$ for $-m \leqq p \leqq 0$。よって $m<n$ に対して，$Q_m(X)=0$ となる。同様にして $n>r$ ならば $Q_m(X)=0$ for all $m$ が示される。まとめると，

<u>定理8.</u> $X$ を射影空間 $\mathbb{P}_N$ 内の完全交叉部分多様体とすると，$m<\dim X$ に対し $Q_m(X)=0$。$\dim X > \operatorname{codim} X$ とすれば，すべての $m$ に対して $Q_m(X)=0$（即ち，$\lambda(X)=-\dim X$）。

<u>注意.</u> $\dim X \leqq \operatorname{codim} X$ のときは，$Q_m(X)$ は消えないことがある。

## <u>§4.</u> 代数曲面の分類

この節では cotangent dimension $\lambda$ による代数曲面の分類を論ずる。$\kappa=-\infty, 0$ の場合以外は分類は完成していない。$\kappa=1,2$ については，$-2 \leqq \lambda \leqq \kappa$ の各 $\lambda$ に対しその例が存在する。

(A) $\kappa=-\infty$，この class の曲面 $S$ は，ある代数曲線 $C$ に対し $\mathbb{P}_1 \times C$ に birational である。定理2より，$\lambda(S)=\lambda(\mathbb{P}_1)+\lambda(C)=\lambda(C)-1$ だから，

$$\lambda(S) = \begin{cases} -2 & C = \mathbb{P}^1 \text{ のとき} \\ -1 & C \text{ が楕円曲線のとき} \\ 0 & C \text{ の種数} \geqq 2 \text{ のとき}. \end{cases}$$

(B) $\kappa = 0$. (i) アーベル曲面と超楕円曲面

アーベル曲面については明らかに $\lambda = 0$.
超楕円曲面はアーベル曲面を不分岐被覆にもつから，$\lambda = 0$.

(ii) K3曲面とエンリケス曲面

§3にて $\mathbb{P}_3$ 内の4次曲面について $\lambda = -2$ であることをみた。一般には小林による次の結果がある。

<u>定理</u>（[7]）$S$ を Kähler K3曲面とすると，

$$\lambda(S) = -2 .$$

より一般に彼は $X$ が単連結なコンパクト Kähler 多様体で $K_X$ が自明なとき，すべての $m$ に対して $Q_m(X) = 0$ となることを示している。

エンリケス曲面は K3曲面を二重不分岐被覆にもつから $\lambda = -2$.

(C) $\kappa = 1$, $\lambda = 0, 1$. §2の例2の楕円曲面が，この class の曲面の例になっている。

(D) $\begin{cases} \kappa=1,\ \lambda=-2,-1 \\ \kappa=2,\ \lambda=-2,-1,0 \end{cases}$

次のような曲線の直積の quotient が，これ5の classes に属する。即ち，$C'$, $C''$ を2つの曲線とし，それぞれが $C_0'$, $C_0''$ の2重被覆になっているとする。$\iota'$, $\iota''$ を対応する involutions とし，$\iota=\iota'\times\iota''$ とおく。$S$ を $C'\times C''/\langle\iota\rangle$ の極小非特異モデルとする。$C'$, $C''$, $C_0'$, $C_0''$ の種数に応じて $S$ は上の各場合の実例を与える。

(E) $\kappa=2,\ \lambda=-2$．　$\kappa=2$ なる $P_3$ 内の超曲面はすべてこの class に属する（定理8）。この class の曲面の quotient で $\kappa=2$ なるものもすべてこの class に属する（命題7）。たとえば，Godeaux 曲面など。

(F) $\kappa=2,\ \lambda=1$．　3次元アーベル多様体の超曲面で $\kappa=2$ なるものはこの class に属する（定理7）。

(G) $\kappa=2,\ \lambda=2$．　$\tilde{c}_2=c_1^2-c_2>0$ なる曲面はこの class に属する（Bogomolov [4]）。この class の曲面の被覆曲面はすべてこの class に属

する。

$\tilde{c}_2 > 0$ なる曲面の例としては、$\mathbb{P}_{2+r}$ $(r \geqq 2)$ 内の一般の完全交叉曲面、種数 $\geqq 2$ なる 2つの曲線の直積などがある。

なお、$\tilde{c}_2 < 0$ で $\kappa = 2$, $\lambda = 2$ なる例もたくさんある。即ち、$\tilde{c}_2 > 0$ なる曲面 $S$ 上の ample line bundle $L$ をとり、$|2mL|$ の非特異因子 $B_m$ をとる。$B_m$ 上で分岐する二重被覆 $\pi : \tilde{S} \to S$ を構成すると、十分大きい $m$ に対し $\tilde{c}_2(\tilde{S}) < 0$, $\kappa(\tilde{S}) = \lambda(\tilde{S}) = 2$ となる。

## §付録 $\mathbb{P}_2 - \{lines\}$ の $\bar{\lambda}$ による分類

開代数曲面の最も簡単な例として $\mathbb{P}_2 - \{lines\}$ がある。Iitaka [2] において $\mathbb{P}_2 - \{lines\}$ の研究がなされているが、その $\bar{\kappa}$ による分類に $\bar{\lambda}$ による分類を加えてみる。$\Delta_0, \Delta_1, \cdots, \Delta_q$ を $\mathbb{P}_2$ 内の直線とし、$\Delta = \bigcup_{i=0}^{q} \Delta_i$, $S = \mathbb{P}^2 - \Delta$ とすると、$\bar{\kappa}(S)$ 及び $\bar{\lambda}(S)$ の値は次の表のようになる。

| Δの型 | $\bar{\kappa}$ | $\bar{\lambda}$ |
| --- | --- | --- |
| I  | $-\infty$ | $-2$ |
| II  | $0$ | $0$ |
| $\mathrm{II}_{\frac{1}{2}}$  $q \geqq 3$ | $1$ | $1$ |
| III その他 | $2$ | $\begin{cases} 1 & \text{if } q=3 \\ 2 & \text{if } q \geqq 4 \end{cases}$ |

証明　$S=\bar{S}-D$, $\bar{S}$は非特異完備曲面，Dは$\bar{S}$の単純正規交叉型因子とする。I, II は容易にわかるので，$\bar{\kappa}(S) \geqq 1$ とする。このとき$\Omega^1_{\bar{S}}(\log D)$は global section で生成される．よって命題1により$\bar{\lambda}(S) \geqq 0$で，

$$\bar{\lambda}(S)=2 \iff c_1^2(\Omega^1(\log D)) - c_2(\Omega^1(\log D)) > 0 .$$

$c_1^2(\Omega^1(\log D)) = \bar{c}_1^2$, $c_2(\Omega^1(\log D)) = \bar{c}_2$ と書く。$\{P_1, \cdots, P_s\}$ をΔ上の重複度3以上の点の集合とし，$\nu_j$を$P_j$におけるΔの重複度とすると，[2] P.7~8により，

$$(*) \quad \bar{c}_1^2 - \bar{c}_2 = \frac{1}{2}(q-2)(q-1) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}(\nu_j-2)(\nu_j-3).$$

これより，$\mathrm{II}_{\frac{1}{2}}$及びIIIで$q=3$のとき（すなわちΔが一般の位置の4本の直線よりなるとき）に $\bar{c}_1^2 - \bar{c}_2 = 0$ がわかる。よってこのとき，

$\bar{\lambda}(S) < 2$ であり，$\bar{\lambda}(S) \geqq 1$ なることは直接確かめられて $\bar{\lambda}(S) = 1$ がわかる。Ⅲで $g \geqq 4$ なる場合に $\bar{c}_1^2 - \bar{c}_2 > 0$ なることは(*)から $g$ に関する帰納法で示される。

## 文献

[1] Atiyah, M.: Vector bundles over an elliptic curve. Proc. London Math. Soc. (3) 7, 27 (1957) 414–452

[2] Iitaka, S.: Geometry on Complements of Lines in $\mathbb{P}^2$. Tokyo Journal of Math. vol. 1, No. 1, 1–19

[3] Bloch, S. & Gieseker, D.: The positivity of the Chern classes of an ample vector bundles. Invent. Math. 12 (1971) 112–117

[4] Bogomolov, F. A.: Families of curves on a surface of general type. Soviet Math. Dokl. 18 (1977) 1041–1044

[5] Fujita, T.: Some remarks on Kodaira dimensions of fiber spaces. Proc. Japan Acad. 53 Ser. A (1977) 28–30

[6] Gieseker, D.: P-Ample bundles and their Chern classes. Nagoya Math. J. 43 (1971) 91–116

[7] Kobayashi, S. : The first Chern class and holomorphic symmetric tensor fields. To appear.

[8] ______. & Ochiai, T. : On complex manifolds with positive tangent bundles. J. Math. Soc. Japan 22 (1970) 499–525

[9] Sakai, F. : Symmetric powers of the cotangent bundle and classification of algebraic varieties. To appear.

[10] Sommese, A. J. : Complex subspaces of homogenuous complex manifolds I. Submanifolds of abelian varieties. Math. Ann. 233 (1978) 229–256

[11] Ueno, K. : Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces. Lecture Notes in Math. 439, Springer (1975)