代数幾何学シンポジウム記録
1978年度　pp.16-55

Minkowski空間の複素化とMaxwellの方程式

京大理　上野健爾

物理と代数幾何との関連が最近話題になっているが，ここではPenrose理論の一部を紹介することにする．詳しくはPenrose [2] [3]を，数学的に整理されたものとしてはWells [4]を参照されたい。

§1. Minkowski空間のコンパクト化

いささか天下りではあるが実6次元ベクトル空間M^6及びその上の符号が$(++----)$である内積$(\cdot)$を考える．M^6の部分集合Vを

$$V = \{ v \in M^6 \mid v \neq 0,\ (v \cdot v) = 0 \}$$

で定める。Vには自然に$\mathbb{R}^*$が作用しており，商空間$\overline{M} = V/\mathbb{R}^*$は微分可能多様体となる。$\overline{M}$は$\mathbb{P}_5(\mathbb{R})$の部分多様体

(1.1)　$$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2$$

として実現できるので，$S^1 \times S^3$と微分同相である。$\pi : V \longrightarrow \overline{M}$を商写像とする．さて$V$の4次元部分多様体$W$が$\pi|_W : W \xrightarrow{\sim} \pi(W)$

微分同相なる時，M^6 の内積 $(\cdot)$ は W 上に符号 $(+---)$ なる距離を引き起すことは簡単な計算でたしかめることができる。更に V の4次元部分多様体 W_1, W_2 が同様の条件を満足し，$\pi(W_1)\cap\pi(W_2)\neq\phi$ とすると，$f=\pi|_{W_2}^{-1}\circ\pi|_{W_1}: U_1=\pi^{-1}|_{W_1}(\pi(W_1)\cap\pi(W_2))\longrightarrow U_2=\pi^{-1}|_{W_2}(\pi(W_1)\cap\pi(W_2))$ なる W_1 の開集合から W_2 の開集合への写像が定まる。この時定義よりただちに分かるように f は λ なる零にならない可微分函数の掛算として得られる。そこで $v_1(t)$, $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ を U_1 内の道，$v_2(t)=f(v_1(t))$ とおくと，実は $v_2(t)=\lambda(v_1(t))\,v_1(t)$ となり，

$$v_2'(t) = \frac{d}{dt}\lambda(v_1(t))\,v_1(t) + \lambda\, v_1'(t)$$

が成立する。一方 $(v_1(t)\cdot v_1(t))=0$ であるから，$(v_1(t)\cdot v_1'(t))=0$。従って $(v_2'(t)\cdot v_2'(t))=\lambda^2\,(v_1'(t)\cdot v_1'(t))$ となる。即ち写像 f は U_1 から U_2 への等角写像 (conformal mapping) になっている。かくして M^6 の内積によって $\overline{M}$ 上に等角構造 (conformal structure) が自然に引起されることが分かった。以下 $\overline{M}$ はこの等角構造を持ったものとして考える。

次に $\overline{M}$ が Minkowski 空間の自然なコンパクト

化になっていることを見よう。

定義1. $\overline{M} \ni p, q$ が直交する, $p \perp q$
$\iff p = \pi(v),\ q = \pi(w),\ v, w \in V$ の時 $(v \cdot w) = 0$.

また $p \in \overline{M}$ に対して

$$p^{\perp} = \{ q \in \overline{M} \mid q \perp p \}$$

とおくと, $p^{\perp}$ は $\overline{M}$ の閉集合である。

定理1. 1) $\overline{M}$ の任意の点 p に対して, $u_1, u_2 \in V$, $\pi(u_1) = p$, $(u_1 \cdot u_2) = 1$ をとり

$$M = \{ v \in M^6 \mid (u \cdot u_1) = (u \cdot u_2) = 0 \}$$

とおくと, M は $(\cdot)$ より引起される距離によって Minkowski 空間となる。

2) $k : M \xrightarrow{\sim} \overline{M} - p^{\perp}$ なる等角写像が存在する。

証明) u_1, u_2 よる張られるベクトル空間上で $(\cdot)$ は符号が $(+, -)$ であるから 1) は明らか。

2) の証明のために

$$M_p = \{ w \in V \mid u_1 \cdot w = 1 \}$$

とおくと, $\pi|_{M_p} : M_p \xrightarrow{\sim} \overline{M} - p^{\perp}$ は微分同相であり, $\overline{M}$ の等角構造の入れ方よりこの写像は等角である。一方

$$\kappa_0 : M \ni v \longmapsto v - \frac{1}{2}(v\cdot v)u_1 + u_2 \in M_p$$

は直ちに分かるように同型写像。かつ

$$d\kappa_0(v) = dv - (v\cdot dv)u_1 ,$$

であり，Mの定義から $(v\cdot u_1)=0$ であることより，$(d\kappa_0(v)\cdot d\kappa_0(v)) = (dv\cdot dv)$ となる。即ち κ_0 は等距離写像。$\kappa = \pi|_{M_p}\cdot\kappa_0$ とおけばよい。 □

かくして $\overline{M}$ は Minkowski 空間の等角的コンパクト化であることが分かった。更に $\overline{M}$ の定義式 (1.1)が暗示するように，$\overline{M}$ はグラスマン多様体と関連している。このことは次節で述べることにするが，その準備を少ししておく。

<u>定理2</u>　Γ を M^6 の2次元全等方的部分空間とする。即ち $(u\cdot u)=(v\cdot v)=(u\cdot v)=0$ なる u, v によって Γ は張られているとする。この時 $\gamma = \pi(\Gamma-\{0\})$ は $\overline{M}$ の零測地線である。逆に $\overline{M}$ の任意の零測地線は $\overline{M}$ の適当な2次元全等方的部分空間 Γ によって $\pi(\Gamma-\{0\})$ と書ける。

証明）定理1の証明と同じ記号を使う。但し，$u_1\in V$, $u_2\in\Gamma$ と仮定する。$\dim_{\mathbb{R}}\Gamma = 2$ であるから，$u_1\cdot u_\infty = 0$ なる $u_\infty\in\Gamma$ が存在する。仮定

より $(u_\infty \cdot u_\infty) = 0$ 。よって $\{\lambda u_\infty \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ は Minkowski 空間 $M = \{v \in M^6 \mid (v \cdot u_1) = (v \cdot u_2) = 0\}$ の零測地線である。定義より $k(\lambda u_\infty) = \pi(\lambda u_\infty + u_2) \in \gamma = \pi(\Gamma - \{0\})$ 。逆に $\gamma \ni \delta$ に対して $\delta = \pi(u)$, $u = \mu u_\infty + \nu_2$ とおくと，$\nu \neq 0$ であれば

$$\delta = \pi(u) = \pi\left(\frac{\mu}{\nu} u_\infty + u_2\right) = k\left(\frac{\mu}{\nu} u_\infty\right)$$

従って $\gamma - \{\pi(u_\infty)\}$ は $\overline{M} - P^\perp$ の零測地線であり，γ は 1 次元可微分部分多様体であるので，γ は $\overline{M}$ の零測地線である。

逆に γ は点 $\delta \in \overline{M}$ を通る零測地線とし，$N \subset T_\delta(\overline{M})$ を γ の定める零方向ベクトルの作る 1 次元部分空間とする。$\delta = \pi(v)$, $v \in V$ とおき，dv を V に点 v で接する接ベクトルで $\pi(dv) \in N$ なるものとする。v, dv で張られる 2 次元部分空間 $\Gamma \subset M^6$ は全等方的である。$\gamma' = \pi(\Gamma - \{0\})$ は零測地線。これは点 δ で γ と同方向であるので，$\gamma' = \gamma$. □

同様にして次の定理も証明される。

<u>定理 3</u>. $\delta, \delta' \in \overline{M}$ が同じ零測地線上にあるための必要十分条件は $\delta \perp \delta'$ となることである。

§2 Twistor空間

Twistor空間の物理的解釈は次節で述べることにして，ここでは数学的側面について述べる。

Tを複素4次元ベクトル空間，(|)をT上の符号(++,−−)なるエルミット内積とする。*)
Tの底 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ が

$$(e_i \mid e_j) = (-1)^i \delta_{ij} \qquad i, j = 1, 2, 3, 4$$

を満足する時，正規直交底と呼ぶことにする。
$\omega \in \bigwedge^4 T$ はTの正規直交底 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ を使って $\omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ と書ける時，正規化4ベクトルと呼ぶ。(T, (|), ω)が与えられた時，Tの元をtwistorと呼ぶ。以下(T, (|), ω)を一つ固定して考察する。

$\bigwedge^2 T$ 上の対称形式 $u \cdot v$ 及びエルミート形式 $(u \mid v)$ を次のように定める。

(2.1) $\quad u \wedge v = (u \cdot v)\,\omega$

(2.2) $\quad t_1, t_2, s_1, s_2 \in T$ に対して

$$(t_1 \wedge t_2 \mid s_1 \wedge s_2) = \begin{vmatrix} (t_1 \mid s_1) & (t_1 \mid s_2) \\ (t_2 \mid s_1) & (t_2 \mid s_2) \end{vmatrix}$$

---

*) (|)は第1変数に関して $\mathbb{C}$ −線型とする。

さて $\overset{2}{\Lambda}T$ の任意の元 v に対して $v^{\perp} \in \overset{2}{\Lambda}T$ を

$$u \cdot v = (u | v^{\perp})$$

で定義する。ただちに分かるように，対応 $v \longrightarrow v^{\perp}$ は $\mathbb{C}$－反線型である。

<u>定理 1</u>．1) $(v^{\perp})^{\perp} = v$

2) $\mathrm{Re}\,\overset{2}{\Lambda}T \underset{\mathrm{Dfn}}{=} \{v \in \overset{2}{\Lambda}T \mid v^{\perp} = v\}$ は 6 次元実ベクトル空間である。

3) 対称形式 $u \cdot v$ は $\mathrm{Re}\,\overset{2}{\Lambda}T$ 上に符号 $(++----)$ の内積を引起す。

証明）．$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ を T の正規直交底，$\omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ とする時，$e_{ik} = e_i \wedge e_k$ と定義する。

$$\eta_1 = e_{12} - e_{34}, \quad \eta_2 = e_{13} - e_{24}, \quad \eta_3 = e_{14} - e_{23}$$

$$\eta_4 = \sqrt{-1}(e_{12} + e_{34}), \eta_5 = \sqrt{-1}(e_{13} + e_{24}), \eta_6 = \sqrt{-1}(e_{14} + e_{23})$$

とおくと，これが $\mathrm{Re}\,\overset{2}{\Lambda}T$ の $\mathbb{R}$ 上の底となる。また

$$\eta_\alpha \cdot \eta_\beta = \begin{cases} 2, & \alpha = \beta = 2, 5 \\ 0, & \alpha \neq \beta \\ -2, & \alpha = \beta = 1, 3, 4, 6 \end{cases}$$

となる。 □

従って $M^6 = \mathrm{Re}\,\overset{2}{\Lambda}T$ とおくことによって前節の議論が適用できる。すると $\gamma \in \overline{M}$ は $\gamma = \pi(v)$

, $v \neq 0$　$v \cdot v = 0$と書ける。これは(2.1)より
$v = t_1 \wedge t_2$, $t_1, t_2 \in T$ と書けることを意味する。
そこで

$$S(\gamma) = \mathbb{C}t_1 + \mathbb{C}t_2 = \langle t_1, t_2 \rangle_{\mathbb{C}}$$

と，Tの2次元部分空間を定義する。

定理2．1) $\overline{M}$の任意の点γに対して$S(\gamma)$は(1)に関して全等方的，即ち $(1)|_{S(\gamma)} \equiv 0$ 。

2) 対応

$$\overline{M} \ni \gamma \longmapsto S(\gamma) \in \left\{ \begin{array}{c} (T, (1))\text{の2次元全等方的} \\ \text{部分ベクトル空間} \end{array} \right\}$$

は全単射である。

3) $\gamma, \gamma' \in \overline{M}$が同じ零測地線に属するための必要十分条件は $S(\gamma) \cap S(\gamma') \neq 0$ である。

証明) 1) $v = t_1 \wedge t_2$ とすると，任意の$t \in T$に対して　$v \wedge t_1 \wedge s = 0$。よって (2,1)，(2,2) より

$$0 = v \cdot (t_1 \wedge s) = (t_1 \wedge s \mid v^{\perp}) = (t_1 \wedge s \mid v)$$
$$= (t_1 \wedge s \mid t_1 \wedge t_2) = (t_1|t_1)(s|t_2) - (s|t_1)(t_1|t_2)$$

sは任意でよかったから $(t_1|t_1) = (t_1|t_2) = 0$である。同様にして $(t_2|t_2) = 0$.

2) $S = \langle t_1, t_2 \rangle_{\mathbb{C}}$ を2次元全等方的とする。
$(t_1|t_1) = (t_1|t_2) = (t_2|t_2) = 0$ より

$$(t_1\wedge t_2 \mid t_1\wedge s) = 0, \qquad {}^\forall s \in T .$$

従って $(t_1\wedge t_2)^\perp \wedge t_1 = 0$ である。同様にして $(t_1\wedge t_2)^\perp\wedge t_2 = 0$。よって $(t_1\wedge t_2)^\perp = \lambda t_1\wedge t_2$, $\lambda\in\mathbb{C}^*$ でなければならない。定理1 1)より $|\lambda| = 1$。そこで $\lambda = \mu/\bar{\mu}$, $\mu\in\mathbb{C}^*$ とおき、$v = \mu t_1\wedge t_2$ とおくと、$v^\perp = v$。また $v\cdot v = 0$ は上のことより明らか。$\gamma = \pi(v)$ とおくと $S = S(\gamma)$.

3) これは §1の定理3の書換にすぎない。□

さて $\bar{M}$ の零測地線 Υ に対して

$$R(\Upsilon) \underset{\mathrm{Dfn}}{=} \bigcap_{\gamma\in\Upsilon} S(\gamma)$$

と定義する。定理2, 3)より Υ の任意の2点 γ γ' に対して $S(\gamma)\cap S(\gamma') \neq 0$。また定理2, 2)より、もし $R(\gamma) = 0$ であれば Υ 上の3点 $\gamma, \gamma', \gamma''$ で $S(\gamma)\cap S(\gamma')\cap S(\gamma'') = 0$ なるものが存在する。すると $S(\gamma)\cap S(\gamma') \ni v_1$, $S(\gamma')\cap S(\gamma'') \ni v_2$, $S(\gamma'')\cap S(\gamma) \ni v_3$ なる元を適当に選べば1次独立になる。また $S(\gamma)$, $S(\gamma')$, $S(\gamma'')$ は全等方的であるので、3次元部分空間 $\langle v_1, v_2, v_3\rangle_{\mathbb{C}}$ も (1) に関して全等方的。これは (1) の符号 $(++,----)$ に反す

る。よって $\dim_{\mathbb{C}} R(\gamma)=1$ でなければならない。$R(\gamma)$ は勿論全等方的。逆に R を T の1次元全等方的部分空間とする。R の中の 0 でない元 t を使って

$$\Gamma = \{ v \in M^6 = \mathrm{Re}\overset{2}{\wedge} T \mid v \wedge t = 0 \}$$

とおくと、これは全等方的である。何故ならば Γ の任意の元は $t \wedge s$ の形に書け、従って $v, v' \in \Gamma$ に対して (2、1) より $(v|v') = v \cdot v' = 0$ となるからである。よって $\dim_{\mathbb{R}} \Gamma \leq 2$。一方 Γ 内に2個の1次独立な元が選べるから Γ は2次元である。よって §1 定理2によって $\gamma = \pi(\Gamma - \{0\})$ は $\overline{M}$ の零測地線。作り方より $R(\gamma) = R$。よって次の定理を得る。

定理3. 対応 $\gamma \longmapsto R(\gamma)$ は $\overline{M}$ の零測地線全体と T の(1)に関する1次元全等方的部分空間の間の全単射を与える。また $\delta \in \gamma$ であることと $R(\gamma) \subset S(\delta)$ であることとは同値である。

§3 スピノル

$SO^\circ(1,3)$ の普遍被覆群はよく知られているように $SL(2,\mathbb{C})$ と同型である。被覆写像 ψ：$SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow SO^\circ(3,1)$ は次の様に与えられる。(x^0, x^1, x^2, x^3) を Minkowski 空間の座標とし、この座標によって距離が $(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2$ より引起されているとする。この時 2×2 行列 Q を

$$Q = \begin{pmatrix} x^0+x^1, & x^2+\sqrt{-1}x^3 \\ x^2-\sqrt{-1}x^3, & x^0-x^1 \end{pmatrix}$$

と定義する。$g \in SL(2,\mathbb{C})$ に対して $gQ{}^t\bar{g}$ を

$$gQ{}^t\bar{g} = \begin{pmatrix} x_0'+x_3', & x_1'+\sqrt{-1}x_2' \\ x_1'-\sqrt{-1}x_2', & x_0'-x_3' \end{pmatrix}$$

と書くと、(x_α) より (x_α') への1次変換 $\psi(g)$ が定まる。これが求める写像である。

さて Minkowski 空間 M の接束 TM は $SO^\circ(1,3)$ 束と見ることができる。TM は自明な束であるから、被覆写像 ψ によって M 上に $SL(2,\mathbb{C})$ 束 Λ が構成できる。Λ は $\mathbb{C}^2$－束である。$\overbrace{TM\otimes\cdots\otimes TM}^{a} \otimes \underbrace{T^*M\otimes\cdots\otimes T^*M}_{b}$ の M 上の C^∞ 切断が (a,b) 型のテンソル場（以下場は省く）であったが、

$$(3.1)\quad \underbrace{\Lambda\otimes\cdots\otimes\Lambda}_{a}\otimes\underbrace{\bar{\Lambda}\otimes\cdots\otimes\bar{\Lambda}}_{a'}\otimes\underbrace{\Lambda^*\otimes\cdots\otimes\Lambda^*}_{b}\otimes\underbrace{\bar{\Lambda}^*\otimes\cdots\otimes\bar{\Lambda}^*}_{b'}$$

のC^∞切断をスピノル(場)と呼ぶ。テンソルとスピノルの間には当然のことながら対応がある。テンソルからスピノルへの移行を述べるために，TMからΛを作った上の操作をもう少し一般的の場合に考えることにする。

Nを実4次元微分可能多様体，(g_{ij})を符号が$(+,---)$なる距離とする。再びTNは$SO^0(1,3)$束と考えることができる。今度は必ずしも対応する$SL(2,\mathbb{C})$束がN上には構成できない。(局所的には常に可能であるが。) $SL(2,\mathbb{C})$束Λが構成できるための必要十分条件は2次Stiefel-Whitney類$w_2(N)=0$である。そこで$w_2(N)=0$を仮定しよう。その時(3.1)のC^∞切断をスピノルと呼ぼう。この時テンソルからスピノルへの移行は次の条件を満足するN上の2×2エルミット行列$(\sigma_i^{JJ'})$，$(\sigma^i_{JJ'})$ $J=0,1$, $J'=0,1$, $i=0,1,2,3$によって与えられる。(正確には$(\sigma_i^{JJ'})$は座標によって形が変わりあるベクトル束のC^∞切断である。)

$$(3.2)\quad \begin{cases} \sigma_j{}^{JJ'}\sigma_k{}^{KK'}\varepsilon_{JK}\varepsilon_{J'K'} = g_{jk} \\ \sigma_j{}^{JJ'}\sigma^i{}_{JJ'} = \delta^i_j \end{cases}$$

但しここで上添数と下添数に同じ大文字が現われた時は，それに関する和をとり，また

$$(\varepsilon_{JK}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\varepsilon_{J'K'}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

局所座標で表現したテンサーが $(X^{ij}{}_k)$ であれば，対応するスピノル $X^{II'JJ'}{}_{KK'}$ は

$$(3.3)\quad X^{II'JJ'}{}_{KK'} = X^{ij}{}_k\,\sigma_i{}^{II'}\sigma_j{}^{JJ'}\sigma^k{}_{KK'}.$$

で与えられる。ここで再び和の記号を省いた。以下特に断らない限り，Einsteinの記法を使う。さて(3.3)では正確には $X^{I_0I_1'J_0J_1'}{}_{K_0K_1'}$ とでも書くべきであるが記号が繁雑になるのでこの略記法を使う。IとI'の"I"は違っていることに注意してほしい。また $X^{II'JJ'}{}_{KK'}$ は $\Lambda\otimes\bar{\Lambda}\otimes\Lambda\otimes\bar{\Lambda}\otimes\Lambda^*\otimes\bar{\Lambda}^*$ の C^∞ 切断（の局所座標による表現）である。一般型のテンソルに対しても(3.3)と同様に変換式が使える。テンソルに対応するスピノルは必ず II' のように"'"のつかない添数とつく添数とが対になって現われていることに注

意しておく。スピノルの　複素共役は

$$\overline{\xi^A} = \overline{\xi}^{A'},\quad \overline{X^{I_0 I_1'}} = \overline{X}^{I_0' I_1}$$

などのように書かれる。右辺の添数で"$'$"が入れ替わったのは$\wedge$と$\overline{\wedge}$とが複素共役で入れ替ったからである。(3,3)よりすぐ分かることであるが、実テンソルに対応するスピノルはエルミット的になっている。即ち

$$\overline{X}^{I_1' I_0\, J_1' J_0}{}_{K_1' K_0} = X^{I_0 I_1' J_0 J_1'}{}_{K_0 K_1'}\ .$$

逆にスピノルから　テンサーに移行するには(3,2)を使って(3,3)を逆に解けばよく

$$(3,4)\qquad X^{ij}{}_{k} = \sigma^{i}{}_{II'}\,\sigma^{j}{}_{JJ'}\,\sigma_{k}{}^{KK'}\,X^{II'JJ'}{}_{KK'}$$

となる。更にスピノルの添数の上げ下げを

$$(3,5)\qquad X^{A}{}_{B} = X^{AC}\varepsilon_{CB}\ ,\quad X^{A}{}_{B'} = X^{AC'}\varepsilon_{C'B'}$$
$$X_{A}{}^{B}{}_{C} = X_{ADC}\,\varepsilon^{DB}\quad X_{A}{}^{B'}{}_{C} = X_{AD'C}\,\varepsilon^{D'B'}$$

などと定める。ここで

$$(\varepsilon^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\ (\varepsilon^{A'B'}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

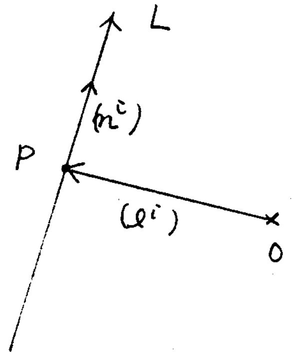
(ε_{AB}) (ε^{AB})などは歪対正であるので(3,5)で和をとる時のεの添数の順序に注意されたい。

さて(3,2)の条件を満足するエルミット行列を与える。Minkowski空間では上の座標を使って

$$
(3,6)\quad
\begin{cases}
(\sigma_0{}^{AA'}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\sigma_1{}^{AA'}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\[2ex]
(\sigma_2{}^{AA'}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\sigma_3{}^{AA'}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} \\[2ex]
\qquad\qquad (\sigma^i{}_{AA'}) = (\sigma_i{}^{AA'})
\end{cases}
$$

が条件を満足している。$SL(2,\mathbb{C})$でエルミット共役をとってやれば，他にも条件(3,2)を満足する行列が作られる。また局所Minkowskiの時にも局所的に上の行列から条件(3、2)を満足する行列が構成できる。

さて以上の準備のもとで，Minkowski空間Mの零測地線をスピノルを使って表示してみよう。上述の様にMの原点を定め座標(x^0, x^1, x^2, x^3)を導入する。また距離テンソルはこの座標で



$$
(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}
$$

と表されているとする。

LをMの零測地線とし，PをL上の任意の点，(n^i)は未来方向のLの方向ベクトル，$\overrightarrow{OP} =$

(l^i) とおく。(l^i), (n^j) より定まる Plücker 座標 $m^{ij} = l^i n^j - l^j n^i$ を考えると、L は (n^i, m^{ij}) によって一意的に定まることが分かる。(3.3) に従って (l^i), (n^i) (m^{ij}) に対応するスピノルを $l^{II'}$ $n^{II'}$, $m^{II'JJ'}$ と書くことにする。

<u>補題 1</u>. 1) λ^J なるスピノルが存在して

$$n^{JJ'} = \lambda^J \bar{\lambda}^{J'}$$

2) $\mu_{A'} = -\sqrt{-1}\,\lambda^A l_{AA'}$ とおくと

$$m^{JJ'KK'} = \sqrt{-1}\,\varepsilon^{JK}\mu^{(J'}\bar{\lambda}^{K')} - \sqrt{-1}\,\bar{\mu}^{(J}\lambda^{K)}\varepsilon^{J'K'}$$

但し $\mu^{(J'}\bar{\lambda}^{K')} = \frac{1}{2}(\mu^{J'}\bar{\lambda}^{K'} + \mu^{K'}\bar{\lambda}^{J'})$ を意味する。

証明) 1) は

(n^i) の内積 $= 0 \iff \det(n^{JJ'}) = 0 \iff n^{JJ'} = \lambda^J \mu^{J'}$,

かつ $(n^{JJ'})$ はエルミットより $\mu^{J'} = \overline{\lambda^J}$ が出る。

2) は単純だが少々長い計算が必要なので略す。 □

この補題より (n^j), (m^{jk}) はスピノル λ^A, $\mu_{A'}$ より一意的に定まる。また (n^j) に対して λ^J は絶対値 1 の複素数倍だけの不定性がある。更に (n^j) 自身正の実数倍だけの不定性があり、この時 λ^A は $\mathbb{C}^*$ の元をかけるだけの不定性がも

る。また $\alpha\in\mathbb{C}^*$ によって λ^A が $\alpha\lambda^A$ と変わると，$\mu_{A'}$ は定義によって $\alpha\mu_{A'}$ に変わる。かくして零測地線 L に対して $(\lambda^0,\lambda^1,\mu_{0'},\mu_{1'}) \bmod \mathbb{C}^*$ は一意的に定まる。*) $(n^j)\neq 0$ であるから $(\lambda^0,\lambda^1)\neq(0,0)$ 従って L に対して $(\lambda^0:\lambda^1:\mu_{0'},\mu_{1'})\in P_3(\mathbb{C})$ が一意的に定まり，これは M の零測地線全体から $P_3(\mathbb{C})$ の中への単射を与えている。M の零測地線全体は実 5 次元のパラメータを持ち，$P_3(\mathbb{C})$ は実 6 次元だから，この写像は全射ではない。この像を特徴づけてみよう。

(l^j) は実ベクトルであるから $(l_{AA'})$ はエルミット行列。$\mu_{A'}$ の定義より

$$\lambda^A\bar{\mu}_A = \sqrt{-1}\,\lambda^A(\bar{\lambda}^{A'}\bar{l}_{A'A}) = \sqrt{-1}\,\lambda^A l_{AA'}\bar{\lambda}^{A'}$$

は純虚数である。従って零測地線 L に対応するスピノルの対 $(\lambda^0,\lambda^1,\mu_{0'},\mu_{1'})$ は

(3.17) $$\mathrm{Re}\,\lambda^A\bar{\mu}_A = 0$$

を満足する。逆も次の形で成立する。

補題 2. $(\lambda^A,\mu_{A'})$ が $\mathrm{Re}\,\lambda^A\bar{\mu}_A=0$ を満足し，$(\lambda_A)\neq 0$ であれば $(\lambda^A,\mu_{A'})$ に対応する零測地

*) $\mu_{A'}$ が点 P の取り方によらないことは容易に分かる。

線が存在する。

証明） もし $\lambda^B\bar{\mu}_B \neq 0$ であれば

$$l_{AA'} = \sqrt{-1}\,(\lambda^B\bar{\mu}_B)^{-1}\bar{\mu}_A\mu_{A'}$$

とおくと $(l_{AA'})$ はエルミット行列。従って (3.4) によって $(l^{AA'})$ に対応する M のベクトル (l^i) が定まり，$\overrightarrow{OP}=(l^i)$ として点 P が定まる。この時点 P を通り，$n^{JJ'}=\lambda^J\bar{\lambda}^{J'}$ に対応するベクトル (n^i) を未来方向に持つ零測地線 L が定まる。これが求めるものである。もし $\lambda^A\bar{\mu}_A = 0$ であれば ν_A なるスピノルに対して

$$l_{AA'} = \lambda_A\bar{\nu}_{A'} + \nu_A\bar{\lambda}_{A'}$$

とおくと $-\sqrt{-1}\,\lambda^A l_{AA'} = -\sqrt{-1}\,(\lambda^A\nu_A)\bar{\lambda}_{A'}$ となる。この時 $\mu_{A'} = -\sqrt{-1}\,(\lambda^A\nu_A)\bar{\lambda}_{A'}$ なるように ν_A をとることができる。あとは上と同じ。 □

零測地線 L に対して

$$L^0=\lambda^0,\quad L^1=\lambda^1,\quad L^2=\mu_{0'},\quad L^3=\mu_{1'}$$

とおく。これは $\mathbb{C}^*$ を法として一意的に定まる。補題 1，2 より L が M の零測地線であれば $(L^0:L^1)\neq(0:0)$。また $L^{(*)}=(\lambda^0:\lambda^1:0:0)$ 全体は原点を通る零測地線全体を表わしている。

このことから $(L^\alpha) = (0:0:\mu_{0'}:\mu_{1'})$ も無限遠点を通る零測地線全体と考えたくなる。これは M（正確には $\overline{M}$）の等角変換を考えると自然に証明できる。これについては後述する。

かくして等角的にコンパクト化された Minkowski 空間 $\overline{M}$ の零測地線全体と $P_3(\mathbb{C})$ の点、$(\lambda^0:\lambda^1:\mu_{0'}:\mu_{1'})$ で (3.7) を満足するものとが1対1に対応することが分かった。零測地線全体が分かれば $\overline{M}$ の点を復原できる。$\overline{M}$ の点 g には g を頂点とする零錐が対応し，零錐は $P_3(\mathbb{C})$ の射影直線に対応しているからである。($(\lambda^0:\lambda^1:0:0)$ が O を頂点とする零錐であることに注意せよ。) 従って次の定理が得られた。

<u>定理1</u> 1) $\overline{M}$ の零測地線 L に対して $P_3(\mathbb{C})$ の点 $(L^\alpha) = (\lambda^0:\lambda^1:\mu_{0'}:\mu_{1'})$ が一意的に定まり，この座標は関係式 (3.7) を満足する。この対応は $\overline{M}$ の零測地線と (3.7) で定義される $P_3(\mathbb{C})$ の部分集合 N との間の全単射を与えている。

2) $\overline{M}$ の各点 g に対して N に含まれる $P_3(\mathbb{C})$ の射影直線が一意的に定まり，この対応によっ

て $\bar{M}$ と $\{G \subset N \mid G$ は $P_3(\mathbb{C})$ の射影直線$\}$ とが同型である。

座標を使ってこの定理を書換えてみよう。$T = \mathbb{C}^4$, 座標を (z^0, z^1, z^2, z^3) とする。$2\mathrm{Re}\,\lambda^A \bar{\mu}_A$ に対応する式は

$$z^0\overline{z^2} + z^1\overline{z^3} + z^2\overline{z^0} + z^3\overline{z^1}$$

となる。そこでエルミット形式 Φ を

$$\Phi(Z, W) = z^0\overline{w^2} + z^1\overline{w^3} + z^2\overline{w^0} + z^3\overline{w^1} \tag{3.8}$$

と定めると，符号は $(++--)$ となる。定理1 1)は $N = \{T$ の1次元部分空間 $R \mid \Phi|_R \equiv 0\}$ が $\bar{M}$ の零測地線と1対1の対応があることで，これはまさしく§2の定理3に他ならない。
また $\{G \subset N \mid G$ は $P_3(\mathbb{C})$ の射影直線$\} \cong$ $\{\Gamma \subset T \mid \Gamma$ は T の2次元部分空間, $\Phi|_\Gamma \equiv 0\}$ なる同型があるから，定理1, 2) は§2の定理2に他ならない。かくして twistor 空間 T の物理的意味は明瞭になった。$(\lambda^0, \lambda^1, \mu_{0'}, \mu_{1'}) \in T$ の時 (λ^0, λ^1) は運動量に $(\mu_{0'}, \mu_{1'})$ は角運動量に対応したスピノルと見なすことができる。

§4 複素 Minkowski 空間

前節の定理1, 2) をヒントにしてコンパクト化された Minkowski 空間 $\overline{M}$ の複素化を $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ の中の射影直線全体の作るグラスマン多様体 $G_1(\mathbb{P}_3(\mathbb{C}))$ (もしくは $G_{2,4}(\mathbb{C})$: T 内の 2 次元部分空間全体の作るグラスマン多様体) であると考え，これを $M_{\mathbb{C}}$ と記す。$M_{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{P}(\overset{2}{\wedge} T)$ の 2 次超曲面として実現でき，座標をうまくとって (1.1) の形をしているとしてよい。従って $M_{\mathbb{C}}$ は自然に $\overline{M}$ の複素化と考えられる。また $\mathbb{F}=\mathbb{F}_{12}$ を T の 1 次元部分空間，2 次元部分空間の作る旗多様体とすると

(4.1)
$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{F} \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
\mathbb{P}_3(\mathbb{C}) \arrow[rr, squiggly, "\tau"] & & M_{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}
$$

なる自然な写像が定義できて，τ なる代数的対応が存在する。次の補題は明らか。

補題 1. 1) $p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ に対して $\tau(p) = \beta(\alpha^{-1}(p))$ は $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ と同型

2) $g \in M_{\mathbb{C}}$ に対して $\tau^{-1}(g) = \alpha(\beta^{-1}(g)) \simeq \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$

さて twistor 空間 T は

$$T^+=\{z\in T \mid \Phi(z,z)>0\},\quad T^-=\{z\in T \mid \Phi(z,z)<0\}$$

$$T^0=\{z\in T \mid \Phi(z,z)=0\}$$

の3部分に互いに交わらないように分割できる。T^+の元を正 twistor, T^0の元を零 twistor などと呼ぶことにする。これらの $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ への像(但し T^0の時は $T^0-\{0\}$ の像)を $\mathbb{P}_3^+$, $\mathbb{P}_3^-$, $N=\mathbb{P}_3^0$ と書くことにする。また $M_{\mathbb{C}}$の部分集合を

$$M_{\mathbb{C}}^+=\{g\in M_{\mathbb{C}} \mid g\text{に対応するTの2次元部分空間上で}\ \Phi\text{は正定値}\}$$

$$M_{\mathbb{C}}^0=\{g\in M_{\mathbb{C}} \mid g\text{に対応するTの2次元部分空間上で}\ \Phi\text{は恒等的に}0\}$$

と定義する。$M_{\mathbb{C}}^-$も同様に定義できる。$M_{\mathbb{C}}^\pm, M_{\mathbb{C}}^0$ では $M_{\mathbb{C}}$全体を覆うことはできない。また $M_{\mathbb{C}}^0=\overline{M}$ である。$F^+=\beta^{-1}(M_{\mathbb{C}}^+)$, $F^0=\beta^{-1}(M_{\mathbb{C}}^0)$ とおくと(4.1)の代数的対応より

(4.2)
$$\begin{tikzcd} & F^+ \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ \mathbb{P}_3^+ \arrow[rr, rightsquigarrow, "\tau^+"] & & M_{\mathbb{C}}^+ \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & F^0 \arrow[dl, "\alpha_0"'] \arrow[dr] & \\ N \arrow[rr, rightsquigarrow, "\tau_0"] & & \overline{M} \end{tikzcd}$$

なる対応を得る。

<u>定理1</u>. 1) $\mathbb{P}_3^+$ は複素4次元の射影直線の族を含み、$M_{\mathbb{C}}^+$ がそれらのパラメータ空間である

2) $M_{\mathbb{C}}^+$ は $\{Z\in M_2(\mathbb{C}) \mid \frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z-{}^t\bar{Z})>0\}$ と正則同型であり、従って $I_{2,2}$ 型の有界対称領域 $\{Z\in M_2(\mathbb{C}) \mid I_2-{}^t\bar{Z}Z>0\}$ と正則同型である。

3) $M=\{Z\in M_2(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{Z}=Z\}$ とおくと M は $M_{\mathbb{C}}^+$ の境界成分の1つであり、$\overline{M}$ の中の稠密開集合である。また M は Minkowski 空間と同型である。

4) M は $M_{\mathbb{C}}$ 内の実解析的部分多様体で $S^1\times S^3$ と微分同相

5) N は $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ 内の実解析的部分多様体であり $S^2\times S^3$ と微分同想

6) $\beta: \overline{F}^+ \longrightarrow M_{\mathbb{C}}^+$ は自明な $\mathbb{P}_1$ 束と同型。即ち

$$\begin{tikzcd} \overline{F}^+ \arrow[rr, "\sim", "f"'] \arrow[dr, "\beta"'] & & \mathbb{P}_1\times M_{\mathbb{C}}^+ \arrow[dl, "p_2"] \\ & M_{\mathbb{C}} & \end{tikzcd}$$

が可換となる正則同型写像 f が存在する。

証明) $T=\mathbb{C}^4$ 上のエルミット形式 Φ は (3.8) で与えられているとする。座標 (Z^0, Z^1, Z^2, Z^3) によって

$$\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$$

なる行列で表現されていることになる。ここでこの行列のかわりに，行列

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} I_2 \\ -\sqrt{-1} I_2 & 0 \end{pmatrix}$$

で表現されるエルミット形式 Φ_1 を考えると，T の1次変換によって Φ は Φ_1 に移る。従って Φ_1 で考えてもよい。この時

$$M_2(\mathbb{C}) \ni Z = \begin{pmatrix} z^{11} & z^{12} \\ z^{21} & z^{22} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} Z \\ I_2 \end{pmatrix}$$ の列ベクトルで張られる T の2次元部分空間 $A(z)$

によって $A: M_2(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{\mathbb{C}}$ なる写像が作られ，これは $M_{\mathbb{C}}$ の1つのアファイン座標を与えている。この時 $\Phi_1|_{A(z)} > 0$ なる条件は

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z - {}^t\bar{Z}) > 0$$

なる条件と同値であることはすぐ分かる。

また $\frac{1}{2\sqrt{-1}}(Z - {}^t\bar{Z}) = 0$ が $I_{2,2}$ 型の対称領域の境界成分であることも容易に分かる。4)は§1で示しており，5)も容易。6)は $M_{\mathbb{C}}^+$ の定義と2)より直ちに出る。1)は定義より明らか。 □

さて上の証明中に使った写像Aを使って、$M_{\mathbb{C}}^{A} = A(M_2(\mathbb{C}))$ と置こう。$M_{\mathbb{C}}^{A}$ は $M_{\mathbb{C}}$ のアフィン開集合であり $M_{\mathbb{C}}^{+}$, M を含んでいる。またエルミット形式として上の Φ_1 を使う。

$$G = \{\, g \in SL(T) \mid \Phi_1(gu, gv) = \Phi_1(u,v),\ {}^{\forall}u, v \in T \,\}$$

とおくと G は $SU(2,2)$ と同型である。以下 G を $SU(2,2)$ と同一視する。$g \in SU(2,2)$ は

$$g = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 2 \\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} A\,{}^t\bar{B} = B\,{}^t\bar{A}, \quad C\,{}^t\bar{D} = D\,{}^t\bar{C} \\ A\,{}^t\bar{D} - B\,{}^t\bar{C} = I_2 \end{array}$$

と書ける。また

$$g\begin{bmatrix} Z \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} AZ+B \\ CZ+D \end{pmatrix}$$

となり、$\det(CZ+D) \neq 0$ である $Z \in M_2(\mathbb{C})$ に対して

(4.1) $\qquad Z \longmapsto (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$

なる変換を引き起す。特に

$$G \supset \hat{P} = \left\{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & {}^t\bar{A}^{-1} \end{pmatrix}\right\}$$

なる部分群を考えると、$\hat{P}$ は $M_{\mathbb{C}}^{A}$ の解析的自己同型を引き起す。$M_{\mathbb{C}}^{A}$ のアフィン座標では、

(4.2) $\qquad Z \longmapsto AZ\,{}^t\bar{A} + B$

と書くことができる。特にこの変換を M に制限し、B も ${}^t\bar{B} = B$ なる条件をつけると、これ

は M から S M への自己同型を引き起す。

$$M \ni Z \longrightarrow AZ{}^t\bar{A} \in M, \quad A \in SL(2, \mathbb{C})$$

は §3 の冒頭で述べたように，狭義ローレンツ変換に他ならず，変換(4.2)は $A \in SL(2, \mathbb{C})$, ${}^t\bar{B} = B$ の時，狭義ポアンカレ変換に他ならない。従って

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & {}^t\bar{A} \end{pmatrix} \middle| A \in SL(2, \mathbb{C}) \quad B = {}^t\bar{B} \right\} \subset \tilde{P}$$

は狭義ポアンカレ群の被覆群である。$M_{\mathbb{C}}^+$ の定義から明らかなように P は $M_{\mathbb{C}}^+$ 上にも解析的自己同型群として作用している。

続いて M の等角変換群を考察しよう。この群はポアンカレ群及び変換

$$(4.3) \quad \begin{cases} x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \longrightarrow (\rho x^0, \rho x^1, \rho x^2, \rho x^3), \ \rho \in \mathbb{R} \\ x \longrightarrow -\dfrac{x}{\|x\|^2} \end{cases}$$

より生成されている。但しここで §3 で使った M の座標 (x^0, x^1, x^2, x^3) を使用し，$\|x\|^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$ とする。(4.3) の第二の変換は零錐の部分では定義されていない。$a^2 = \rho$ とすると (4.3) の第一の変換に対応するのは

$$\begin{pmatrix} aI_2 & 0 \\ 0 & a^{-1}I_2 \end{pmatrix}$$

であり，$\tilde{P}/P$ はこの変換の複素化になっている。また(4.3)の第二の変換の一般化は

$$Z \longrightarrow -BZ^{-1}{}^{t}\bar{B}, \quad B \in GL(2,\mathbb{C})$$

となり，行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ (-{}^{t}\bar{B})^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

となる。即ち $G = SU(2,2)$ は狭義等角変換群の被覆群の複素化になっている。$M_{\mathbb{C}}^{A}$ の"正則距離"を $\det(dZ)$ と定義すると，これを M に制限したものは M のローレンツ距離となる。G は正則距離 $\det(dZ)$ に関して $M_{\mathbb{C}}^{A}$ の等角変換群である。またこのことより $\bar{M}$ 上に M の等角変換群が推移的に作用することも容易に示される。

§5 Maxwellの方程式

M を Minkowski 空間，(x^0, x^1, x^2, x^3) を §3でとったMの座標とする。x^1, x^2, x^3 を空間の x, y, z 座標とし，$\vec{E}=(E_1, E_2, E_3)$，$\vec{B}=(B_1, B_2, B_3)$ をこの座標で表現した電場及び磁場とする。歪対称行列 (F_{ij}) を

$$(5.1)\qquad (F_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

と定義し

$$F = F_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$$

とおく。さてローレンツ距離 ds^2 を

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

として $*$－作用素 $*: \overset{p}{\wedge} T^*M \longrightarrow \overset{4-p}{\wedge} T^*M$ を

$$\alpha = \alpha_{i_1 \cdots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

$$(5.2)\qquad (*\alpha)_{j_1, \cdots, j_{4-p}} = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \varepsilon_{i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_{4-p}}\, \alpha^{i_1 \cdots i_p}$$

と定義する。但し

$$\varepsilon_{ijkl} = \mathrm{sign}\begin{pmatrix} i & j & k & l \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\alpha^{i_1, \cdots, i_p} = g^{i_1 k_1} \cdots g^{i_p k_p}\, \alpha_{k_1, \cdots, k_p}$$

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} = (g_{ij})^{-1}.$$

すると $\Lambda^p T^*M$ に対して $*^2=(-1)^{p+1}$ となる。特に2型式に対しては $*^2=-1$。そこで

$$(5.3)\qquad \overset{2}{\Lambda} T^*M \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C} = \overset{2}{\Lambda}_+(M) \oplus \overset{2}{\Lambda}_-(M)$$

と $*$ の固有空間に分解する。ここで $\overset{2}{\Lambda}_+$ は固有値 $\sqrt{-1}$, $\overset{2}{\Lambda}_-$ は固有値 $-\sqrt{-1}$ に対応する固有空間とする。簡単な計算によって次の補題を得る。

<u>補題</u> 1. 1) 真空中、電荷が存在しない時の Maxwell の方程式は

$$dF=0$$
$$d*F=0$$

となる。(電荷がある時は $dF=0$, $d*F=*J$ となる。但し J は4元電流を表す。)

2) (5.3) によって $F=F_+ + F_-$ と直和分解すると、Maxwell の方程式は

$$dF^+=0,\quad dF^-=0$$

と書ける。

この結果をスピノルの言葉を使って表現してみる。(F_{ij}) は2階の共変テンソルであるから、(3.3) によって対応するスピノルを

$$F_{ab} \longleftrightarrow F_{AA'BB'}$$

と書くことにする。 $F_{ab} = -F_{ba}$ より

$$F_{BB'AA'} = -F_{AA'BB'}$$

従って

$$\begin{aligned} F_{AA'BB'} &= \frac{1}{2}(F_{AA'BB'} - F_{BB'AA'}) \\ &= \frac{1}{2}(F_{AA'BB'} - F_{BA'AB'} + F_{BA'AB'} - F_{BB'AA'}) \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{AB} F_{MA'}{}^{M}{}_{B'} + \varepsilon_{A'B'} F_{BM'A}{}^{M'}) \end{aligned}$$

そこで

$$\varphi_{AB} = \frac{1}{2} F_{MA'}{}^{M}{}_{B'}, \quad \psi_{A'B'} = \frac{1}{2} F_{MA'}{}^{M}{}_{B'}$$

とおくと、

(5.3) $F_{AA'BB'} = \varepsilon_{AB}\psi_{A'B'} + \varepsilon_{A'B'}\varphi_{AB}$, $\psi_{A'B'} = \psi_{B'A'}$, $\varphi_{AB} = \varphi_{BA}$

§3の記号を使うと $F_{AA'BB'}$ は $\Lambda^*\otimes\bar{\Lambda}^*\otimes\Lambda^*\otimes\bar{\Lambda}^*$ の切断を与えており、φ_{AB} は $\Lambda^*\otimes\Lambda^*$、$\psi_{A'B'}$ は $\bar{\Lambda}^*\otimes\bar{\Lambda}^*$ の切断を与えている。一方これらの束には $SL(2,\mathbb{C})$ が作用しているが (5.3) は $SL(2,\mathbb{C})$ の既約表現への分解を与えている。

補題2. 1) F が実型式であるための必要十分条件は $\psi_{A'B'} = \overline{\varphi_{AB}}$.

2) F が自己共役、即ち $*F = \sqrt{-1}F$ となるための必要十分条件は $F = \varepsilon_{AB}\psi_{A'B'}$

3) F が自己反共役、即ち $*F = -\sqrt{-1}F$ となるた

めの必要かつ十分条件は　$F = \varepsilon_{A'B'}\varphi_{AB}$.

1)は(3,3)より明らか。2)は単純な長い計算で証明されるので証明は省す。

さてMのスピノル座標 $(x^{AA'})$ を(3,3)を使って

$$\begin{pmatrix} x^{00'} & x^{01'} \\ x^{10'} & x^{11'} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_0 + x_1 & x_2 + \sqrt{-1}\,x_3 \\ x_2 - \sqrt{-1}\,x_3 & x_0 - x_1 \end{pmatrix}$$

と定める。また

$$\nabla_{AA'} = \frac{\partial}{\partial x^{AA'}}, \quad \nabla^{AA'} = \frac{\partial}{\partial x_{AA'}} = \varepsilon^{BA}\varepsilon^{B'A'}\nabla_{BB'}$$

と定義する。

補題3. $dF^+ = 0$ は $\nabla^{AA'}\psi_{A'B'} = 0$ と同値であり、$dF^- = 0$ は $\nabla^{AA'}\varphi_{AB} = 0$ と同値である。

証明)　$F^+ = F^+_{ab}\,dx^a \wedge dx^b$ とすると、補題2より

$$F^+_{ab} = \sigma_a^{AA'}\sigma_b^{BB'}\varepsilon_{AB}\psi_{A'B'}.$$

一方 $dF^+ = 0$ は

$$\frac{\partial F^+_{bc}}{\partial x^a} - \frac{\partial F^+_{ac}}{\partial x^b} + \frac{\partial F^+_{ab}}{\partial x^c} = 0$$

と書ける。従って

$$\sigma_b^{BB'}\sigma_c^{CC'}\varepsilon_{BC}\frac{\partial \psi_{B'C'}}{\partial x^a} - \sigma_a^{AA'}\sigma_c^{CC'}\varepsilon_{AC}\frac{\partial \psi_{A'C'}}{\partial x^b} + \sigma_a^{AA'}\sigma_b^{BB'}\varepsilon_{AB}\frac{\partial \psi_{A'B'}}{\partial x^c} = 0$$

また $x^{AA'} = \sigma_a{}^{AA'} x^a$ より $\frac{\partial}{\partial x^a} = \sigma_a{}^{AA'} \frac{\partial}{\partial x^{AA'}}$ だから，

上式は

$$\sigma_a{}^{AA'} \sigma_b{}^{BB'} \sigma_c{}^{CC'} (\varepsilon_{BC} \nabla_{AA'} \psi_{B'C'} - \varepsilon_{AC} \nabla_{BB'} \psi_{A'C'} + \varepsilon_{AB} \nabla_{CC'} \psi_{A'B'}) = 0$$

となり，これより

$$\varepsilon_{BC} \nabla_{AA'} \psi_{B'C'} - \varepsilon_{AC} \nabla_{BB'} \psi_{A'C'} + \varepsilon_{AB} \nabla_{CC'} \psi_{A'B'} = 0$$

となる。A, B, C は 0, 1 いずれかの値しかとらない。そこで $A = B$, $A \neq C$ と仮定しても一般性を失わない。従って $\varepsilon_{AC} = \pm 1$ より

$$\nabla_{AA'} \psi_{B'C'} - \nabla_{AB'} \psi_{A'C'} = 0.$$

この両辺に $\varepsilon^{CA} \varepsilon^{A'B'}$ をかけて A, A', B' に関して和をとると

$$\nabla^{CB'} \psi_{B'C'} + \nabla^{CA'} \psi_{A'C'} = 2 \nabla^{CB'} \psi_{B'C'} = 0.$$

φ_{AB} に関しても同様。 □

そこで一般に正の半正数 s に対して

$$(5.4) \begin{cases} \nabla^{AA'} \varphi_{AB\cdots D} = 0 & \underbrace{\varphi_{AB\cdots D}}_{2s} \text{ は添数に関して対称} \\ \nabla^{AA'} \psi_{A'B'\cdots D'} = 0 & \underbrace{\psi_{A'B'\cdots D'}}_{2s} \text{ は添数に関して対称} \end{cases}$$

なる方程式を考えることができる。これはスピンが s の静止質量0の粒子の古典的（量子化されていない）方程式と考えられる。$s = 1/2$ の時が中性微子

に対応している。

さて方程式(5,4)は

$$\nabla^{AA'} = \varepsilon^{AB}\varepsilon^{A'B'}\frac{\partial}{\partial z^{BB'}}$$

と考えることによって $M_{\mathbb{C}}^{A}$，従って特に $M_{\mathbb{C}}^{+}$ 上の方程式と考えることができる。$M_{\mathbb{C}}^{+}$ 上では現実的な意味を方程式の解は持っていないが，解の M への何らかの意味での境界値は(5,4)の M 上の解と考えられる。方程式

$$(5,5) \qquad \nabla^{AA'}\psi_{A'B'\cdots D'} = 0$$

を $M_{\mathbb{C}}^{+}$ 上で考えると解を具体的に構成できることを以下に示す。即ち H を $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ 上の超平面切断束とする時，$H^1(\mathbb{P}_3^+, H^{-2s-2})$ の元よりこの方程式の解を構成できることを示そう。

そこで twistor 空間 $T = \mathbb{C}^4$，及び座標 (Z^0, Z^1, Z^2, Z^3)，2次形式

$$\Phi(Z,Z) = Z^0\bar{Z}^2 + Z^1\bar{Z}^3 + Z^2\bar{Z}^0 + Z^3\bar{Z}^1$$

を考える。§3の考察より

$$(\lambda^A) = (\lambda^0, \lambda^1) = (Z^0, Z^1), \quad (\mu_{A'}) = (\mu_{0'}, \mu_{1'}) = (Z^2, Z^3)$$

なる記法を使うことにする。

$$\pi : T - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$$

を自然な写像とする時，$\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$の開集合Uに対して　$\hat{U}=\pi^{-1}(U)$と書くことにする。また以下

$$Y = Z^\alpha \frac{\partial}{\partial Z^\alpha}$$

と記号を固定する。$\mathcal{E}^p(W)$はW上のp次微分型式（$\mathbb{C}$に値をとるとする）全体とする。

補題4　π^*によって　$\mathcal{E}^p(U)$　は

$$\{ f\in \mathcal{E}^p(\hat{U}) \mid Y\lrcorner f = 0 \quad \bar{Y}\lrcorner f=0, \ Y\lrcorner df=0, \ \bar{Y}\lrcorner df=0\}$$

と同型である。ここで　$\lrcorner$は内部積を表す。

複素多様体W，W上の複素直線束Lに対して　$\Omega^p(W) = H^0(W, \Omega^p_W)$，$\Omega^p(W, L) = H^0(W, \Omega^p_W\otimes L)$

と定義する。すると上の補題と同様にして

$$\pi^* : \Omega^1(U) \cong \{ f\in\Omega^1(\hat{U}) \mid Y\lrcorner f = 0, \ Y\lrcorner \partial f = 0 \}$$

$$\pi^* : \Omega^p(U, H^m) \cong \{ f\in\Omega^p(\hat{U}) \mid Y\lrcorner f = 0, \ Y\lrcorner \partial f = mf \}$$

が分かる。この同型によってこの両者を同一視する。さて

$$\theta = Z^3dZ^4 - Z^4dZ^3$$

とおくと，

$$Y\lrcorner\theta = 0, \qquad Y\lrcorner\partial\theta = 2\theta$$

となり，$\theta \in \Omega^1(\mathbb{P}_3, H)$と考えることができる。

$H^1(\mathbb{P}_3^+, H^{-n-2})$，$n=2s$を Dolbeault コホモロジー

$H^{0,1}_{\bar\partial}(\mathbb{P}_3^+, H^{-n-2})$ で表現する。 $f\in H^{0,1}_{\bar\partial}(\mathbb{P}_3^+, H^{-n-2})$ は $T^+=\{z\in\mathbb{C} \mid \Phi(z,z)>0\}$ 上の $(0,1)$ 型の微分型式 f で $\bar\partial f=0$, $\bar{Y}\lrcorner f=0$, $Y\lrcorner\partial f=-(n+2)f$ なるものと対応している。以下 $H^{0,1}_{\bar\partial}(\mathbb{P}_3^+, H^{-n-2})$ は T^+ 上のかかる型式として代表元をとる。

さて右図で $\beta: \mathbb{F}^+\longrightarrow M_{\mathbb{C}}^+$ は固有写像であり、β の各ファイバーは $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ であった。（§4 定理 1, 6)）.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{F}^+ \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ \mathbb{P}_3^+ \arrow[rr, squiggly, "\tau^+"] & & M_{\mathbb{C}}^+ \end{tikzcd}$$

$f\in H^{0,1}_{\bar\partial}(\mathbb{P}_3^+, H^{-n-2})$ に対して、$\tau=\underbrace{\mu_{A'}\mu_{B'}\cdots\mu_{D'}}_{n} f\wedge\theta$ を考えると、τ は $\bar\partial$-閉 $(1,1)$ 型の微分型式となり、

$$Y\lrcorner\tau=0,\quad \bar{Y}\lrcorner\tau=0,\quad Y\lrcorner d\tau=0,\quad \bar{Y}\lrcorner d\tau=0$$

を満足する。従って τ は $\mathbb{P}_3^+$ 上の $(1,1)$ 型の微分型式である。任意の点 $\xi\in M_{\mathbb{C}}^+$ に対して $\tau^{+-1}(\xi)=\alpha\beta^{-1}(\xi)$ は $\mathbb{P}_3^+$ の射影直線である。そこで

$$\varphi_{A'B'\cdots D'}(\xi)=\int_{\tau^{+-1}(\xi)}\mu_{A'}\mu_{B'}\cdots\mu_{D'}\, f\wedge\theta$$

を考えるとこれは $M_{\mathbb{C}}^+$ 上の対称スピノルを定める。すると次の定理が成立する。

<u>定理1</u>. $\varphi_{A'B'\cdots D'}$ は $M_{\mathbb{C}}^{+}$ 上正則であり，$A', B', \cdots, D'$ に関して対称，かつ方程式

$$\nabla^{AA'}\varphi_{A'B'\cdots D'}=0$$

を $M_{\mathbb{C}}^{+}$ 上で満足する。また $\varphi_{A'B'\cdots D'}$ は $H^{0,1}_{\bar\partial}(\mathbb{P}_3^{+}, H^{-(n+2)})$ のコホモロジー類にのみ依存する。

証明). $M_{\mathbb{C}}^{+}\subset M_{\mathbb{C}}^{A}$ であるので，§4 定理1によって $Z^{XX'}$ なる 2×2 行列によって座標が与えられる。$\beta^{-1}(Z^{XX'})$ に対応する $\mathbb{T}$ の2次元部分空間は $\{(\lambda^{X}, \mu_{X'})\in\mathbb{T} \mid \lambda^{X}=\sqrt{-1}\,Z^{XX'}\mu_{X'}\}$ で与えられることが，§4 定理1の証明より分かる。そこで，次の図式を得る。

$$\begin{tikzcd}
(\pi_{A'}, Z^{AA'}) \arrow[d, mapsto] & \in \mathbb{C}^2\times M_{\mathbb{C}}^{+} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0"] & \mathbb{F}^{+}\cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C})\times M_{\mathbb{C}}^{+} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & M_{\mathbb{C}}^{+} \\
(\sqrt{-1}\,Z^{AA'}\pi_{A'}, \pi_{A'}) & \in \mathbb{T}^{+} \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{P}_3^{+} &
\end{tikzcd}$$

$I_{A'B'\cdots D'}=\mu_{A'}\mu_{B'}\cdots\mu_{D'}\,f\wedge\theta$ とおくと

$$\varphi_{A'B'\cdots D'}(Z^{XX'})=\int_{\mathbb{P}^1\times Z^{XX'}}\alpha^{*}I_{A'B'\cdots D'}(\mu_{X'}, Z^{XX'})$$

これが $Z^{XX'}$ に関して正則であることは，以下の議論と同様にできるので略する。

$$\frac{\partial}{\partial z^{AA'}} \varphi_{\underbrace{B' \cdots D'}_{n}}(z^{AA'}) = \int_{\mathbb{P}^1 \times z^{AA'}} \frac{\partial}{\partial z^{AA'}} (\alpha_0^* I_{\underbrace{B' \cdots D'}_{n}})(\mu_{A'}, z^{AA'})$$

$f = f_{M'} d\bar{\lambda}^{M'} + f^{M} d\bar{\mu}_{M}$ と書くと

$$\alpha_0^* I_{B' \cdots D'}(\mu_{A'}, z^{AA'})$$
$$= \mu_{B'} \cdots \mu_{D'} \{ f_{M'} d(\sqrt{-1}\, \bar{z}^{M'M} \bar{\mu}_{M}) + f^{M} d\bar{\mu}_{M} \} \wedge \theta$$

従って

$$\frac{\partial}{\partial z^{AA'}} (\alpha_0^* I_{B' \cdots D'})(\mu_{A'}, z^{AA'})$$
$$= \quad = -\mu_{B'} \cdots \mu_{D'}\, \theta \wedge \left\{ \frac{\partial f_{M'}}{\partial \lambda^{A}} \frac{\partial \lambda^{A}}{\partial z^{AA'}} d\bar{\lambda}^{M'} + \frac{\partial f^{M}}{\partial \lambda^{A}} \frac{\partial \lambda^{A}}{\partial z^{AA'}} d\bar{\mu}_{M} \right\}.$$

かつ $\quad d\bar{\lambda}^{M'} \big|_{\tau^{-1}(z^{AA'})} = -\sqrt{-1}\, \bar{z}^{M'M} d\bar{\mu}_{M}$ であるので

$$\frac{\partial}{\partial z^{AA'}} (\alpha_0^* I_{B' \cdots D'})(\mu_{A'}, z^{AA'}) \Big|_{\tau^{-1}(z^{AA'})}$$
$$= -\sqrt{-1}\, \underbrace{\mu_{A'} \mu_{B'} \cdots \mu_{D'}}_{n+1}\, \theta \wedge \left\{ \frac{\partial f_{M'}}{\partial \lambda^{A}} d\bar{\lambda}^{M'} + \frac{\partial f_{M}}{\partial \lambda^{A}} d\bar{\mu}_{M} \right\} \Big|_{\tau^{-1}(z^{AA'})}$$

この最後の式は $A', B', \cdots, D'$ に関して対称。従って $\frac{\partial}{\partial z^{AA'}} \varphi_{B' \cdots D'}$ は $A', B', \cdots, D'$ に関して対称である。従って，$\varepsilon^{A'B'}$ は歪対称であるので

$$\varepsilon^{A'B'} \frac{\partial}{\partial z^{AA'}} \varphi_{B' \cdots D'} = 0$$

$$\nabla^{BB'} = \varepsilon^{AB}\varepsilon^{A'B'}\frac{\partial}{\partial Z^{AA'}}$$

であるので

$$\nabla^{BB'}\varphi_{B'\cdots D'} = 0.$$

これが求める式であった。

次に $\varphi_{B'\cdots D'}$ がコホモロジー類にのみ依存することを示す。そこで $f = \bar{\partial}h$, $h \in \mathcal{E}^0(\mathbb{P}_3^+, H^{-n-2})$ としよう。すると

$$\int_{\tau^{-1}(p)} \mu_{B'}\cdots\mu_{D'}\, f\wedge\theta = \int_{\mathbb{P}^1}\bar{\partial}(\mu_{B'}\cdots\mu_{D'}\, h\wedge\theta)$$

$$= \int_{\mathbb{P}^1} d(\mu_{B'}\cdots\mu_{D'}\, h\wedge\theta) = 0$$

但しここで $\mathbb{P}^1$ 上で $(2,0)$ 型式は 0 であることを使った。 □

以上によって方程式

$$\nabla^{AA'}\underbrace{\varphi_{A'B'\cdots D'}}_{n} = 0$$

の $M_{\mathbb{C}}^+$ 上の正則解ができた．これらが恒等的には 0 でないことは積分表示より容易にたしかめられる。実は $M_{\mathbb{C}}^+$ 上の正則解はすべて上述の方法によって得られることが示されている。そのためには図式

$$\begin{array}{ccc} & F^+ & \\ \swarrow^{\alpha} & & \searrow^{\beta} \\ \mathbb{P}_3^+ & & M_{\mathbb{C}}^+ \end{array}$$

を使う。$T_\alpha(F^+) \subset TF^+$ を α の各ファイバーに接する接ベクトル全体の作る束とし，$\pi_\alpha : T^*F^+ \longrightarrow T_\alpha^*$ をその双対よりできる自然射とする。d を T^*F^+ の外微分作用素として $d_\alpha = \pi_\alpha \circ d$，即ち α のファイバー方向に沿っての外微分とする。この時

$$d_\alpha : H^{0,1}_{\bar\partial}(F^+, \alpha^* H^{-n-2}) \longrightarrow H^{0,1}_{\bar\partial}(F^+, \alpha^* H^{-n-2} \otimes T_\alpha^*)$$

なる写像ができる。また β は $\mathbb{P}^1$ 束であるので，$V_n = R^1\beta_* \alpha^* H^{-n-2}$，$V_n^\alpha = R^1\beta_*(\alpha^* H^{-n-2} \otimes T_\alpha^*)$ は共に $M_{\mathbb{C}}^+$ 上のベクトル束であり，消滅定理によって

$$H^{0,1}_{\bar\partial}(F^+, \alpha^* H^{-n-2}) \cong H^0(M_{\mathbb{C}}^+, V_n)$$

$$H^{0,1}_{\bar\partial}(F^+, \alpha^* H^{-n-2} \otimes T_\alpha^*) \cong H^0(M_{\mathbb{C}}^+, V_n^\alpha)$$

が成立する。従って

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & H^{0,1}_{\bar\partial}(F^+, \alpha^* H^{-n-2}) \arrow[r, "d_\alpha"] \arrow[d, "\wr\wr"] & H^{0,1}_{\bar\partial}(F^+, \alpha^* H^{-n-2} \otimes T_\alpha^*) \arrow[d, "\wr\wr"] \\ H^{0,1}_{\bar\partial}(\mathbb{P}_3^+, H^{-n-2}) \arrow[ur, "\alpha^*"] \arrow[r] & H^0(M_{\mathbb{C}}^+, V_n) \arrow[r, dashed, "\nabla_\alpha"] & H^0(M_{\mathbb{C}}^+, V_n^\alpha) \end{tikzcd}$$

なる図式ができる。この時次の定理が成立す

る。

<u>定理2</u>. 1) V_n のファイバーは $\mathbb{C}^2$ の n 回対称積 $S^n(\mathbb{C}^2)$ である。

2) V_n^α のファイバーは $S^{n-1}(\mathbb{C}^2)\otimes\mathbb{C}^2$ である。

3) 1) により $V_n \cong S^n(\Lambda^*)$ であるが、この時 ∇_α はスピン $s = n/2$ の静止質量0の粒子に対する微分作用素 (5、5) である

4) $\mathrm{Ker}\, d_\alpha = \mathrm{Im}\, \alpha^*$.

1) 2) 3) の証明は単なる計算である。4) については論文 [4] を参照されたい。

文献

[1] W. Kopczyński & L. S. Woronowicz, Rep. Math. Physics 2, 35 − 51, (1971)

[2] R. Penrose, Twistor algebra, J. Math. Physics 8, 345 − 366 (1967)

[3] ———. Non linear gravitons and curved twistor theory, General Relativity and Gravitation 7, 31−51 (1976)

[4] R. O. Wells, Jr. Complex manifolds and mathematical Physics. Bull. A. M. S に近刊予定,