代数幾何学シンポジウム記録
1991年度　pp.171-183

曲線とGrassmann多様体

名大理　向井茂

一種数 8 の一般の曲線は丁度14通りの方法で射影直線 $\mathbb{P}^1$ の 6 重被覆として表される。(例えば [GH] 第2章§5) 一方、5次元射影空間 $\mathbb{P}^5$ 内の直線全体のなす (8次元) Grassmann多様体の次数も 14 である。この数の一致は曲線と Grassmann多様体の深い関係のひとつの身近な現われである。ここでは、これに関して次の2つのことについて述べる。

(0.1)　曲線上の線型1次束の個数

(0.2)　種数 8 の曲線の分類

上の 8次元 Grassmann多様体は 1つ固定された 6次元ベクトル空間 $k^{\oplus 6}$ の 2次元部分空間の全体なので $G(2,6)$ で表わす。これは Plücker座標でもって射影多様体 $G(2,6) \subset \mathbb{P}^{14}$ になる。これを 7回超平面切断する、即ち、横断的な 7次元線型部分空間 $\mathbb{P}^7$ で切ることによって曲線

$$(0.3) \qquad [C \subset \mathbb{P}^7] = [G(2,6) \subset \mathbb{P}^{14}] \cap H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_7$$

が得られる。 $G(2,6)$ の標準因子類 K_G は超平面切断類 H の (-6)倍なので adjunction により

$$K_C = (K_G + H_1 + H_2 + \cdots + H_7)|_C = H|_C$$

が成立する。 両辺の次数をとることにより

$$2g(C) - 2 = \deg[G(2,6) \subset \mathbb{P}^{14}] = 14,$$

即ち、C は種数 8 であることがわかる。

$\boxed{\text{問題}}$ (0.4) 種数 8 の曲線はいつ Grassmann 多様体の線型切断 $G(2,6) \cap \mathbb{P}^7$ と同型か？

この問題に完全な解答を与え、それを使って種数 8 の曲線（の標準環）を分類するのが (0.2) である。(資料 2)

$G(2,6)$ と横断的な 7次元線型部分空間全体は Grassmann 多様体 $G(\mathbb{P}^7 \subset \mathbb{P}^{14})$ の開集合 Ξ でパラメトライズされる。PGL_6 の $G(2,6) \subset \mathbb{P}^{14}$ への作用で移り合う $\mathbb{P}^7 \subset \mathbb{P}^{14}$ は同型な曲線を切り出すから、対応

$$[\mathbb{P}^7] \bmod PGL_6 \longmapsto [\mathbb{P}^7 \cap G(2,6)]$$

により、分類射

$$(0.5) \qquad \gamma : \Xi / PGL_6 \longrightarrow \mathfrak{M}_8$$

を得る。始点の次元は

$$(0.6) \quad \dim G(\mathbb{P}^7 \subset \mathbb{P}^{14}) - \dim PGL_6 = 7\cdot 8 - 5\cdot 7 = 21$$

で、これは種数8の曲線のモジュライ空間 $\mathfrak{M}_8$ の次元に等しい。[M1] において γ は generically finite であることを示した。即ち、一般の種数8の曲線は $G(2,6)\cap\mathbb{P}^7$ と表わすことができ、しかも、その表わし方は有限通りである。より精密に次が成立する。

$\boxed{\text{主定理}}$ (0.7) 種数8の曲線 C に対して次の2条件は同値である。

(1) C は8次元 Grassmann 多様体の線型切断 $G(2,6)\cap\mathbb{P}^7$ に同型である。

(2) C 上には g^2_7（次数7で $h^0 \geqq 3$ なる直線束）は存在しない。

また、これらの同値な条件の下で C を $G(2,6)\cap\mathbb{P}^7$ と表わす方法は PGL_6 の作用を除いて一意的である。

$\boxed{\text{注意}}$ (0.8) (1) 上の条件(2)は C の Jacobi 多様体のテータ因子 $\Theta \subset \mathrm{Pic}^7 C$ が3重点をもたないことと同値である。

(2) 8次元 Grassmann 多様体の替りに 10次元スピノル多様体

$X_{12}^{10} \subset \mathbb{P}^{15}$ と 6次元シンプレクティック Grassmann 多様体 $X_{16}^{6} \subset \mathbb{P}^{13}$ の線型切断をとることにより種数 7, 9 の一般の曲線が得られ，(0.7) と同様の定理が成立する。(資料 1)

曲線 C 上の多重微分全体のなす環

$$R_C = \bigoplus_{n \geqq 0} H^0(\omega_C^n)$$

は 2次元次数付 Gorenstein 環で，C の標準環と呼ばれる。Noether の定理（[GH]第2章§3）より，C が超楕円的でないならば，その標準環は C の標準モデル $[C_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g-1}] = \mathrm{Im}\, \Phi_{|K|}$ の斉次座標環と同型である。$G(2,6)$ の $\mathbb{P}^7$ は種数 8 の曲線の標準モデルなので次を得る。

$\boxed{系}$ (0.9) 種数 8 の曲線 C は g_7^2 をもたないとする。このとき，標準環 R_C は

$$k[x_1, \cdots, x_8] \big/ (\mathrm{Pfaff}\, A^{(ij)} : 1 \leqq i < j \leqq 6)$$

と同型である。ただし，A は $x_1, \cdots, x_8$ の斉次1次式を成分とする歪対称行列で，$A^{(ij)}$ は i, j 行と i, j 列を取り去って得られる小行列である。

（よって，R_C の syzygy は Grassmann のそれ（[J P]）と同じである。）

$\boxed{\text{注意}}$ (0.10)　g^2_7 をもつ種数 8 の曲線の標準環も具体的に書きあらわせる。(資料 2)

(0.1) と (0.2) に共通する考え方は次の通りである。種数 8 の曲線 C が (0.3) で与えられているとする。$\mathbb{P}^{14}$ の双対射影空間を $\check{\mathbb{P}}^{14}$ であらわし、C を切り出す超平面 $H_1, \cdots, H_7$ の座標を $h_1, \cdots, h_7 \in \check{\mathbb{P}}^{14}$ とする。これらで張られる 6 次元線型部分空間 $\Psi_C = \langle h_1, \cdots, h_7 \rangle$ は C を含む超平面(の座標)全体の集合である。さて、双対空間 $\check{\mathbb{P}}^{14}$ の中には 6 次元ベクトル空間 $k^{\oplus 6}$ の 2 次元商空間全体のなす Grassmann 多様体 $G(6,2)$ が Plücker 座標で入っている。W を $k^{\oplus 6}$ の 4 次元部分空間とするとき、点 $p = [k^{\oplus 6}/W] \in G(6,2) \subset \check{\mathbb{P}}^{14}$ に対応する超平面 $H_p \subset \mathbb{P}^{14}$ は Grassmann 多様体 $G(2,6)$ から Schubert 部分多様体

$$S_W = \{ [U] \in G(2,6) \mid U \text{は} k^{\oplus 6} \text{の2次元部分空間}, U \cap W \neq 0 \}$$

を切り出す。これの特異点集合は 4 次元 Grassmann 多様体

$$G(2,W) = \{ [U] \in G(2,6) \mid U \subset W \}$$

と一致し、点 $[U]$ に $[U \cap W]$ を対応させることにより射

$$\pi_W : S_W \backslash G(2,W) \longrightarrow \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}^1$$

が得られる。特に、$p \in G(6,2) \cap P_C$ ならば、S_W は C を含む。$G(6,2) \cap H_1 \cap \cdots \cap H_7$ が非特異完全交叉であることにより C と $G(2,W)$ は交わらない。よって、π_W を制限することにより $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$（$C$ 上の線型1次束と言っても同じ）が得られる。これは次数 5 であることがわかるので、写像

(0.11) $$G(6,2) \cap P_C \longrightarrow \left(\begin{array}{c} C \text{ を } \mathbb{P}^1 \text{ の5重被覆} \\ \text{として表わす方法の全体} \end{array}\right)$$

が得られる。これより、冒頭で述べた数の一致が偶然でないことがわかる。

$\boxed{\text{定理}}$ (0.12) C は種数が偶数 $g=2n$ の一般な曲線とする。このとき、C 上の次数 $n+1$ の線型1次束 g^1_{n+1} の同型類の集合 W^1_{n+1} は自然な方法でもって g 次元 Grassmann 多様体 $G(n+2,2) \subset \mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}$ の 0次元横断的線型切断と同型である。特に、g^1_{n+1} の個数は $G(n+2,2)$ の次数に等しい。

$\boxed{\text{注意}}$ (0.13) (1) 一致する2つの数は第 n 番目の Catalan 数 $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ に等しい。

(2) 定理は C が g 個の結節点をもつ有理曲線の時、

Castelnuovo [C] において示された。

(3) 一般の線型束 g^r_d に対しても Brill-Noether 数が零なる同様の結果が成立する。(参照 [AGGH] 第5,7章)

主定理(0.7)の証明の基本はベクトル束(に付随する一般線型系)を使って曲線を Grassmann 多様体に埋込むことである。曲線 C 上の階数 2 のベクトル束 E が大域切断で生成される、即ち、自然な準同型写像

$$H^0(E) \otimes_k \mathcal{O}_C \longrightarrow E$$

が全射であるとする。C の各点 p に対し E のファイバー E_p は $H^0(E)$ の商空間であるから射

$$\Phi_{|E|} : C \longrightarrow G(H^0(E), 2)$$

が得られる。$h^0(E)=6$ なるベクトル束 E を上手に選べばこれが埋込みになり、その像が線型切断になることを示して(0.7)が示される。埋込み、線型切断の部分では(0.11)の周辺の考え方が鍵になる。線型切断を与える E の選び方は安定性を使って述べやすい。

$\boxed{\text{定理}}$ (0.14) C は種数 g の曲線で g^1_7 をもたないとする。

(1) 標準直線束を行列式とする(即ち, $\overset{2}{\wedge} E \cong \omega_C$ する)階数2の安定ベクトル束 E の全体にわたる $h^0(E)$ の最大値は6である。

(2) (1)において最大値を与えるベクトル束 E_{max} は同型を除いて唯1つしか存在しない。また, それは $H^0(E_{max})$ で生成される。

$\boxed{\text{注意}}$ (0.15) $\theta^2 \cong \omega_C$ する直線束 θ を1つとってくる。$\overset{2}{\wedge} E \cong \omega_C$ する安定ベクトル束 E に対し, $E \otimes \theta^{-1}$ は C の基本群 Γ の表現 $\rho : \Gamma \longrightarrow SU(2)$ より得られる。([NS]) C は上半平面を Γ で割ったものだから, 大域切断の空間 $H^0(E)$ は ρ を係数とする重さ1の保型形式全体の空間と同一視できる。

定理のベクトル束 E_{max} に対して線型写像

$$\lambda : \overset{2}{\wedge} H^0(E_{max}) \longrightarrow H^0(\overset{2}{\wedge} E_{max}) \cong H^0(\omega_C)$$

は全射になり, 次の可換図式を得る。

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Phi_{|E_{max}|}"] \arrow[d, "\text{canonical}"'] & G(H^0(E_{max}), 2) \arrow[d, phantom, "\cap\ \text{Plücker}"] \\ \mathbb{P}^*(H^0(\omega_C)) \arrow[r, "\mathbb{P}^*(\lambda)"'] & \mathbb{P}^*(\overset{2}{\wedge} H^0(E_{max})) \end{tikzcd}$$

これが cartesian であることが主定理に他ならない。

$\boxed{\text{注意}}$ (0.16) C が g^2_7 をもっている場合でも，g^1_4 をもたないなら，$h^0(E)=6$ なる半安定ベクトル束 E が存在する。このときも，射写像は C を 8次元 Grassmann 多様体に埋込むが，像は線型切断にならない。

主定理および種数 $g\le 12$ におけるその類似は3次元 Fano 多様体のベクトル束的研究（[M2], [M3]）より生まれてきたもので新分類をより強力でみやすくする。（資料3。Picard 数1の3次元 Fano 多様体の分類と比較してみよ。）このことについて述べるのは別の機会にゆずる。序文だけになったが時間の都合でここで筆をおくことにする。

（1991年11月25日）

資料1　種数 7, 8, 9 の曲線

10次元スピノル多様体 $X^{10}_{12} \subset \mathbb{P}^{15}$ （[M5]）および，6次元シンプレクティック Grassmann 多様体 $X^6_{16} \subset \mathbb{P}^{13}$ は各々種数 7，9 の標準曲線を線型切断にもつ。（後者は3次 Siegel 上半空間のコンパクト双対）

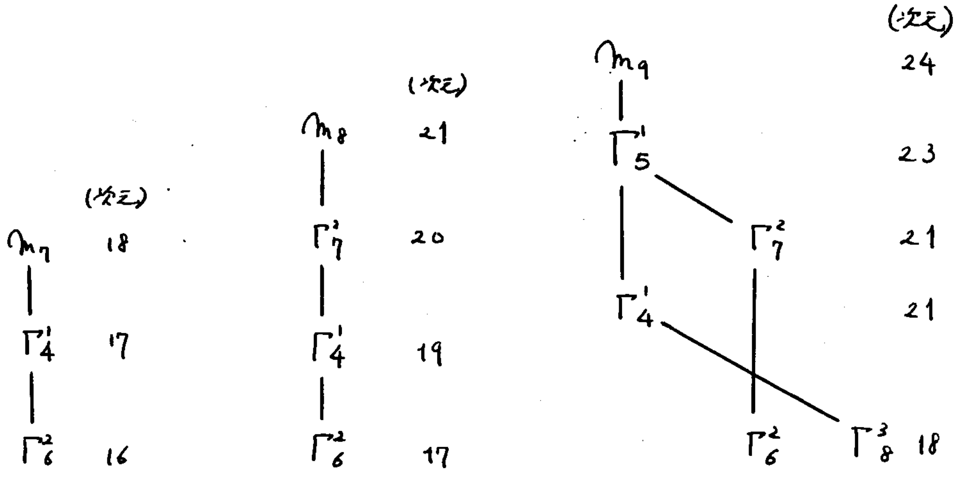
$\boxed{\text{定理}}$ 種数 7（9）の曲線 C に対して次の 2 条件は同値である。

(1) C は $X_{12}^{10} \subset \mathbb{P}^{15}$（$X_{16}^{6} \subset \mathbb{P}^{13}$）の線型切断に同型である。

(2) C は g_4^1（g_5^1）をもたない。

また、これらの同値な条件の下で C を切り出す線型部分空間は SO(10)（Sp(3)）の作用を除いて一意的である。

種数 g の曲線のモジュライ空間を $\mathcal{M}_g$，g_d^r をもつ曲線全体のなす部分集合を Γ_d^r で表わす。$\mathcal{M}_7$，$\mathcal{M}_8$，$\mathcal{M}_9$ は次の様に stratify される。



最大次元 strata は線型切断定理より右の様に軌道空間として表される。

$$\mathcal{M}_7 \setminus \Gamma_4^1 \cong G(7, V^{16}) / Spin(10)$$

$$\mathcal{M}_8 \setminus \Gamma_7^2 \cong G(8, V^{15}) / SL(6)$$

$$\mathcal{M}_9 \setminus \Gamma_5^1 \cong G(9, V^{14}) / Sp(3)$$

資料2　種数8の曲線の分類

<table>
<tr><th></th><th>g^1_3の個数</th><th>g^2_6の個数</th><th>g^1_4の個数</th><th>g^2_7の個数</th><th colspan="2">標準モデル</th><th>平面曲線表示</th></tr>
<tr><td rowspan="3">非4角的</td><td rowspan="6">0</td><td rowspan="4">0</td><td rowspan="3">0</td><td>0</td><td colspan="2">8次元Grassmann多様体 $G(2,6)\subset\mathbb{P}^{14}$ の線型切断</td><td>8次曲線(14通り)</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">4次元加重射影空間 $\mathbb{P}(1:1:1:2:2)$ の中で右の型の歪対称行列の5個の小Pfaffianの共通零点集合.([i]はi次斉次式をあらわす。) $\begin{pmatrix} 0 & [1] & [1] & [2] & [2] \\ & 0 & [1] & [2] & [2] \\ & & 0 & [2] & [2] \\ & & & 0 & [3] \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$</td><td rowspan="2">3重点のない7次曲線</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">$(1,1)\cap(1,2)\cap(2,1)\subset\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4角的</td><td>1</td><td>8</td><td colspan="2">$(1,1)\cap(1,1)\cap(0,2)\cap(1,2)\subset\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^4$</td><td>3重点をもつ7次曲線</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1または2</td><td rowspan="4">∞</td><td rowspan="2">7次曲面 $S_7\subset\mathbb{P}^7$ の2次超曲面切断</td><td>S_7は$\mathbb{P}^2$の2点blow upの反標準モデル</td><td>3重点をもたない6次曲線</td></tr>
<tr><td>∞</td><td rowspan="3">∞</td><td>S_7は楕円曲線 $E_7\subset\mathbb{P}^6$ の錐</td><td></td></tr>
<tr><td>3角的</td><td>1</td><td>1</td><td colspan="2">$(3,5)\subset\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ または $(3\Delta+8f)\subset\mathbb{F}_2$</td><td>4重点をもつ7次曲線</td></tr>
<tr><td>超楕円的</td><td>∞</td><td>∞</td><td colspan="2">$\mathbb{P}(1:1:9)$ 内の18次曲線</td><td></td></tr>
</table>

資料 3　Petri一般な曲線の分類

定義. 種数 g の曲線は C の上の全ての直線束 ξ に対して $h^0(\xi)h^1(\xi) \leq g$ が成立するとき（数値的に）Petri一般であると言う。

(I) 種数 $g \leq 9$ の Petri一般な曲線

g	標準モデル　$C_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g-1}$
2	$C \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1$　6点で分岐
3	$C_4 \subset \mathbb{P}^2$　平面4次曲線
4	$C_6 = (2) \cap (3) \subset \mathbb{P}^3$
5	$C_8 = (2) \cap (2) \cap (2) \subset \mathbb{P}^4$
6	$C_{10} = G(2,5) \cap Q^3$　または bielliptic
7	C_{12} は 10次元スピノル多様体 $X^{10}_{12} \subset \mathbb{P}^{15}$ の線型切断
8	C_{14} は 8次元 Grassmann多様体 $X^{8}_{14} \subset \mathbb{P}^{14}$　〃
9	C_{16} は 6次元 symplectic Grassmannian $X^{6}_{16} \subset \mathbb{P}^{13}$　〃

(II) 種数 $g \geq 10$ の時の一般(generic)な曲線の良い表示は知られていない。$g=10, 12$ の時, 曲線 C が K3 曲面にのっていて Petri一般なら次の具体的かつ一意的な表示をもつ。

$g=10$	C_{18} は G_2-多様体 $X^{5}_{18} \subset \mathbb{P}^{13}$ ([MI]) の線型切断
$g=12$	C_{22} は 非退化な net of bivectors $N^3 \subset \wedge^2 V^7$ に付随した非特異3次元 Fano多様体 $G(V,3,N) \subset \mathbb{P}^{13}$ の線型切断

参考文献

[ACGH] Arbarello, E., M. Cornalba, P. Griffiths and J. Harris: Geometry of Algebraic Curves, Vol I, Springer-Verlag, 1985.

[C] Castelnuovo, G.: Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genre, Rend. R. Accad. Lincei, ser. 4, vol. 5-1 (1889), 130-133.

[GH] Griffiths, P. and J. Harris: Principle of Algebraic Geometry, John Wiley & Sons, 1978.

[JP] Józefiak, T. and P. Pragacz: Ideals generated by Pfaffians, J. Algebra 61(1979), 189-198.

[M1] Mukai, S.: Curves, K3 surfaces and Fano manifolds of genus $\leqslant 10$, Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honor of M. Nagata, Kinokuniya, 1988, pp. 357-377.

[M2] —— : Biregular classification of Fano threefolds and Fano manifolds of coindex 3, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 86(1989), 3000-3002.

[M3] —— : Fano 3-folds, to appear in Proc. Trieste Conf. "Projective Geometry".

[M4] —— : Curves and symmetric spaces, preprint, 1991.

[M5] —— : Curves of genus seven and spinor varieties, preprint, 1991.

[NS] Narasimhan, M.S. and C.S. Seshadri: Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface, Ann. of Math. 82(1965) 540-567.