半安定束のフロベニウス逆像とその応用

京大 理　森脇 淳 (Atsushi Moriwaki)

§0, 序.

X を非特異代数多様体、E を X 上のベクトル束, H を X 上の ample な直線束とします。E が H について μ-semi-stable であるとは、任意の sub-sheaf $0 \neq F \subseteq E$ に対して

$$\frac{(c_1(F) \cdot H^{\dim X - 1})}{\operatorname{rank} F} \leqq \frac{(c_1(E) \cdot H^{\dim X - 1})}{\operatorname{rank} E}$$

が成立することをいいます。

$f : Y \to X$ を finite morphism とします。このとき, f が separable, つまり, 体の拡大 $k(Y)/k(X)$ が separable の時, f^*E は, f^*H について μ-semi-stable となることが, maximal destabilizing sheaf の一意性より導くことができます。f が separable でない時, 特に f が purely inseparable な時, f^*E は, f^*H について、μ-semi-stable とは, ならない時があります。この現象は、標数正の代数幾何学を難しくして

いる一つの原因です。まず最初に2つ例を上げてみます。

例 (0.1) (Raynaud)

正標数の場合は、ある適当な代数曲面 S とその上の ample な直線束 L をとると $H^1(S, L^{-1}) \neq 0$ となる例があります。$H^1(S, L^{-1}) \neq 0$ であるので

$$0 \to \mathcal{O}_S \to E \to L \to 0$$

によって定まる自明でない extension が存在します。ここで、E が L について μ-stable となることを見てみましょう。これをいうためには、任意の $0 \neq F \subsetneq E$, $\mathrm{rank}\, F = 1$ に対して、$(F \cdot L) \leqq 0$ であることをいえば十分である。明らかに F は E の中で saturated していると仮定してよい。さて $F \to E \to L$ の合成写像を考える。これが零のとき F は $\mathcal{O}_S$ の sub-sheaf となるので明らかに $(F \cdot L) \leqq 0$. よって ある effective な因子 D が存在して $L \otimes \mathcal{O}(-D) \simeq F$ と書けると仮定してよい。さて F は E の中で saturated しているので $c_2(E \otimes F^{-1}) \geqq 0$ である。よって

$$(D^2) \geqq (L \cdot D) \geqq 0 \quad \text{-----} \quad (0.1.1)$$

となる。ここで $(D^2) = 0$ と仮定すると $(L \cdot D) = 0$ となり、D は effective であるので $D = 0$ となって $F \simeq L$ となるので

$0 \to \mathcal{O}_S \to E \to L \to 0$ は split してしまう。ゆえに $(D^2) > 0$ であることがわかる。Hodge Index theorem を用いると

$$\sqrt{(D^2)}\sqrt{(L^2)} \leqq (L \cdot D) \quad \cdots\cdots \quad (0.1.2)$$

である。よって

$$\sqrt{(D^2)}\sqrt{(L^2)} \leqq (D \cdot L) \leqq (D^2)$$

であるので両辺を $\sqrt{(D^2)}$ で割って

$$\sqrt{(L^2)} \leqq \sqrt{(D^2)} \quad \cdots\cdots \quad (0.1.3)$$

を得る。したがって

$$\begin{aligned} (F \cdot L) &= (L^2) - (L \cdot D) \\ &\leqq (L^2) - \sqrt{(D^2)}\sqrt{(L^2)} \quad (\because \ (0.1.2)) \\ &= \sqrt{(L^2)}\left(\sqrt{(L^2)} - \sqrt{(D^2)}\right) \\ &\leqq 0 \quad (\because \ (0.1.3)) \end{aligned}$$

となる。

さて、L は ample であるので、十分大きな n について

$$H^1(S, L^{-p^n}) = 0$$

である。(実際の Raynaud の例では $H^1(S, L^{-p}) = 0$)

よって、完全列

$$0 \to \mathcal{O}_S \to E^{(n)} \to L^{-p^n} \to 0$$

は split するので $E^{(n)}$ は semi-stable でない。
(ここで $E^{(n)}$ は E の n 回 Frobenius pull back をしたもの)

Eのチャーンクラスを計算すると

$$c_1(E) = L, \quad c_2(E) = 0$$

であるので、このEは、stableだけれども不等式

$$c_1^2(E) \leqq 4c_2(E)$$

を満たさない例ともなっている。

例(0.2) (Giesecker)

$g \geqq 2$ となる整数とするとき、任意の素数 p に対して標数 p の代数閉体上定義された genus が g の曲線 C とその上の階数が2で、degree が0となるベクトル束の列 $\{E_n\}$ があって次を満たしているものが存在する。

① $F^*(E_n) \simeq E_{n-1}$ (F^* はフロベニウム逆像)

② $F^*(E_1)$ は、semi-stable でない。

この例は、半安定なベクトル束のフロベニウス逆像が、半安定とはならないないという例のみならず、nef な直線束のファミリーの openness が成りたたない例を構成する出発点となります。

§1. 階数2の半安定束のフロベニウム逆像

X を d 次元の非特異射影多様体, H を X 上の ample な直線束, α を実数とします。X 上のベクトル束 E が type α (H について) であるとは、

$$\frac{(c_1(F)\cdot H^{d-1})}{\operatorname{rank} F} \le \frac{(c_1(E)\cdot H^{d-1})}{\operatorname{rank} E} + \alpha$$

が任意の E の sub-sheaf F について成立するときにいいます。ここで $p = \operatorname{char}(k) > 0$ とします。さらに $\operatorname{rank} E = 2$ とします。$f : P = \mathbb{P}(E) \to X$ を射影束とし、$Y \subset P$ を $f|_Y : Y \to X$ が purely inseparable となる P の部分多様体とします。$\deg(f|_Y) = p^n$ とおきます。$E' = (F^n)^*(E)$ (n回のフロベニウム逆像) とおき, $f' : P' = \mathbb{P}(E') \to X$ を考えます。

$$\begin{array}{ccc} Y \subset P & \xleftarrow{\ g\ } & P' \supset Y' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ X & \xleftarrow[F^n]{} & X \end{array}$$

このとき $g^*(Y) = p^n Y'$ となる P' 上の部分多様体 Y' があります。Y' が f' の quasi-section であるので Y' に対応する exact sequence を

$$0 \to L \to E' \to M \to 0$$

とします。このとき次の公式が得ます。

$$f_*(K_{\mathbb{P}}+Y\cdot Y)= p^n(p^n-1)c_1(E)+p^nK_X-2(p^n-1)L$$

この公式を利用すると次の命題を得ます。

命題(1.1)

Xをd次元非特異射影多様体，EをX上の階数2のベクトル束，HをX上のnef直線束とします。lを正整数，αを実数で$2(p^l-1)\alpha \geq (K_X\cdot H^{d-1})$を満たすものとします。ここで$X$がuniruledでなく，$E$の$l$回のフロベニウス逆像$E^{(l)}$が$H$についてtype αp^lであると仮定します。
このとき任意の$n \geq 0$について，n回のフロベニウス逆像$E^{(n)}$はtype $p^n\alpha$である。

この命題を証明するためのkeyとなるのは，上の公式以外に宮岡一森によるuniruledness の判定法があります。
これからただちに

系(1.2)

X, E, Hを命題(1.1)と同じとします。

$K_X \equiv 0$ なる、X上の任意の半安定なベクトル束 E について任意の n 回のフロベニウス逆像は半安定である。

§2. 半安定ベクトル束のチャーン類の不等式

まず最初に次の定理を上げましょう。

定理 (2.1) ($p = \mathrm{char}(k) \geq 0$)

X を非特異代数曲面、H を nef 直線束、E を階数が r のベクトル束とします。$H \not\equiv 0$ とし、次のいずれかを仮定します。

(1) $\mathrm{char}(k) = 0$, E : μ-semi-stable (H について)

(2) $\mathrm{char}(k) > 0$, 任意の $n \geq 0$ について n 回のフロベニウス逆像 $E^{(n)}$ は μ-semi-stable

このとき

$$(r-1)\, c_1(E)^2 \leq 2r\, c_2(E).$$

ここでこの定理 (2.1) と前の命題 (1.1) から導ける定理を主張する前に、ce例 type という概念を導入しましょう。

X を d 次元非特異射影多様体、H を nef な直線束とします。β を実数とします。X上の階数 2 のベクトル束が、

cc例 type β であるとは，任意の階数1のEの subsheaf L について

$$(L\cdot H^{d-1}) \leqq \beta\,(c_1(E)\cdot H^{d-1})$$

が成立するときにいいます。

さて問題の定理は，

定理 (2.2)

X を d 次元の非特異射影多様体，E を X 上の階数2のベクトル束とします。ℓ を正整数で，β が実数であり

$$\left(\beta-\frac{1}{2}\right)c_1(E)^d \geqq \frac{(K_X\cdot c_1(E)^{d-1})}{2(p^{\ell}-1)}$$

を満たすとします。さてここで $c_1(E)$ が nef で big とし，$0\leqq i<\ell$ について i 回のフロベニウス逆像 $E^{(i)}$ が $c_1(E)$ について cc例 type β とします。このとき

$$\beta(1-\beta) \leq \frac{c_2(E)\cdot c_1(E)^{d-2}}{c_1(E)^d}$$

である。

§3 応用

この章は定理(2.2)の応用をいくつかあげましょう。

① Xを非特異な極小代数曲面で、一般型とする。
Xが not uniruled とし、Ω_X^1がK_Xについて半安定とすると

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4(p-1)^2} \leq \frac{c_2(X)}{c_1(X)^2}$$

(ここで $p = \mathrm{char}(k)$)

② Xを非特異な極小代数曲面で、一般型とする。
Xが not uniruled と仮定する。このとき、
非特異極小代数曲面の purely inseparable な dominant な有理写像の列

$$Z = Z_n \dashrightarrow Z_{n-1} \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow Z_1 \dashrightarrow Z_0 = X$$

があって次を満たす。

i) $[k(Z_i) : k(Z_{i-1})] = p$

ii) $c_1(Z_i)^2 < \dfrac{4p}{(p+1)^2}\, c_1(Z_{i-1})^2$

iii) Zは、特殊型か一般型で不等式

$$c_1(Z)^2 \leq \frac{(p+1)^2}{p} c_2(Z)$$

を満たすものである。

③ Xをd次元非特異射影多様体とし、Lをnef & bigの直線束とする。Xをnot uniruledとし、$(p-1)(L^d) > (K_X \cdot L^{d-1})$であると仮定すると

$$H^1(X, L^{-1}) = 0$$

④ Xを非特異射影代数曲面でnot uniruledとする。LをX上のnef & bigの直線束とする。

i) $p \in X$について pが$|K_X + L|$のbase pointで

$$(L^2)((L^2) - 4) > \left(\frac{(K_X \cdot L)}{(p-1)}\right)^2$$

であるとすると、pを通るeffective divisor Eで

$$(L \cdot E) = 0, \quad (E^2) = -1$$

〜

$$(L \cdot E) = 1, \quad (E^2) = 0$$

を満たすものが存在する。

ii) p, q を X 上の2点とし、p, q が $|K_X+L|$ を分離できなくて

$$(L^2)((L^2)-8) > \left(\frac{(K_X \cdot L)}{(p-1)}\right)^2, \quad (L^2) \geq 10$$

と仮定すると、p と q を通る effective divisor E で

$$(L \cdot E) = 0, \quad (E^2) = -1 \text{ or } -2$$
$$(L \cdot E) = 1, \quad (E^2) = -1 \text{ or } 0$$
$$(L \cdot E) = 2, \quad (E^2) = 0$$

を満たすものが存在する。

詳しくは、

A. Moriwaki, Frobenius pull-back of a semi-stable vector bundle of rank 2 and its applications.

を見て下さい。