代数幾何学シンポジウム記録
1991年度 pp.103-116

一般型代数曲面の pencil を持つ 3-fold について

東京大学理学部 大野 浩司 (KOJI OHNO)

序

一般型代数曲面に関する Noether 不等式 $K^2 \geq 2p_g - 4$ を不正則数 q を使って改良する試みとしては, F.Jongmans [J], O.Debarre [De] そして G.Xiao [**X1**, Corollary of Theorem 2] 等の研究が知られている. 近年, 小林正典氏によって, Noether 不等式の 3 次元への一般化がなされた[**Kb**]. この研究に触発され, 第 1, 第 2 次不正則数 q_1, q_2 を使って, 曲面と同様に不等式の改良ができないでろうかと考えたのだが, それには, まず, 曲線上の一般型代数曲面のファイバー空間の構造を持つ, 即ち, 一般型代数曲面のペンシルを持つ 3-fold に関する研究が必要不可欠であることに思い到った. 曲面論において, ペンシルを考える際, 相対的極小モデル (即ち, 任意のファイバーに (-1)-曲線を含まないモデル) をとると, 研究しやすいことが知られているが, 3 次元以上においても, 森-川又理論における意味での相対的極小モデルをとることで, 比較的取り組み易くなることがわかった. 本論説の目的は, 曲線上の, 一般型代数曲面の極小ファイバー空間に関する研究結果 ([**O**]) を報告することにある. 実際には講演で触れることのできなかったことについても, 言及するつもりである.

以下, すべて複素数体上で考えることにする. X を d (≥ 2) 次元正規射影代数多様体で, 高々 $\mathbf{Q}$-分解的末端特異点しか持たないとし, $f: X \to C$ を 非特異曲線 C への全射固有正則写像とする. f が一般型代数多様体の極小ファイバー空間であるとは, (1) K_X が f-数値的半正, 即ち, f のファイバーに含まれる X 上の任意の既約曲線と K_X との交点数が 0 以上で, (2) f の一般ファイバーが既約な一般型代数多様体である時のことをいうことにする. $d = 2$ の時, 即ち, 曲面の場合, 次のことが知られている.

定理 1 ([**Ho2**, THEOREM 2.1, 2.2], [**P**, PROPOSITION 2.6]). $f: X \to C$ を種数 g (≥ 2) の超楕円曲線を一般ファイバーとする, 極小ファイバー空間とすると, 次の不等式が成り立つ.

$$K_X^2 \geq \frac{4(g-1)}{g}\{\chi(\mathcal{O}_X) - (g+1)\chi(\mathcal{O}_C)\}.$$

あるいは同値であることの,

$$g(C) \leq 1 + \frac{g}{4(g^2-1)}\{K_X^2 - \frac{4(g-1)}{g}\chi(\mathcal{O}_X)\}.$$

この定理は X が線織面の 2 重被覆と双有理同値であることを使って証明された. 後に G.Xiao によって次の定理が示された.

定理 2 ([**X2**, Theorem 2]). $f: X \to C$, g は上記の通り. ただし, f の一般ファイバーは超楕円曲線とは限らないとする. この時, 次の不等式が成り立つ.

$$K_{X/C}^2 \geq \frac{4(g-1)}{g} deg f_* \omega_{X/C}$$

$K_{X/C}^2 = K_X^2 + 8(g-1)\chi(\mathcal{O}_C)$, $\deg f_*\omega_{X/C} = \chi(\mathcal{O}_X) + (g-1)\chi(\mathcal{O}_C)$ であることに注意すると, 定理 2 は 定理 1 の一般化になっていることがわかる. Xiao の手法は $f_*\omega_{X/C}$ の Harder-Narasimhan filtration による解析という画期的なものであった. このテクニックを高次元化することにより, 次の結果を得ることができた.

主定理 1. $f: X \to C$ を 曲線 C 上の 一般型代数曲面の極小ファイバー空間とし, F を f の一般ファイバー とする. この時, 次が成り立つ.

(1) $p_g(F) \geq 3$ かつ $|K_F|$ がペンシルの合成でないならば,

$$K_X^3 \geq \frac{4(p_g(F)-2)}{p_g(F)}\{\frac{(2\chi(\mathcal{O}_F) - 3K_F^2)p_g(F) - 4\chi(\mathcal{O}_F)}{2(p_g(F)-2)}\chi(\mathcal{O}_C) - \chi(\mathcal{O}_X)\}$$

あるいは同値であることの,

$$g(C) \leq 1 + \frac{p_g(F)\{K_X^3 + \frac{4(p_g(F)-2)}{p_g(F)}\chi(\mathcal{O}_X)\}}{2\{(3K_F^2 - 2\chi(\mathcal{O}_F))p_g(F) + 4\chi(\mathcal{O}_F)\}}.$$

(2) $|K_F|$ がペンシルの合成で, F は $K_F^2 = 1$, $p_g(F) = 2$, $q(F) = 0$ なる曲面でないとすると,

$$K_X^3 \geq \frac{4(p_g(F)-1)}{p_g(F)}\{\frac{(2\chi(\mathcal{O}_F) - 3K_F^2)p_g(F) - 2\chi(\mathcal{O}_F)}{2(p_g(F)-1)}\chi(\mathcal{O}_C) - \chi(\mathcal{O}_X)\}$$

あるいは同値であることの,

$$g(C) \leq 1 + \frac{p_g(F)\{K_X^3 + \frac{4(p_g(F)-1)}{p_g(F)}\chi(\mathcal{O}_X)\}}{2\{(3K_F^2 - 2\chi(\mathcal{O}_F))p_g(F) + 2\chi(\mathcal{O}_F)\}}.$$

(3) $K_F^2 = 1$, $p_g(F) = 2$ かつ $q(F) = 0$ ならば,

$$K_X^3 \geq -3\chi(\mathcal{O}_C) - \chi(\mathcal{O}_X)$$

あるいは同値であることの,

$$g(C) \leq 1 + \frac{K_X^3 + \chi(\mathcal{O}_X)}{3}.$$

(4) $p_g(F)=1$ ならば,

$$K_X^3 \geq K_F^2\{(\chi(\mathcal{O}_F)-6)\chi(\mathcal{O}_C)-\chi(\mathcal{O}_X)\}$$

あるいは同値であることの,

$$g(C) \leq 1+\frac{K_X^3+K_F^2\chi(\mathcal{O}_X)}{K_F^2(6-\chi(\mathcal{O}_F))}.$$

(5) $p_g(F)=0$ ならば,

$$K_X^3 \geq \begin{cases} -6K_F^2\chi(\mathcal{O}_C)+(2/3)\cdot l(2). & K_F^2 \geq 2 \text{ のとき} \\ -6\chi(\mathcal{O}_C)+(6/13)\cdot l(2). & K_F^2=1 \text{ のとき}. \end{cases}$$

上の *5* つの不等式のうちどれか *1* つにおいて等式が成立したとすると, f は *isotrivial*, 即ち, 適当な基底変換を行うと f の引き戻しは *Cartesian product* と双有理同値になる. ここで, $l(2)$ は X に関する *Reid-Fletcher* の多重種数公式の補正項を表すことにする. 詳しい定義は [**F1**, Definition 2.6]を参照されたい.

注意: 曲面の場合, 等号が成立しても f が isotrivial になるとは限らない.

実は, Xiao の 手法はもともと, 次の定理を証明する為に開発されたものである.

定理 3 ([**X2**, Theorem 1, Corollary 1]). 記号, 条件は定理 *2* の通りとする. この時,

$$K_X^2 < 4\chi(\mathcal{O}_X)-4(g-1)\chi(\mathcal{O}_C) \tag{1}$$

ならば,

$$V(f) := \mathrm{Im}\{\pi_1^{\mathrm{alg}}(X) \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(F)\}$$

は 自明であるか, または $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ と同型. さらに, $V(f) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ の時, f の一般ファイバーは, 超楕円曲線である. 特に, $q(X)=g(C)$ が成り立つ.

この定理の 3 次元への一般化を研究していたところ, 当初, 全く予想もしなかった結果が得られた. それが次の定理である.

主定理 2. 記号, 条件は, 主定理 *1* の通りとする. この時,

$$K_X^3 < 2(2\chi(\mathcal{O}_F)-3K_F^2)\chi(\mathcal{O}_C)-4\chi(\mathcal{O}_X) \tag{2}$$

ならば, 一般ファイバー F は次のうちいずれかの性質を持つ.

(1) F は種数 *2* の *linear pencil* を持つ.
(2) $K_F^2 \leq 2p_g(F)-1$.

(3) $K_F^2 = 2p_g(F)$, $p_g(F) \geq 3$, $q(F) \leq 2$, かつ $|K_F|$ は, ペンシルの合成ではない.

(4) $|K_F|$ はペンシルの合成ではない. かつ,

(4a) $K_F^2 = 8$, $p_g(F) = 3$, $q(F) \leq 1$, または

(4b) $K_F^2 = 9$, $p_g(F) = 4$, $q(F) \leq 1$, または

(4c) $K_F^2 = 7$, $p_g(F) = 3$, $q(F) \leq 2$.

(5) $K_F^2 = 4$ または 5, $p_g(F) = 2$. かつ, $|K_F|$ の可動部分は, 固定点をただ 1 つ持つ, 種数 3 の linear pencil.

(6) $K_F^2 = 2$ または 3. かつ, $p_g(F) = 1$.

(7) $p_g(F) = 0$.

注意 1: 上記 の (3) の場合において, $q(F) = 2$ の時は, 実は $p_g(F) = 3$ であることがわかる. 実際, $p_g(F) \geq 4$ と仮定すると, $K_F^2 < 3\chi(\mathcal{O}_F)$ であるから, F は 種数 2 の曲線上の 種数 2, または 3 の 曲線のペンシルを持つ ([**Ho2**, Theorem 3.1]). その各々の場合に応じて, $K_F^2 \geq 2\chi(\mathcal{O}_F) + 6$ または, $K_F^2 \geq (8/3) \cdot (\chi(\mathcal{O}_F) + 4)$ であるが, これは矛盾である.

注意 2: 上記の主定理 2 における不等式 (2) は 曲面論では, 定理 3 の不等式 (1) に相当するものであるが, 不等式 (1) が成立しても, 一般ファイバーの種数 g がそれによって制限を受けるということはない. 実際 [**X2**] では, 任意の 2 以上の整数 g に対して, 定理 2 の不等式の等号が成り立つ例が構成されている. そういう意味で, 主定理 2 は曲面には見られなかった新しい現象といえるだろう.

注意 3: 上記 7 通りすべてが実際に現れるのかどうかは, わからない. (4), (5) のような曲面がそもそも存在するのかどうかさえもまだわからないので, 御存知の方に教えて頂ければ幸いである. 本論説の最後に一つだけ例を挙げておく.

系. 主定理 2 と同じ仮定のもとで, $q_1(X) := h^1(\mathcal{O}_X) = g(C)$, $g(C)+1$ または, $g(C)+2$. さらに, $q_1(X) = g(C)+2$ の時は,

$$(K_F^2, p_g(F), q(F)) = (4,2,2), (5,2,2), (6,3,2), (7,3,2)$$

の 4 通りの可能性しかない.

注意: 曲面論の類推より, 素朴に考えて, $q_1(X) = g(C)$ が成り立つことが予想される. 個人的には, $q_1(X) = g(C)+2$ の可能性は消えて, $K_F^2 = 2\chi(\mathcal{O}_F)$, $q(F) = 1$ の場合において, $q_1(X) = g(C)+1$ なる例が存在するのではなかろうかなどと考えているが, 今のところ, なんともいえない.

記号: 本論説において使われる記号をいくつか定義しておく. 曲線 C 上の任意の非零なベクトル束 $\mathcal{E}$ に対して,

$$\delta(\mathcal{E}) := \frac{c_1(\mathcal{E})}{\operatorname{rank} \mathcal{E}} \in H^2(C, \mathbf{Q})$$
$$\mu(\mathcal{E}) := \deg \delta(\mathcal{E}) \in \mathbf{Q}$$

とおく.

$\mathcal{E}$ に対して, 一意的に次のようなフィルター付け (filtration) が存在することが知られている [**H-N**].

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_n = \mathcal{E},$$

ただし, (1) $\mathcal{E}_i / \mathcal{E}_{i-1}$ は半安定, 即ち, μ が自分自身のものより大きいような部分束は含まない. かつ, (2) 任意の i に対して, $\mu(\mathcal{E}_i / \mathcal{E}_{i-1}) > \mu(\mathcal{E}_{i+1} / \mathcal{E}_i)$.

これは $\mathcal{E}$ の Harder-Narasimhan filtration と呼ばれる. この時,

$$\delta_-(\mathcal{E}) := \delta(\mathcal{E} / \mathcal{E}_{n-1}) \in H^2(C, \mathbf{Q})$$
$$\mu_-(\mathcal{E}) := \deg \delta_-(\mathcal{E}) \in \mathbf{Q}$$

とおく.

§1 Arakelov の定理の一般化

主定理 1, 2 の証明の概略を説明する前に, 証明の鍵となる Arakelov の定理の一般化について述べる. ここでいう Arakelov の定理とは, 曲面論でよく知られている次の定理である.

定理 1.1 ([**Be2**]). *$f : X \to C$ を種数 2 以上の曲線の極小ファイバー空間とする. この時, $K_{X/C}$ は数値的半正, 即ち, X 上の任意の既約曲線との交点数が 0 以上.*

系 1.2 ([**Be2**]). *定理 1.1 と同じ仮定のもとで,*

$$K_X^2 \geq -8(g-1)\chi(\mathcal{O}_C).$$

等号が成立すれば f は isotrivial.

定理 1.3 (Arakelov の定理の一般化). *$f : X \to C$ を一般型代数多様体の極小ファイバー空間とする. この時, $mK_X \in Div(X)$ なる十分大きな正整数 m に対して, $mK_{X/C} - f^*\delta_-(\mathcal{K}_m)$ は数値的半正. ここで, $\mathcal{K}_m := f_*\omega_{X/C}^{[m]}$. 特に $K_{X/C}$ は数値的半正.*

系 1.4. *定理 1.3 と同じ仮定のもとで,*

$$K_X^d \geq -2dK_F^{d-1}\chi(\mathcal{O}_C).$$

等号が成立すれば, f は isotrivial.

定理 1.3 の証明: 一般に, $\mathcal{E}$ を C 上のベクトル束としたとき, 宮岡氏の補題 [**Mi**, Corollary 3.5] によると, $D \in \mathrm{Div}(C) \otimes \mathbf{Q}$ に対して, $\mathcal{E}(-D)$ が半正 (semipositive) であることと, $\deg D \leq \mu_-(\mathcal{E})$ であることとは同値. 特に, $\mathcal{E}(-\delta_-(E))$ は半正である. 従って, $\pi : P := \mathbf{P}_C(\mathcal{E}) \to C$ を $\mathcal{E}$ の射影化とすると, $\mathcal{O}_P(1) - \pi^*\delta_-(\mathcal{E})$ は

数値的半正. 固定点自由化定理 ([**KMM**, Theorem 3-1-1]) より, 十分大きな正整数 m に対して, 相対的 m-標準写像$\varphi := \varphi_{mK/C} : X \to P := \mathbf{P}_C(\mathcal{K}_m)$ は正則写像であり, $\varphi^*\mathcal{O}_P(1) = mK_{X/C}$. 従って,

$$mK_{X/C} - f^*\delta_-(\mathcal{K}_m) = \varphi^*(\mathcal{O}_P(1) - \pi^*\delta_-(\mathcal{K}_m))$$

は数値的半正. 川又氏の定理 ([**Ka**, Theorem 1]) より, 任意の正整数 m に対して, $\mu_-(\mathcal{K}_m) \geq 0$ だから, 特に $K_{X/C}$ が数値的半正であることがわかる. □

系 1.4 は, 次の補題より導かれる.

補題 1.5 ([**Ko**], [**Mo**]). *$f : X \to C$ は定理 1.2 の通りとする. f が isotrivial でなければ, ある正整数 k があって, 任意の正整数 m に対して, $\mu_-(\mathcal{K}_{km}) > 0$.*

定理 1.3 と宮岡氏の定理 ([**Mi**, Theorem 1.1]) より, 次の宮岡-Yau 型不等式を得ることができる.

系 1.6. *$f : X \to C$ を一般型代数曲面をファイバーとする, 種数 1 以上の曲線 C 上の極小ファイバー空間とする. この時, 次の不等式が成り立つ.*

$$K_X^3 \leq 3c_2(X)K_X + 2\chi(\mathcal{O}_C)(3c_2(F) - K_F^2).$$

ここで, $c_2(X)K_X := c_2(Y)\mu^*K_X$ (ただし, $\mu : Y \to X$ 特異点解消) とおいた.

問題: $d = 2$ のとき, $K_{X/C}^2 \leq 12\deg f_*\omega_{X/C}$ が知られている. さらに一般ファイバーが超楕円曲線のとき, もっと良い評価が与えられていて, 一般ファイバーの種数 g が偶数のとき,

$$K_X^2 \leq \frac{4(g-1)(3g+1)}{g^2}\{\chi(\mathcal{O}_X) + \frac{g^2-2g-1}{3g+1}\chi(\mathcal{O}_C)\},$$

g が奇数のとき,

$$K_X^2 \leq \frac{4(3g^2-2g+2)}{g^2+1}\{\chi(\mathcal{O}_X) + \frac{g(g-1)(g-2)}{3g^2-2g+2}\chi(\mathcal{O}_C)\}$$

が成り立つ[**Ma**, Theorem 4.0.4]. $d = 3$ のときはどうであろうか?

§2. 主定理 1 の証明の概略

X を d-次元正規 $\mathbf{Q}$-分解的代数多様体, C を非特異完備曲線, $f : X \to C$ 固有かつ全射な, 連結正則写像とする. X 上の Weil 因子 D を任意にとり, $f_*\mathcal{O}_X(D) \neq 0$ と仮定する. ここで, $f_*\mathcal{O}_X(D)$ はベクトル束であることに注意する. 任意の非零な部分ベクトル束 $\mathcal{F} \subset f_*\mathcal{O}_X(D)$ に対して, 自然な層準同型 $f^*\mathcal{F} \to \mathcal{O}_X(D)$ が存在し, それに付随して, 有理写像 $\varphi : X - \to \mathbf{P}_C(\mathcal{F})$ が定まる. この時, 非特異代数多様体 Y から, X への固有双有理写像 $\mu : Y \to X$ で, $\lambda := \mu \circ \varphi$ が正則となるものが存在する. この状況において, 次の補題が成り立つ.

補題 2.1. X 上の *effective* な *Weil* 因子 Z と Y 上の, μ に関して例外的で, *effective* な $\mathbf{Q}$-因子 E があって,

$$\lambda^*\mathcal{O}_P(1) \sim_{\mathbf{Q}} \mu^*(D-Z)-E.$$

定義:

$$\begin{aligned} M_Y(D,\mathcal{F}) &:= \lambda^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1) \in \mathrm{Div}(Y) \\ Z_Y(D,\mathcal{F}) &:= \mu^*Z + E \in \mathrm{Div}(Y)\otimes\mathbf{Q} \\ N_Y(D,\mathcal{F}) &:= M_Y(D,\mathcal{F}) - g^*\delta_-(\mathcal{F}) \in \mathrm{Div}(Y)\otimes\mathbf{Q} \end{aligned}$$

ここで $g := f\circ\mu$ とおいた.

注意:

(1) 任意の非零な部分ベクトル束 $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$に対して明らかに, $Z_Y(D,\mathcal{F}') \geq Z_Y(D,\mathcal{F})$.

(2) 補題 2.1 より,

$$N_Y(D,\mathcal{F}) \sim_{\mathbf{Q}} \mu^*D - Z_Y(D,\mathcal{F}) - g^*\delta_-(\mathcal{F}).$$

(3) F_1を g の一般ファイバーとしたとき, $h^0(\mathcal{O}_{F_1}(M_Y(D,\mathcal{F})|_{F_1})) \geq \mathrm{rank}\ \mathcal{F}$.

Xiao の補題 [**X2**, Lemma 2, 3] は各々, 次のように一般化される.

補題 2.2. $\tilde{D}$ を Y 上の $\mathbf{Q}$-因子とし,

$$Z_1 \geq Z_2 \geq \cdots \geq Z_{n+1} := 0$$

を Y 上の *effective* な $\mathbf{Q}$-因子の列,

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_{n+1} := 0$$

を有理数の列で, $N_i := \tilde{D} - Z_i - \mu_i F_1$ が任意の i に対して, 数値的半正であると仮定すると, 任意の Y 上の豊富な因子 H に対して,

$$(\tilde{D}^2 - \sum_{i=1}^{n}(N_iF_1 + N_{i+1}F_1)(\mu_i - \mu_{i+1}))H^{d-2} \geq 0.$$

証明は, 本質的には [**X2**] と同じである.

補題 2.3. $N_Y(D,\mathcal{F})$ は数値的に半正.

これは定理 1.3 の証明と同じアイデアを使えば, [**X2**] よりも容易に, かつ一般的に証明できる.

さて, 以上の準備のもとで, 主定理 1 を, もっとも典型的な (1) の場合に限って証明してみよう. そのためには, 次の命題を示せば良い.

命題 2.4. $f: X \to C$ は一般型代数曲面 F を一般ファイバーとする極小ファイバー空間とする. $p_g(F) \geq 3$ かつ, $|K_F|$ がペンシルの合成ではないとき,

$$K^3_{X/C} \geq \frac{4(p_g(F)-2)}{p_g(F)} \deg f_*\omega_{X/C}$$

が成り立つ. さらに等号が成立すれば, f は *isotrivial*.

実際, 主定理 1 の Case (1) は 命題 2.4 と次の補題より出る.

補題 2.5. $f: X \to C$ を, 標準特異点 (*canonical singularity*) しか持たない, 射影, 正規 *3* 次元代数多様体 X から, 非特異完備曲線 C への固有, 全射正則写像とする. この時,

$$\deg f_*\omega_{X/C} \geq \deg f_*\omega_{X/C} - \deg R^1 f_*\omega_{X/C} = \chi(\mathcal{O}_F)\chi(\mathcal{O}_C) - \chi(\mathcal{O}_X)$$

が成り立つ. ここで F は f の一般ファイバーとした.

命題 2.4 の証明:

$$0 =: \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_n := f_*\omega_{X/C}$$

を $f_*\omega_{X/C}$ の Harder-Narasimhan filtration とする. $\mu: Y \to X$ は, 非特異代数多様体 Y から X への固有, 双有理正則写像で, すべての i に対して, 有理写像 $X - \to \mathbb{P}_C(\mathcal{E}_i)$ の不確定点除去になっているとする. この時, $1 \leq i \leq n$ に対して,

$$\begin{aligned} r_i &:= \operatorname{rank} \mathcal{E}_i \in \mathbf{N} & N_i &:= N_Y(K_{X/C}, \mathcal{E}_i) \in \operatorname{Div}(Y) \otimes \mathbf{Q} \\ \mu_i &:= \mu_-(\mathcal{E}_i) \in \mathbf{Q} & Z_i &:= Z_Y(K_{X/C}, \mathcal{E}_i) \in \operatorname{Div}(Y) \otimes \mathbf{Q} \\ & & M_i &:= M_Y(K_{X/C}, \mathcal{E}_i) \in \operatorname{Div}(Y). \end{aligned}$$

とおき, さらに, $\mu_{n+1} = 0$, $Z_{n+1} = 0$, $M_{n+1} = \mu^* K_{X/C}$ とおく. 定義より,

$$\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_n \geq 0, \qquad Z_1 \geq Z_2 \geq \cdots \geq Z_n \geq 0.$$

であるから, 補題 2.2 より,

$$(\mu^* K_{X/C})^2 - \sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \mu_{i+1})(N_i F_1 + N_{i+1} F_1) \tag{2.1}$$

は pseudo-effective. ただし, F_1 は $g := f \circ \mu$ の一般ファイバーとする. 一方, 定理 1.3 より, $mK_X \in \operatorname{Div}(X)$ なる十分大きな正整数 m に対して,

$$\mu^* K_{X/C} - \frac{g^*\delta_-(\mathcal{K}_m)}{m} \tag{2.2}$$

は数値的半正. (2.1) と (2.2) を掛け合わせることにより, 次の不等式を得る.

$$
\begin{aligned}
(2.3) \qquad K^3_{X/C} \geq & \frac{\mu_-(\mathcal{K}_m)}{m} K_F^2 \\
& + \sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \mu_{i+1})(\mu^* K_{X/C} N_i F_1 + \mu^* K_{X/C} N_{i+1} F_1) \\
\geq & \sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \mu_{i+1})(\tau^* K_F M_{iF_1} + \tau^* K_F M_{i+1 F_1}),
\end{aligned}
$$

ただし, $\tau := \mu|_{F_1}$, $M_{iF_1} := M_i|_{F_1}$ とした. ここで, $\tau^* K_F \cdot M_{nF_1}$ を下からうまく評価する必要があるのだが, Hodge 指数定理を使うと次の評価が得られる.

補題 2.6.

(1) $\tau^* K_F \cdot M_{nF_1} \geq 2r_n - 4$.

(2) $i < n$ ならば, $\tau^* K_F \cdot M_{iF_1} \geq 2r_i - 2$.

命題 2.4 の証明の続き:

Case (a): $\mu_1 + \{K_F^2/(2p_g(F) - 4)\}\mu_n \leq (2/p_g(F)) \deg f_* \omega_{X/C}$ のとき.

Noether の不等式より,

$$
\frac{2}{p_g(F)} \deg f_* \omega_{X/C} \geq \mu_1 + \frac{K_F^2}{2p_g(F) - 4} \mu_n \geq \mu_1 + \frac{2p_g(F) - K_F^2}{4} \mu_n
$$

だから, 補題 2.6 より,

$$
\begin{aligned}
K^3_{X/C} \geq & \sum_{i=1}^{n-2} (\mu_i - \mu_{i+1})(4r_i - 2) + (\mu_{n-1} - \mu_n)(2r_{n-1} - 2 + 2r_n - 4) \\
& + (2r_n - 4 + K_F^2)\mu_n \\
\geq & \sum_{i=1}^{n-2} (\mu_i - \mu_{i+1})(4r_i - 2) + (\mu_{n-1} - \mu_n)(4r_{n-1} - 4) \\
& + (2r_n - 4 + K_F^2)\mu_n \\
= & 4 \sum_{i=1}^{n} r_i(\mu_i - \mu_{i+1}) - 2\mu_1 - 2(\mu_{n-1} - \mu_n) - \mu_n(4r_n - 2) \\
& + (2r_n - 4 + K_F^2)\mu_n \\
= & 4 \deg f_* \omega_{X/C} - 2\mu_1 - 2\mu_{n-1} - (2r_n - K_F)\mu_n \\
\geq & 4 \deg f_* \omega_{X/C} - 4\mu_1 - (2p_g(F) - K_F^2)\mu_n \\
= & 4 \deg f_* \omega_{X/C} - 4(\mu_1 + \frac{2p_g(F) - K_F^2}{4} \mu_n),
\end{aligned}
$$

$$\geq (4 - \frac{8}{p_g(F)}) \deg f_* \omega_{X/C}.$$

Case (b): $\mu_1 + \{K_F^2/(2p_g(F)-4)\}\mu_n \geq (2/p_g(F)) \deg f_*\omega_{X/C}$ のとき.

部分列 $\{\mu_1, \mu_n, 0\}$, $\{Z_1, Z_n, 0\}$ に関して, 同様にすると,

$$\begin{aligned} K_{X/C}^3 \geq & \frac{\mu_-(\mathcal{K}_m)}{m} K_F^2 + (\tau^* K_F M_{1F_1} + \tau^* K_F M_{nF_1})(\mu_1 - \mu_n) \\ & + (\tau^* K_F M_{nF_1} + K_F^2)\mu_n \\ \geq & (2p_g(F) - 4)(\mu_1 - \mu_n) + (2p_g(F) - 4 + K_F^2)\mu_n \\ = & (2p_g(F) - 4)(\mu_1 + \frac{K_F^2}{2p_g(F) - 4}\mu_n) \\ \geq & \frac{4(p_g(F) - 2)}{p_g(F)} \deg f_*\omega_{X/C}. \end{aligned}$$

最後の記述は, 補題 1.5 より出る. □

§3 主定理 2 の証明の方針

主定理 2 を示すには, 次の命題を示せば良い.

命題 3.1. $f : X \to C$ は一般型代数曲面 F を一般ファイバーとする極小ファイバー空間とする. F は主定理 2 の *(1)* から *(7)* のすべてに当てはまらないならば,

$$K_{X/C}^3 \geq 4 \deg f_* \omega_{X/C}$$

が成り立つ. さらに等号が成立すれば, f は *isotrivial.*

証明は, 基本的には主定理 1 の証明と同様になされるが, さらに次のことに注意して行われる. (1) $\tau^* K_F \cdot M_{iF_1}$ の評価を強くする. (2) 必要に応じて $\{\mu_i\}$, $\{Z_i\}$ の部分列をとって, 和のとりかたを変える. (3) $q(F)$ は例えば, 次のよく知られた補題を使って押さえる.

補題 3.2 ([**Bo**, proof of Theorem 9]). S は $p_g(S) \geq 3$ なる極小一般型代数曲面で, $|K_S|$ の可動部分 $|M|$ はペンシルの合成ではないとする. この時,

$$\frac{M^2 + K_S \cdot M}{2} \geq 2p_g(S) - 4 + q(S).$$

主定理 2 の系は 2 次元ではよく知られた次の補題より出る.

補題 3.3. $g: Y \to C$ を $d\ (\geq 2)$ 次元非特異代数多様体 Y から, 非特異曲線 C への, 固有, 連結, 全射正則写像とする. この時,

$$H^0(Y, \Omega_Y^1)/g^* H^0(C, \Omega_C^1) \hookrightarrow H^0(Y_{\bar\eta}, \Omega^1_{Y_{\bar\eta}}).$$

特に, $q_1(Y) \leq q_1(Y_{\bar\eta}) + g(C)$. ここで, $Y_{\bar\eta} := Y_\eta \times_K \bar{K}$ (ただし, η は C の一般点 (generic point), Y_η は η 上の一般ファイバー (generic fibre), K は C の関数体, そして $\bar{K}$ は K の代数的閉包) とした.

証明: S を g の特異ファイバーの C における像とし, $U := C \setminus S$, $V := g^{-1}(U)$ とおく. $g|_V : V \to U$ は smooth だから, V の任意の点に対して, その座標近傍 V_α と局所座標 $(z_1^\alpha, z_2^\alpha, \ldots, z_d^\alpha)$ があって, $g|_{V_\alpha} = g(z_1^\alpha, z_2^\alpha, \ldots, z_d^\alpha) = z_1^\alpha$ とかける. $\omega|_{Y_{\bar\eta}} = 0$ なる $\omega \in H^0(Y, \Omega_Y^1)$ を任意にとると, ある $f_i \in \Gamma(V_\alpha, \mathcal{O}_Y)$, $i = 1, 2, \ldots, d$ に対して,

$$\omega|_{V_\alpha} = \sum_{i=1}^{d} f_i dz_i^\alpha$$

とかけるが, 仮定より, 任意の $i \neq 1$ に対して, $f_i = 0$. 従って, $\omega|_{V_\alpha} = f_1 dz_1^\alpha \in \Gamma(V_\alpha, g^*\Omega_C^1)$. 以上より, $\omega|_V \in \Gamma(V, g^*\Omega_C^1)$ であることがわかる. ω は特異ファイバーにのみ極を持つ $g^*\Omega_C^1$ の有理切断であるから, C 上の正因子 D があって, $\omega \in \Gamma(Y, g^*(\Omega_C^1(D)))$ として良い. g による有理微分型式の引き戻しは, 自然な単射

$$g^* : \Gamma(C, \Omega_C^1(D)) \to \Gamma(Y, g^*(\Omega_C^1(D)))$$

を定義するが, $h^0(C, \Omega_C^1(D)) = h^0(Y, g^*(\Omega_C^1(D)))$ であることより, g^* は同型である. したがって, ある $\vartheta \in \Gamma(C, \Omega_C^1(D))$ があって, $\omega = g^*\vartheta$. そこで, 後は $\vartheta \in \Gamma(C, \Omega_C^1)$ を示せば良い. もし, そうでないとすると, ある点 $p \in C$ で ϑ は $n\ (\geq 1)$ 位の極を持ち, t を p の近傍における, 適当な局所座標とすると, $\vartheta = t^{-n}dt$ とかける. 点 $q \in g^{-1}(p)$ を任意にとり, その座標近傍を W, 局所座標を $(z_1, z_2, \ldots, z_d)$ とする. 必要なら, Y を blow-up して, $g^*t = z_1^{n_1} \cdot z_2^{n_2} \ldots \cdot z_d^{n_d}$ とかけているとして良い. ここで n_i は非負整数, ただし, ある j に対して, $n_j \neq 0$. この時,

$$\omega|_W = g^*\vartheta|_W = \frac{1}{(z_1^{n_1} \cdot z_2^{n_2} \ldots z_d^{n_d})^{n-1}} \sum_{i=1}^{d} n_i \frac{dz_i}{z_i}$$

であるが, これは, ω が正則であることに矛盾する. □

例: C を非特異曲線, δ は C 上の因子で次数が $d\ (> 0)$ かつ $|\delta|$ は固定点自由とする. $\pi_1 : S := \mathbb{P}_C(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(\delta)) \to C$, $\pi_2 : P := \mathbb{P}_C(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(-e)) \to S$ (ただし, e は 2 以上の整数) とおく. さらに, $\Sigma \in |\mathcal{O}_P(1)|$, $\Sigma_0 \in |\mathcal{O}_P(1) + \pi_2^*\mathcal{O}_S(e)|$ を各々, 自然な全射準同型 $\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(-e) \to \mathcal{O}_S(-e)$, $\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(-e) \to \mathcal{O}_S$ に対応する π_2 の切断とし, $L \in |\mathcal{O}_S(1)|$, $L_0 \in |\mathcal{O}_S(1) - \pi_1^*\delta|$ を各々, 自然な全射準同型 $\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(\delta) \to \mathcal{O}_C(\delta)$, $\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(\delta) \to \mathcal{O}_C$ に対応する π_1 の切断とする. $L_0 + \pi_1^*|\delta| \subset |L|$ だから $|L|$ は固定点自由, さらに $\Sigma + \pi_2^*|eL| \subset |\Sigma_0|$ だから, $|\Sigma_0|$, したがって $|6\Sigma_0|$ は固定点自由である. $R \in |6\Sigma_0|$ を smooth な general member

とする. $\mathcal{L} := \mathcal{O}_P(3\Sigma_0)$ とおくと, $\mathcal{O}_P(R) = \mathcal{L}^{\otimes 2}$ だから R に沿って分岐する 2 重被覆 $\sigma : X \to P$ が存在する. X は非特異かつ連結である. $p := \pi_1 \circ \pi_2$, $f := p \circ \sigma$ とおくと, $\omega_{X/C} = \sigma^*(\omega_{P/C} \otimes \mathcal{L})$ だから,

(1) $K_{X/C} = \sigma^*\{p^*\delta + (2e-2)\pi_2^* L + \Sigma\} = \sigma^*\{p^*\delta + (e-2)\pi^*\delta + (e-2)\pi_2^* L + \Sigma_0\}$

であり, L, Σ_0 は数値的半正だから, $K_{X/C}$ も数値的半正. F を f の一般ファイバーとすると, $K_F^2 = K_{X/C}|_F^2 = 2(3e-4)$ となる. また $\sigma_*\omega_{X/C} = \omega_{P/C} \oplus (\omega_{P/C} \otimes \mathcal{L})$ だから

(2)
$$
\begin{aligned}
f_*\omega_{X/C} &= p_*(\omega_{P/C} \otimes \mathcal{L}) \\
&= p_*(p^*\mathcal{O}_C(\delta) \otimes \pi_2^*\mathcal{O}_S(2e-2) \otimes \mathcal{O}_P(1)) \\
&= \mathcal{O}_C(\delta) \otimes \pi_{1*}\{\mathcal{O}_S(2e-2) \otimes (\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(-e))\} \\
&= \mathcal{O}_C(\delta) \otimes \pi_{1*}\{\mathcal{O}_S(2e-2) \oplus \mathcal{O}_S(e-2)\} \\
&= \mathcal{O}_C(\delta) \otimes S^{2e-2}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(\delta)) \oplus S^{e-2}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(\delta)) \\
&= \mathcal{O}_C(\delta) \otimes \{\bigoplus_{i=0}^{2e-2} \mathcal{O}_C(i\delta) \oplus \bigoplus_{i=0}^{e-2} \mathcal{O}_C(i\delta)\} \\
&= \bigoplus_{i=1}^{2e-1} \mathcal{O}_C(i\delta) \oplus \bigoplus_{i=0}^{e-1} \mathcal{O}_C(i\delta)
\end{aligned}
$$

であり, $p_g(F) = \mathrm{rank} f_*\omega_{X/C} = 3e-2$. 以上より, f は Noether line 上の一般型代数曲面を一般ファイバーとする, 極小ファイバー空間であることがわかる. (1) より,

$$
\begin{aligned}
(K_{P/C} + \mathcal{L})^3 =&(p^*\delta + (2e-2)\pi_2^* L + \Sigma)^3 \\
=&\{(2e-2)\pi_2^* L + \Sigma\}^3 + 3p^*\delta\{(2e-2)\pi_2^* L + \Sigma\}^2 \\
=&3(2e-2)^2(\pi_2^* L)^2\Sigma + 3(2e-2)\pi_2^* L\Sigma^2 + \Sigma^3 \\
&+ 3d\{2(2e-2) - e\}.
\end{aligned}
$$

$L^2 - \pi^*\delta L = 0$ より, $L^2 = d$. $\Sigma^3 - \pi_2^*(-eL)\Sigma^2 = 0$ より, $\Sigma^3 = -e\pi_2^* L\Sigma^2$. また, $\Sigma^2\pi_2^* L - \pi_2^*(-eL)\pi_2^* L\Sigma = 0$ より, $\Sigma^2\pi_2^* L = -e\pi_2^* L^2\Sigma = -ed$, 従って, $\Sigma^3 = e^2 d$ であるから,

$$
\begin{aligned}
(K_{P/C} + \mathcal{L})^3 &= 3(2e-2)^2 d + 3(2e-2)(-ed) + e^2 d + 3d(3e-4) \\
&= (7e^2 - 9e)d.
\end{aligned}
$$

よって, $K_{X/C}^3 = 2e(7e-9)d$ がわかる. 一方, (2) より,

$$
\begin{aligned}
\deg f_*\omega_{X/C} &= \{\frac{(2e-1)2e}{2} + \frac{(e-1)e}{2}\}d \\
&= \frac{5e^2 - 3e}{2} d
\end{aligned}
$$

だから,

$$(3) \qquad K^3_{X/C}/\deg f_*\omega_{X/C} = \frac{4(7e-9)}{5e-3}.$$

であり, (3) $< 4 \Leftrightarrow e = 2$. よって, $e = 2$, $(K_F^2, p_g(F), q(F)) = (4,4,0)$ のとき, f は主定理 2 の不等式 (2) を満たす例となっている.

補遺

極小 3 次元一般型代数多様体 X がペンシルの構造を持っているとする. その相対的極小モデルを $f: X_1 \to C$ (ただし, C は非特異曲線) としたとき, K^3_X と $K^3_{X_1}$ の大小関係はどうなるかという疑問が自然に生じるが, その答えは曲面の場合と同様に,

$$K^3_X \geq K^3_{X_1}$$

である. 実際, 川又-Viehweg 消滅定理より, n を任意の 2 以上の整数とすると, 任意の正整数 i に対して, $R^i f_* \mathcal{O}_{X_1}(nK_{X_1}) = 0$ であるから, 任意の非負整数 p に対して, $h^p(X_1, \mathcal{O}_{X_1}(nK_{X_1})) = h^p(C, f_*\mathcal{O}_{X_1}(nK_{X_1}))$, 特に, $p = 2, 3$ に対して, $h^p(X_1, \mathcal{O}_{X_1}(nK_{X_1})) = 0$. よって, m-種数が双有理不変であることに注意して,

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}_X(nK_X)) = h^0(\mathcal{O}_X(nK_X)) &\geq h^0(\mathcal{O}_{X_1}(nK_{X_1})) - h^1(\mathcal{O}_{X_1}(nK_{X_1})) \\ &= \chi(\mathcal{O}_{X_1}(nK_{X_1}))\end{aligned}$$

が得られる. そこで, Reid-Fletcher の Riemann-Roch [Fl] の n に関する 3 次の係数を比べると, 求める不等式が得られる.

References

[Be1] A.Beauville, *L'application canonique pour les surfaces de type général*, Invent. Math. **55** (1979), 121–140.

[Be2] ———, *L'inégalité $p_g \geq 2q - 4$ pour les surfaces de type général*, Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 343–346.

[Bo] E.Bombieri, *Canonical models of surfaces of general type*, Publ.IHES. **42** (1973), 171–219.

[De] O.Debarre, *Inégalités numériques pour les surfaces de type général*, Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 319–346.

[Fl] A.R.Fletcher, *Contributions to Riemann-Roch on projective 3-folds with only canonical singularities and applications*, Proc.Symp.in Pure Math. **46** (1987), 221–231.

[H-N] G.Harder and M.S.Narasimhan, *On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves*, Math. Ann. **212** (1975), 215–248.

[Ho1] E.Horikawa, *Algebraic surfaces of general type with small c_1^2, I*, Ann. of Math. **104** (1976), 357–387.

[Ho2] ———, *Algebraic surfaces of general type with small c_1^2, V*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. **A28** (1981), 745–755.

[Hu] B.Hunt, *Complex manifold geography in dimension 2 and 3*, J. Diff. Geom. **30** (1989), 51–153.

[J] F.Jongmans, *Sur l'étude des surfaces algébriques caractérisées par la condition* $p_g \geq 2(p_a + 2)$, Bull.Acad.Roy.de Belgique, s.5 **36** (1950), 485–494.

[KMM] Y.Kawamata, K.Matsuda and K.Matsuki, *Introduction to the minimal model problem*, in "Algebraic Geometry, Sendai, 1985," Adv. Stud. in Pure Math. **10**, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland Amsterdam, 1987, pp. 283–360.

[Ka] Y.Kawamata, *Kodaira dimension of algebraic fiber spaces over curves*, Invent. Math. **66** (1982), 57–71.

[Kb] M.Kobayashi, *On Noether's inequality for threefolds*, J.of Math.Soc.of Japan. (to appear).

[Ko] J.Kollár, *Subadditivity of the Kodaira dimension:Fibers of general type*, in "Algebraic Geometry, Sendai, 1985," Adv. Stud. in Pure Math. **10**, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland Amsterdam, 1987, pp. 361–398.

[Ma] S.Matsusaka, *Some numerical invariants of hyperelliptic fibrations*, J.Math.Kyoto Univ. **30-1** (1990), 33–57.

[Mi] Y.Miyaoka, *The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety*, in "Algebraic Geometry, Sendai, 1985," Adv. Stud. In Pure Math. **10**, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland Amsterdam, 1987, pp. 449–476.

[Mo] S.Mori, *Classification of higher-dimensional varieties*, Proc. of Symp. in Pure Math. **46** (1987), 269–331.

[O] K.Ohno, *Some inequalities for minimal fibrations of surfaces of general type over curves*, preprint.

[P] U.Persson, *Chern invariants of surfaces of general type*, Compos. Math. **43** (1981), 3–58.

[R] M.Reid, π_1 *for surfaces with small* K^2, in "Algebraic Geometry," Proceedings of Summer Meeting, Copenhagen 1978, Lecture Notes in Math. **732**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, pp. 534–544.

[X1] G.Xiao, *Algebraic surfaces with high canonical degree*, Math. Ann. **274** (1986), 473–483.

[X2] ———, *Fibered algebraic surfaces with low slope*, Math. Ann. **276** (1987), 449–466.