代数幾何学シンポジウム記録
1991年度　pp.74-81



# K3曲面のpencilをもつ Calabi-Yau threefold

東工大・理　　小林　正典

## §1

以下、複素数体$\mathbb{C}$上で考える。

ここでは、Calabi-Yau threefold（以下 CY ~~3-fold~~と略す）は、3次元正規代数多様体で、射影的、標準因子$K\sim 0$，不正則数$q=0$であり、terminal Gorenstein singularityしかもたないものとする。

代数多様体の分類理論によると、3次元正規代数多様体は、単有理であるか（小平次元$\kappa=-\infty$）、ある極小モデルと双有理になる（$0\leqq\kappa\leqq 3$）。後者で$\kappa>0$の場合には更に、多重標準写像$\Phi_{|mK|}$が$m\gg 0$で標準モデルへの双有理正則写像となるか（$\kappa=3$）、$\kappa=0$の多様体のfibrationを与え2次元以下の多様体の構造に還元される（$\kappa=1\sim 2$）。（[Ka2]など）

$\kappa=0$の多様体については、$q>0$の時はさらに詳しく構造が分っている。即ち、一般次元でAlbanese写像が全射であ

り、$q$ が最大 (= 次元 $n$) の時は Abel 多様体であり、$0<q<n$ の時は再び fibration の構造が入る。([Ka1])

よって、$\kappa=0, q=0$ の多様体は分類理論の立場では多様体の一つの構成要素であり、その構造を調べることが問題となる。本稿ではこの類に属する多様体で、更に曲面の fibration を持つものを調べる。

曲面論においては、この類には K3 曲面と Enriques 曲面の2種があり、後者は前者を普遍被覆とした。そこで、まず、$K\sim 0$、(時には単連結) を仮定する。特異点の条件は極小モデルであることに由来し、3次元では孤立 cDV 特異点と一致する。

尚、微分幾何的対象としても CY 3-fold は自然なものである。(但し、現段階では非特異単連結を更に仮定する)。いわゆる Bogomolov 分解 ([Be1]) によれば、Kähler 多様体 $X$ で、第1 Chern 類 $c_1(X)=0\in H^2(X,\mathbb{R})$ を満たすものは、ある étale な有限被覆をとると、次の3種の多様体の直積に分解する：(i) 複素トーラス, (ii) シンプレクティック多様体, (iii) スペシャルユニタリー多様体。ここで、(iii) は単連結射影多様体で、$K\sim 0$, Hodge 数 $h^{p,0}=0$ ($0<p<$ 次元) を満たすものであり、次元は3以上とする。単連結非特異 CY 3-fold は (iii) に属する3次元多様体と一致する。

また、超弦理論との関わりも見出されてきている。

## §2

K3曲面は互いに複素構造の変形でつながっていたが、CY 3-foldは事情が全く異なる。全てのCY 3-foldを構成する方法は知られておらず、主な構成法としては、(i) 重みつき射影空間(又はその直積)の中の超曲面の完全交叉、(ii) Fano 3-foldの2重被覆 (iii) Kummer K3曲面の類似([Be2])、(iv) Weierstraß model ([Na]) 等がある。

まず、上のような構成法を用いた、表題の多様体の例を2つ挙げる。

<u>例</u>　$\mathbb{P}^4$の斉次座標を$(X_0:X_1:X_2:X_3:X_4)$として、

$P$：平面 $X_0=X_1=0$，　$F_0, F_1$：十分一般な4次斉次式，

$V=\{X_0F_0+X_1F_1=0\}\supset P$，　$H$：$V$の超平面切断

とすると、$|H-P|$は$V$上にK3曲面の線形束を与える。一般に$V$は$\{F_0=F_1=0\}\cap P$の16個の孤立特異点をもつCY 3-foldであるが、このsmall resolution $\tilde{V}\to V$で、$\tilde{V}$が射影的になるものをとることもできる。

<u>例</u>　$Y$をFano 3-foldとし、$|-K_Y|$に2つの非特異なmember $B_1$, $B_2$があり、$B_1+B_2$が正規交叉にできたと仮定する。このとき、$B_1+B_2$で分岐する$Y$の二重被覆をとり、特異点解消を

行って、非特異CY 3-fold $X$ を得ることができる。$B_i$ のstrict transformがK3曲面になり、次の命題によって $X$ はK3曲面のfibrationを持つ。

<u>命題</u> $X$: CY 3-fold, $D$: $X$ 上のeffective divisor に対し、

(1) 次は同値： (i) $\mathcal{N}_{D/X} \simeq \mathcal{O}_D$

(ii) $D \sim {}^{\exists}m\,{}^{\exists}S$　$m$: 自然数, $S$: K3又はAbel曲面

(2) (1)のとき、$\mathbb{P}^1$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が存在して、次の可換図式を満たす：

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}(\mathcal{E}) \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{P}^1 \\ X \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

$\pi$: 標準的な射影

$\varphi$: $|S|$ による正則写像

(証明) (1) (i)⇒(ii) のみ示す。次の完全列がある。

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_X(D)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_D(D)) \longrightarrow 0 .$$
$$H^0(\mathcal{O}_D(D)) \cong H^0(\mathcal{O}_D)$$

これより $|D|$ はfree。$H^0(\mathcal{O}_D)$ の定数関数と $H^0(\mathcal{O}_X)$ に対応するpencil $L$ をとる。$|L|$ による全射 $\Phi_{|L|}: X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ のStein分解を考えればよい。

(2) (1)より $|S|$ はfree. $\mathcal{E}$ としては、$X$ の十分ampleなline bundleの $\varphi_*$ をとればよい。 ▨

§3

前節最後の命題より、以後、特に偏極K3曲面のpencilを扱う。偏極Abel曲面についても同様の取扱いが期待されるがここでは取り上げない。

$S$を射影的K3曲面、$L$を$S$上のample divisorとするとき、$L^2$を偏極K3曲面$(S, L)$のdegreeという。degreeは正の偶数であり、低いdegreeの偏極K3曲面は構成法が良く分っている。これを利用してK3曲面を含むCY 3-foldを作ることにする。尚、$L$はfreeのもののみ考えることにする。

(1) degree 2

$\mathcal{E}$を$\mathbb{P}^1$上の階数3のベクトル束、$P = \mathbb{P}(\mathcal{E})$とし、$\mathbb{P}^1$への自然な全射を$\pi$とする。もし$|-2K_P|$にreduced member $B$が存在すれば、$B$で分岐する2重被覆$\sigma : X \longrightarrow P$がとれる。$B$の特異点があまり悪くなければ、$X$はCY 3-foldになり、$\pi \circ \sigma$がK3曲面のpencilを与える。

$\mathcal{E} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b)$ $(0 \leq a \leq b)$と標準化しておくと、次の結果を得る.

<u>定理1</u> 上の状況で、$a, b$の条件として次は同値.

(i) 非特異な$B$が存在する ($\Leftrightarrow X$は非特異CY 3-fold)

(ii) $X$が CY 3-foldとなる$B$が存在する。

(iii) $a \leqq 1$ かつ $b \leqq 2$

(2) degree 4

(1)と同様に、$\mathbb{P}^1$上のベクトル束 $\mathcal{E} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b) \oplus \mathcal{O}(c)$ $(0 \leqq a \leqq b \leqq c)$ に対し、$P = \mathbb{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1$とおく。$|-K_P|$に既約で特異点が孤立cDV特異点のみしか持たないmember $X$が存在すれば、$X$はCY 3-foldになり、$\pi|_X$はK3曲面のpencilを与える。

定理2　上の状況で、次が成り立つ。

(i) 非特異CY 3-fold $X$が存在する $\Longleftrightarrow$

$a=b=0, c \leqq 2$ ; $a=0, b=c=1$ ; $a=0, b=c=2$ または

$a=b=1, c \leqq 4$

(ii) CY 3-fold $X$が存在する $\Longleftrightarrow$ (i) または $a=0, b=1, c=2$.

証明は、$\mathbb{P}(\mathcal{E})$のrelativeな同次座標をとり、$|-2K_P|$ (定理1)、$|-K_P|$ (定理2) のbase locusに特異点が現れるかどうか計算することによって行う。尚、定理2において$a=0, b=1, c=2$の場合、$|-K_P|$の一般のmemberには3個の$\{xy+zw=0\} \subset \mathbb{C}^4$型の特異点がある。

上の定理2は$\mathbb{P}^3$の4次曲面に対応する場合であるが、$\mathbb{P}^3$の

2次曲面の2重被覆に対応する場合の例も同様に構成できる。

(3) degree $\geq 6$

超曲面の完全交叉(degree = 6, 8 の一般の場合)となる偏極K3曲面の pencil は、(1)(2) と同様に構成できる。また、degree = 10, 12, 14, 16, 18 の一般の場合は、偏極K3曲面は等質空間の中の超曲面の完全交叉として実現される([Mu])ので、構成できる。

例えば、degree = 10 の時を考える。$\mathbb{C}^5$ の2次元線形部分空間をパラメトライズする Grassmann 多様体 $G := \mathrm{Grass}(2,5)$ を考える。$G$ は6次元多様体であり、Plücker座標により $\mathbb{P}^9$ に埋め込まれる。$\mathbb{P}^1$ との直積 $Y := G \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^9 \times \mathbb{P}^1$ をとり、$\mathbb{P}^9$ (resp. $\mathbb{P}^1$) の超平面の $Y$ への引き戻しを $L$ (resp. $H$) とする。例えば、$L_1, L_2, L_3 \in |L|$, $Q \in |2L+2H|$ を一般にとれば、$X := Y \cap L_1 \cap L_2 \cap L_3 \cap Q$ は求める性質を満たす CY3-fold になる。

特別なK3曲面を用いると、次の例もできる。

<u>命題</u> $k$ : 任意の正整数 に対し、非特異 CY3-fold $X$ で、偏極K3曲面の pencil をもち、偏極が $\mathrm{Pic}(X)$ の中で primitive であり degree が $6k-2$ となるものが存在する。

参考文献

[Be1] Beauville, A., *Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle*, J. Diff. Geom. 18 (1983), 755-782

[Be2] ——, *Some remarks on Kähler manifolds with $c_1=0$*, in "Classification of Algebraic and Analytic Manifolds (K. Ueno, ed.)," Progress in Math. 39, Birkhäuser, 1983, 1–26

[Ka1] Kawamata, Y. *Characterization of abelian varieties*, Compositio Math. 43 (1981), 253–276

[Ka2] ——; 高次元代数多様体の分類理論, 数学 40 (2), 岩波 1988, 1–18.

[Mu] Mukai, S., *Curves, K3 surfaces and Fano 3-folds of genus ≤10*, in "Algebraic Geometry and Commutative Algebra," in Honor of Masayoshi NAGATA, 1987, 357-377

[Na] Nakayama, N., On Weierstrass models, in "Algebraic Geometry and Commutative Algebra," in Honor of Masayoshi NAGATA, 1987, 405–431