代数幾何学シンポジウム記録
1991年度 pp.18-30

射影多様体の射影空間への埋め込みの構造について

高知大 理 遊佐 毅 (Takeshi Usa)

§0. 全体について

先月10月に京大で代数幾何学のシンポジウムがあり，そこで現在考察中の問題やいくつかの主結果について報告し、それに関して報告集が出る予定なので、今回は§1で主結果のうち、後の話で使うものを列挙し、§2において、それらの結果が射影多様体の射影空間への埋め込みの構造を調べる上でどのような意味をもつのかを簡単に復習し、§3において§1の具体例への適用について解説する．(§3が本論)

§1. 主結果について

まず記号の設定を行う．すべて$\mathbb{C}$上で考えることにする．

W : non-singular quasi projective variety

$\mathcal{L}$: line bundle (= invertible sheaf) on W (ampleは仮定しない)

X : non-singular projective sub variety of W $\dim X = n > 0$

$j : X \hookrightarrow W$ canonical closed immersion

$\Pi^1_{\mathcal{L}} := J^1_W(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{L}^{-1}$ （$J^1_W(\mathcal{L})$ は $\mathcal{L}$ の 1-jets の層 i.e. $W \times W$ の対角集合 $\Delta(W)$ の定義イデアルの層 $I_\Delta \subset \mathcal{O}_{W\times W}$ について $J^1_W(\mathcal{L}) = p_{1*}\left((\mathcal{O}_{W\times W}/I_\Delta^2) \otimes p_2^*\mathcal{L} \right)$. ここで p_i は i-th projection を表わす.）

$\Pi^g_{\mathcal{L}} := \Lambda^g \Pi^1_{\mathcal{L}}$, $\Pi^g_{\mathcal{L}}(m) := \Pi^g_{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{L}^m$ （以下 twist はすべて $\mathcal{L}$ に関する twist を表わす）

$\underbrace{\text{(1.1) Main Theorem.}}$ (cf. [U-7], [U-5], [U-2], [U-1]) $m \neq 0$, $g \geq 1$ ($\in \mathbb{Z}$) をそれぞれとり、固定する.

（仮定） $H^0(W, \Pi^g_W(m)) \longrightarrow H^0(X, \Pi^g_W(m) \otimes \mathcal{O}_X)$ 全射

$H^0(W \ \Pi^{g+1}_W(m)) \longrightarrow H^0(X, \Pi^{g+1}_W(m) \otimes \mathcal{O}_X)$ 全射

この時 $\phi \in H^0(X, \Omega^g_W(m) \otimes \mathcal{O}_X)$ を勝手に選び固定する. その時、以下の ϕ に関する 2 条件は同値となる.

(a) $\exists\, \psi^\# \in H^0(\Omega^g_W(m) \otimes \mathcal{O}_W/I_X^2)$ s.t. $\psi^\#|_X = \phi$

(b) $\exists\, \psi \in H^0(\Omega^g_W(m))$ s.t. $\psi|_X = \phi$

(1.2) Remark (ア) 上の(仮定)は例えば次のような状況で成立する.

(1.2.1) $W = \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) = \mathbb{P}$, $\underbrace{\quad j : X \hookrightarrow \mathbb{P} \quad}_{}$ が <u>arithmetically normal</u>

$\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ (tautological line bundle)

(i.e. $H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$ 全射 ($\forall m \in \mathbb{Z}$))

(イ) $\psi^{\#}$ が得られても、それから直接 ψ が得られるとは限らない。その場合には $\psi^{\#}$ を少々 modify する必要がある。

次の Corollary では <u>(1.2.1) の状況</u>で考える。まず記号をいくつか新しく導入しておく。

$R := \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$

$S := \bigoplus_{m \geq 0} H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m)) \cong \mathbb{C}[Z_0, \cdots, Z_N]$,

$J_+ := (Z_0, \cdots, Z_N) S$

$L_\bullet : \quad 0 \longrightarrow L_{N-n} \xrightarrow[f_{N-n}]{} L_{N-n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow[f_1]{} L_0 \longrightarrow R \longrightarrow 0$

これを R の minimal graded S-free resolution とする。ここで $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}$ が arithmetically normal であることから $L_0 = S$ に注意。

$L_q = \bigoplus_{j=1}^{b_q} S(-t_{q,j})$

$b_q(m) := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Tor}_q^S(R, S/J_+)_{\langle m \rangle} =$ "$t_{qj} = m$ となる j の個数"

ここで $\langle m \rangle$ は次数 $= m$ の部分を表わす。この $b_q(m)$ を R の q-th syzygy の degree $= m$ に対する Betti 数という

ことがある。もちろんトポロジーにおける本来の Betti 数と直接の関係はない。またより一般的な graded finite S-module M に対しても、$b_q(m;M)$ を同様に定義することができる。

(1.3) Corollary (cf [U-5]) 以下の自然な同型及び単射がある。

$$\mathrm{Tor}^S_q(R, S/J_+)_{<m>} \cong \frac{H^0(X, \Omega^q_P(m)\otimes \mathcal{O}_X)}{\mathrm{Im}[H^0(P, \Omega^q_P(m))]} \overset{(1.1)\text{ Main Thm.}}{\cong} \frac{H^0(X, \Omega^q_P(m)\otimes \mathcal{O}_X)}{\mathrm{Im}[H^0(P, \Omega^q_P(m)\otimes \mathcal{O}_P/I_X^2)]} \xrightarrow{\delta = \bar{\delta}_{LFT}} H^1(X, \Omega^q_P(m)\otimes N^\vee_{X/P})$$

ここで $\delta = \bar{\delta}_{LFT}$ は以下の short exact sequence から誘導されるものとする。($N^\vee_{X/P} = I_X/I_X^2$; X の P での co-normal bundle)

$$0 \longrightarrow \Omega^q_P(m)\otimes N^\vee_{X/P} \longrightarrow \Omega^q_P(m)\otimes \mathcal{O}_P/I_X^2 \longrightarrow \Omega^q_P(m)\otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

(1.4) Remark この (1.3) の Corollary からもわかるように、(1.1) Main Theorem の $\psi^\#$ や ψ などをもたぬ ϕ 即ち obstructed な section ϕ が幾何的に重要な情報をもたらしてくれることがわかる。

§2、埋め込みの構造に関する問題 (cf. [U-3], [U-4], [U-6])

§0 でも述べたように今回の話の本論は §3 であるが、本来の目標である埋め込みの構造の考察に、§1 で提示した結果がどのように関わるのか簡単に復習しておく。以下では主に (1.2.1) の状況設定で話を進める。

L を、$j: X \hookrightarrow \mathbb{P}$ が induce する Hodge-Kähler class $\omega \in H^1(X, \Omega^1_X)$ によって定義され、$H^{\bullet}(\Omega^{\bullet}_X \otimes N^{\vee}_{X/P}(*))$ に作用する Lefschetz operator とする。

即ち、 $L: H^q(X, \Omega^p_X \otimes N^{\vee}_{X/P}(m)) \to H^{q+1}(X, \Omega^{p+1}_X \otimes N^{\vee}_{X/P}(m))$. この Lefschetz 作用素と (1.1) Main Theorem の証明で用いられるいくつかの作用素の関係を調べることにより、(1.3) Corollary の $q=1$ の結果から $j(X) \subseteq P$ の定義方程式系に filtration を入れることができ、対応する $P = \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ の closed subscheme の列 $X = W_n \subseteq W_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq W_0 \subseteq P$ を得る。一般にこの列は unique に定まるものではないが少々奇妙な性質をいくつか持っている。そのいくつかを以下に列挙してみる。

$\boxed{\text{性質}}$ (i) $t := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}\left[L^n: H^0(N^{\vee}_{X/P}(*)) \to H^n(\Omega^n_X \otimes N^{\vee}_{X/P}(*))\right]$ とすると

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Im}\, N^{\vee}_{W_{n-1}/P} \otimes \mathcal{O}_X \arrow[r] & N^{\vee}_{X/P} \arrow[r] & N^{\vee}_{X/W_{n-1}} \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\text{split}"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & 0 \\ & & & \mathcal{O}_X(-m_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X(-m_t) & \end{tikzcd}$$

(ii) $j(X)$ が complete intersection $\Longleftrightarrow$ $W_n \subsetneqq W_{n-1} = \cdots = W_0 = \mathbb{P}$

この場合、各 W_j は unique に定まる.

(iii) $W_p \subsetneqq W_{p-1}$ $\overset{\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{\Longleftrightarrow}}$ $\exists$ special p-cycle （$\Leftrightarrow$ というのは少々細かい条件かそれぞれに付加されることで $\Rightarrow$ や $\Leftarrow$ が証明されることを示す）

ここで本来の目的である埋め込みの構造を研究する上で最初に問題となることを挙げてみよう。

<u>(2.1) Problem</u>　各 W_j を既約かつ被約で $\mathrm{reg}(W_j) \supseteq X$ となるように選べるか？

<u>(2.2) Remark</u>　上の問題はかなり難しいと思われる．その理由は、例えば $j = n-1$ の場合に<u>正しいとすれば</u>、

$N_X^\vee = E \oplus \mathcal{O}_X(-m_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X(-m_t) \Longrightarrow {}^\exists W \subseteq P$ (subvariety) ${}^\exists S_1, \cdots, S_t$ (hypersurface of $\mathbb{P}$) s.t. $X = S_1 \cap \cdots \cap S_t \cap W$ (transversal)

ということも証明できてしまうからである．現段階では、Lefschetz 作用素を使って $S_1, \cdots, S_t$ の部分は探し出すことができて、$W \doteqdot W_{n-1}$ の次元の評価が一番の問題となることまでわかっている。それには X の syzygy から W のそれ

を分離する手法が必要となる，その意味で syzygy の幾何的な立場からのより深い研究が望まれる。

§3. Veronese 埋込みの syzygy

さて、§1 の結果にもどり、それを具体的な例に適用することを考えてみると、(1.2.1) の典型的な例として $X=\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ における e 次 Veronese 埋込み $j=\Phi_e : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})=\mathbb{P}$ がまず思い浮ぶ。そこで次の問題を考えよう．

(3.1) Problem $j=\Phi_e : X=\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})=\mathbb{P}$ (e次 Veronese) における $b_q(m)$ を求めよ．

(3.2) Remark 意外なことに、これは現在でも未解決の問題なのである．表現論としても難しい問題を含んでいるとのことである（詳しくはお近くの専門家にお尋ね下さい）。知られている場合としては ㋐ $q=1$ (Everybody knows !) ㋑ $n=1$ (わりによく知られている … 以下の (3.3) 参考) ㋒ $e=2$ (determinantal ideal の結果等を使う cf. [J-P-W]) ㋓ M. Green の評価式 cf. [G])

以下の目標は (1.3) の結果を利用して ~~㊀の M. Green の評価をほんのわずか、改良することを試みる~~※. まず $n=1$ の場合に適用してみよう.

(3.3) Example (easy) $j=\Phi_e : X=\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{P}^e(\mathbb{C})=\mathbb{P}$

この時、 $j^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(H)=\mathcal{O}_X(e)$. ($\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(H)$, $\mathcal{O}_X(1)$ はそれぞれ $\mathbb{P}^e(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の tautological ample line bundle を表わす)

このことから ㋐ $\Omega^1_{\mathbb{P}}\otimes\mathcal{O}_X \cong \overset{e}{\oplus}\mathcal{O}_X(-(e+1))$; ㋑ $N^\vee_{X/\mathbb{P}} \cong \overset{e-1}{\oplus}\mathcal{O}_X(-(e+2))$ がわかる. さて $b_q(m)>0$ となったとすると、理論の一般論で $1\leqslant q\leqslant e-1<e$.

また、(1.3) で与えた δ について $\mathrm{Im}\,\delta\neq 0$. 従って $H^0(\Omega^q_{\mathbb{P}}(mH)\otimes\mathcal{O}_X)\neq 0$ と $H^1(\Omega^q_{\mathbb{P}}(mH)\otimes N^\vee_{X/\mathbb{P}})\neq 0$. これと ㋐, ㋑ から $me\geqq q(e+1)$ と $me\leqq -2+q(e+1)+(e+2)$. これらを m について解くと

$$q+\frac{q}{e}\leqq m\leqq q+\frac{q}{e}+1 \quad (0<q<e).$$

従って $m=q+1$. 以上をまとめると R の minimal graded S-free resolution は.

$$0\longrightarrow \underset{\overset{b_{e-1}}{\oplus}S(e)}{\overset{}{L_{e-1}}} \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \underset{\overset{b_2}{\oplus}S(-3)}{L_2} \longrightarrow \underset{\overset{b_1}{\oplus}S(-2)}{L_1} \longrightarrow \underset{S}{L_0} \longrightarrow R\longrightarrow 0$$

(この形の resolution を 2-linear と呼ぶ)

ここで $b_q = b_q(q+1)$ であり、 $q+1$ 次の部分での exactness から

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 \to & (L_q)_{<q+1>} & \to & (L_{q-1})_{<q+1>} & \to & \cdots & \to & (L_1)_{<q+1>} & \to & (L_0)_{<q+1>} & \to & R_{<q+1>} & \to 0 \\
& \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \parallel & & & \\
& \overset{b_q}{\oplus} S_{<0>} & & \overset{b_{q-1}}{\oplus} S_{<1>} & & & & \overset{b_1}{\oplus} S_{<q-1>} & & S_{<q+1>} & & &
\end{array}$$

各々の次元を計算すると

$$b_q = (-1)^q(eq+e+1) + (-1)^{q+1}\binom{e+q+1}{e} + \sum_{j=1}^{q-1}(-1)^{q+j+1}\binom{e+q-j}{e} b_j$$

となり漸化式を得る。

もちろん、他にも証明(計算)方法はあって、例えば次の概念を用いてもよい。

<u>(3.4) Definition</u> (cf. [M]) $P = \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, F : coherent O_P-module

F が k-regular $\underset{def}{\iff}$ $H^i(P, F((k-i)H)) = 0 \quad (\forall i > 0)$

($O_P(H)$ は P の Tautological ample line bundle)

この "k-regularity" と minimal S-free resolution の間には次の関係;

がある.

<u>(3.5) Theorem</u> (Eisenbud - Goto cf. [E-G]) F : coherent $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$-module

$M := \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} H^0(\mathbb{P}, F(m))$ が finite S-module になっているとする。以下は同値な条件である.

(i) F k-regular

(ii) $^\forall q \geq 0$ について「$b_q(m) > 0 \Rightarrow m \leq k+q$」が成立

従って Veronese 埋め込みのように $b_1 = b_1(2)$ の時には resolution が 2-linear となる必要十分条件は $\mathcal{O}_X$ が 1-regular となる. 一般の $n \geq 1$ に対する e 次 Veronese 埋め込みでの $\mathcal{O}_X$ $(X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ の regularity は次で与えられる.

<u>(3.6) Lemma</u> $j = \Phi_e : X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) = \mathbb{P}$ e 次 Veronese 埋め込み. この時 $\mathcal{O}_X$ の ($\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(H)$ に関する) regularity は

$$\left[\frac{(n+1)(e-1)}{e} \right] = n - \left[\frac{n}{e}\right] \qquad ([\ ] \text{ は Gauß 記号})$$

特に $n=1$ のとき、そしてその時のみ 1-regular.

以上からも $n \geq 2$ の場合の minimal S-free resolution は

それほど単純でないことがわかる.

さて (3.3) と同様のアイデアに基づいて $b_q(m) > 0$ となる m の bound を求めよう. 以下 (3.1) の状況で考える.

(3.7) Lemma (アタリマエ)

$$H^0(X, \Omega_{\mathbb{P}}^q(qH) \otimes \mathcal{O}_X) = 0$$

従って $b_q(m) > 0 \Rightarrow (q+1) \leq m$.

m の upper bound を求めるために $\mathcal{O}_P(H)$ ではく $\mathcal{O}_X(1)$ ($X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の方の tautological ample line bundle) を使って $\Omega_P^q \otimes N_{X/P}^\vee$ の regularity を求めてみよう. (以下 $\Omega_P^1|_X := \Omega_P^1 \otimes \mathcal{O}_X$ と略す)

(3.8) Lemma F coherent $\mathcal{O}_X$-module で $\mathcal{O}_X(1)$ について k-regular とする. この時

$F \otimes \Omega_P^1|_X$ は $(k+e+1)$-regular for $\mathcal{O}_X(1)$

(3.9) Corollary

$q \geqq 0$ に対して $\Omega_P^q|_X$ は $q(e+1)$-regular for $\mathcal{O}_X(1)$

<u>(3.9)の証明の方針</u>　g に関する帰納法．(3.8)から

$\Omega^1_{P|X} \otimes \Omega^{g-1}_{P|X}$ は $g(e+1)$-regular．一方、

$$\begin{tikzcd} \Omega^1_{P|X} \otimes \Omega^{g-1}_{P|X} \arrow[r, "\wedge"] & \Omega^g_{P|X} \arrow[l, bend left, "\exists \text{ splitting}"] \end{tikzcd}$$

従って　$0 = H^i(\Omega^1_{P|X} \otimes \Omega^{g-1}_{P|X}(g(e+1)-i)) \hookleftarrow H^i(\Omega^g_{P|X}(g(e+1)-i))$ //

<u>(3.10) Proposition</u>　F : coherent $\mathcal{O}_X$-module で k-regular for $\mathcal{O}_X(1)$

この時　$F \otimes N^\vee_{X/P}$ は $(k+e+2)$-regular for $\mathcal{O}_X(1)$．

<u>(3.11) Corollary</u>　$\ell \geqq (g+1)(e+1)$ なら

$$H^1(N^\vee_X \otimes \Omega^g_{P|X} \otimes \mathcal{O}_X(\ell)) = 0$$

従って　$b_g(m) > 0$ ならば

$$(g+1) \leqq m \overset{\boxed{\text{strict}}}{\leqq} (g+1) + \left[\frac{g}{e}\right]$$

~~$(\leqq (g+1)+1+[\frac{g}{e}]$ Green's upper bound$)$~~ ※

※(おわび)　Green の評価式は Gauß 記号の処理をうまく行うと上限を $(g+1)+\left[\frac{g-1}{e}\right]$ とできるので<u>現段階では</u>"改良"にはなっていません．

Reference.

[E-G]D.Eisenbud and S.Goto :Linear free resolutions and minimal multiplicity, J.Algebra 88, (1984), pp89-133.

[G]M.L.Green :Koszul Cohomology and the Geometry of Projective Varieties, J.Diff.Geom.19, (1984), pp125-171.

[J-P-W]T.Józefiak, P.Pragacz, and J.Weyman :Resolutions of Determinantal Varieties and Tensor Complexes associated with Symmetric and Antisymmetric Matrices, Astérisque, 87-88, (1981),pp109-189.

[M] D.Mumford :Lectures on Curves on an Algebraic Surface, Annals of Math. Studies 59, Princeton U. Pess, Princeton (1966).

[U-1] T.Usa :On Obstructions of Infinitesimal Lifting, (1984), Proc. Japan Acad., 60, pp.179-180.

[U-2] ______ :Obstructions of Infinitesimal Lifting,(1989), Comm. Algebra, 17(10), pp.2469-2519.

[U-3] ______ :Lefschetz Operators and the Existence of Projective Equations, (1989), J. Math. Kyoto Univ., 29(3), pp.515-528.

[U-4] ______ :An Algebraic Cycle relating to a Section with High Penetration, (1990), J. Math. Kyoto Univ., 30(3), pp.517-522.

[U-5] ______ :Syzygies and the Normal Bundle (Preprint).

[U-6] ______ :Partial Structures of a System of Projective Equations (Preprint).

[U-7] ______ :Generalization of Theorems on Infinitesimal Lifting (In preparation).