代数幾何学シンポジウム記録
1992年度　pp.108-125

モチーフとChow群上のfiltration

東大 数理　斎藤秀司

以下 $\mathcal{C}$ を $\mathbb{C}$ 上の smooth projective varieties のカテゴリーとする。$X \in \mathcal{C}$ に対し $CH^r(X)$ を余次元 r の Chow群, つまり X 上の余次元 r の代数的サイクルの有理同値類の群とする。$CH^r(X)$ が代数幾何における重要な研究対象であることは言うまでもないであろう。さらに最近(といってもかなり以前より)は整数論においても欠く事のできない研究対象となっている。つまり X が数体上定義される時その L-函数の整数点での位数及いはその留数と $CH^r(X)$ の神秘的な関係に関し多くの興味深い研究がなされているのである。(例えば Tate予想, Bloch, Deligne, Beilinson, Bloch-Kato, Kato 等の仕事がある) このような重要性にもかかわらず $CH^r(X)$ の構造についてはつい最近まである特殊な場合を除いてはあまりよくわかっていなかった。というより60年代終わりに Mumford の示した定理は "$CH^r(X)$ $(r \geq 2)$ は無秩序なものである" との印象を人々に与えた。ところが最近 Bloch-Beilinson による革新的な哲学が登場し Chow群の研究が大変に見通しがよくなってきた。本稿ではこれについて簡単に解説していきたい。

以下 Abel 群 M に対し $M_{\mathbb{Q}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ とする。

§1 古典的な事実からの動機付けと Beilinson 予想

古くから知られているサイクルのコホモロジー類によって定まるサイクル写像

$$\rho_0^r : CH^r(X) \longrightarrow H^{2r}(X, \mathbb{Z})$$

を考えよう。コホモロジーの Hodge structure を考えてみると ρ_0^r はもっと自然に

$$(1\text{-}1)\quad \rho_0^r : CH^r(X) \longrightarrow H^{2r}(X, \mathbb{Z}(r)) \cap H^{0,0}$$

と書き直せる。今

$$F^1 CH^r(X) = \mathrm{Ker}(\rho_0^r)$$

とするとこれは homologically equivalent to zero (以下 $\underset{hom}{\sim} 0$) なるサイクルの類よりなる部分群に他ならない。有名な Hodge 予想は

$$\mathrm{Im}(\rho_0^r)_{\mathbb{Q}} = H^{2r}(X, \mathbb{Q}(r)) \cap H^{0,0}$$

という事に他ならない。次に Griffiths の周期写像 ([Gri], [Bl-1, §2])

$$(1\text{-}2)\quad \rho_1^r : F^1 CH^r(X) \longrightarrow J^r(X)$$

を考えよう。ここに $J^r(X)$ は complex torus で

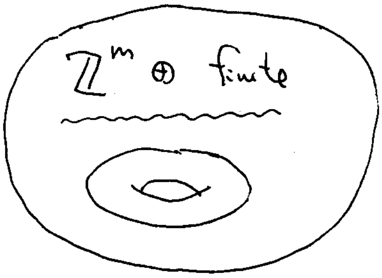
$$J^r(X) = H^{2r-1}(X, \mathbb{C}) \big/ F_H^r + H^{2r-1}(X, \mathbb{Z}(r))$$

で与えられる。ここに F_H^r は Hodge filtration を表わす。

ここで次の古典的定理を思いだそう。

<u>定理(Abel-Jacobi)</u>　$r=1$ の時　ρ_1^r は同型。

かくも美しい定理を讃えて ρ_1^r は Abel-Jacobi 写像とも呼ばれている。かくして $CH^1(X)$ は以下のように見えるいかにもなじみ深いものであることが判明したわけである。



さて $CH^r(X)$ が $r \geq 2$ の場合にも同様になじみ深いものであって欲しいと思うのは人情であり実際しばらくの間人々はそう信じていたのだが、この甘い憶測は次の Mumford の定理により無情にもコッパみじんに砕かれたのであった。

<u>定理(Mumford)</u>*) X を smooth projective surface/$\mathbb{C}$ で $p_g = \dim H^0(X, \Omega_X^2) \neq 0$ とする。この時 $\mathrm{Ker}(\rho_1^2)$ は"巨大"である。

ここで"巨大"の意味をもう少し正確に定義しよう。今曲面 X 上の余次元 2 の Chow 群を考えているのだがこれは X 上の zero-cycle の有理同値類 $CH_0(X)$ に他ならない。X (任意次元の X 上の zero-cycle) については $F^1CH_0(X) = A_0(X) = \{\text{degree zero の cycle classes}\}$ なることが見てとれる。この時次の定義を導入する。

---

*) cf. [Mum-2]

定義(1-3) $X \in \mathcal{C}$(次元は任意)に対し
"$A_0(X)$は有限次元である"
ということをある必ずしも連結でない$\mathbb{C}$上のsmooth projective curve Cとmorphism $f: C \to X$が存在し
$f_*: A_0(C) \to A_0(X)$が全射
ということで定義する。

Weak Lefschetz定理を使って $(n = \dim X)$
「$A_0(X) \simeq J^n(X)$」*) ならば 「$A_0(X)$は有限次元」
であることがわかる。さて先のMumfordの定理を正確に言うと

定理(1-4) $X \in \mathcal{C}$, $\dim X = 2$ の時
$A_0(X)$は有限次元 $\Rightarrow H^0(X, \Omega_X^2) = 0$ //

つまり $H^0(X, \Omega_X^2) \neq 0$ なら $A_0(X)$は次元1のX内の部分多様体の中に押し込めない。

さて一般に

$$F^2CH^r(X) = \mathrm{Ker}(P_1^r \cdot F^1CH^r(X) \to J^r(X))$$

とおこう。Mumfordの定理より一般に$F^2CH^r(X)$は自明でないとしてよいだろう。(実際一般に$F^2CH^r(X)_{\mathbb{Q}} \neq 0$なる例はつい最近までMumfordの結果以外知られていなかった。)
そこで$F^2CH^r(X)$をいかにとらえたらよいか? Mumfordの定理はこれはAbel多様体(あるいはもう少し一般にcomplex torus)といった幾何学的対象では一般に捉えられないことを

*) $n = \dim X$ のとき $J^n(X) \simeq H^0(X, \Omega_X^1)^*/H_1(X, \mathbb{Z})$ でXのAlbanese variety $\mathrm{Alb}(X)$にこれは他ならない。

意味している。しばしの間これは人々に一種の絶望感を与えていた。しかし以下の observation をしてみることにする。

HS を $\mathbb{Q}$ 上の Hodge structure のカテゴリー

MHS を $\mathbb{Q}$ 上の mixed Hodge structure のカテゴリーとする。

この時

- $H^{2r}(X, \mathbb{Q}(r)) \cap H^{0,0} = \mathrm{Hom}_{HS}(\mathbb{Q}, H^{2r}(X, \mathbb{Q}(r)))$
  $\left(= \mathrm{Ext}^{0}_{MHS}(\mathbb{Q}, H^{2r}(X, \mathbb{Q}(r)))\right)$
- $J^r(X)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Ext}^{1}_{MHS}(\mathbb{Q}, H^{2r-1}(X, \mathbb{Q}(r)))$

最初の式は自明。次式は Carlson によって示された。これによって次の事実が成り立たないかという naive な期待がまずする。

? $CH^r(X)_{\mathbb{Q}}$ 上に descending filtration

$$\{F^\nu CH^r(X)_{\mathbb{Q}}\}_{\nu \geq 0}$$

が存在し $F^0 CH^r(X) = CH^r(X)$, $F^1 CH^r(X)$, $F^2 CH^r(X)$ は先の通り。

そしてある自然な単射

$$\rho^r_\nu : \mathrm{Gr}^\nu_F CH^r(X)_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathrm{Ext}^\nu_{MHS}(\mathbb{Q}, H^{2r-\nu}(X, \mathbb{Q}(r)))$$

が存在するのでは？

しかしこれは以下の Carlson の結果よりアッというまに否定されてしまう

<u>定理</u> HS ⟶ (Abel 群) : $H \mapsto \mathrm{Ext}^1_{MHS}(\mathbb{Q}, H)$

なる functor は右完全。よって $\mathrm{Ext}^\nu_{MHS}(\mathbb{Q}, H) = 0 \quad \nu \geq 2$.

(注) 実は MHS には injective object が十分にないので上の statement は不正確なのだが、ここでは感じを伝えるためにこう書きました。お許し下さい

上のChow群をホモロジー代数で捉えようという発想はスゴイという他はない。(Chow群の定義からみてそれがExtというホモロジー代数的なもので捉えられるとは想像もつかない)しかしそんなスゴイことをするのには mixed Hodge structure では少々役不足であったということなのであろうか?(この数行に書かれた内容に関しては様々な方からのご非難,ご反論があるやもしれませんが前もってお詫びしておきます。)
そこでBeilinsonは以下の革新的ideaを提出した。上のHSをM (Grothendieckの定義したpure motivesのカテゴリー (cf. [K1-2]))で置きかえMHSをMM(これはまだ誰もその本当の姿を見たことのない mixed motives のカテゴリー その存在は予想の段階)で置きかえれば同様の話しがうまく進行するのではないか?
(Beilinsonがキリスト教信者か否かは知らないが上のstoryは末世に突如として救済者が現われ衆生を救うという救済者思想にideaの起源があるのかもしれない。)もう少し正確に彼の予想を定式化してみよう。

予想(1-5) 以下の性質を持つカテゴリーMM (category of mixed motives)がある

(1) MMはTannakianカテゴリー*) (cf. [DMOS, II])

(2) MをGrothendieckの定義した(homological equivalenceに関する)(pure) motivesのカテゴリーとする (cf. [K1-2])。MはMMにsubcategoryとして埋め込まれ,MMのsemi-simple objectの全体と一致。

---

*) 簡単にいうとアーベル圏でテンサー積, inner Hom をもつ,体上のベクトル空間のなすカテゴリーに似たもの。

各 $X \in \mathcal{C}$ に対し

(3) $CH^r(X)_{\mathbb{Q}}$ 上に descending filtration

$$\{F_M^\nu CH^r(X)_{\mathbb{Q}}\}_{\nu \geq 0}$$

が定まり 自然な同型

$$Gr^\nu_{F_M} CH^r(X)_{\mathbb{Q}} \simeq Ext^\nu_{MM}(\underline{1}, h^{2r-\nu}(X)(r)) .$$

がある。ここに $\underline{1}$ は M の unit object (つまり tensor product に関し unit) $h^{2r-\nu}(X)(r) \in M$ は X に付随する(ある) (pure) motive.

§2. Beilinson の予想の言いかえ.

さて Beilinson の予想を述べたわけであるが, このままでは どうもスッキリしない。また誰も想像もしたことのない, ありもしない mixed motives があって ………と言われても, ハァー, それで? という感じである。凡人が旧約聖書の一節を引き合いに出されて説教を受けても今ひとつ心に直接伝わらないのではないだろうか? そこで (1-5) を凡人にもある程度納得できる形に言いかえる必要があるだろう。それを以下に書く。

定義 $\mathcal{C}$ 上の filtration $F^\cdot CH^*$ とは各 $X \in \mathcal{C}$ と各 $r \geq 0$ に対し $CH^r(X)_{\mathbb{Q}}$ 上の descending filtration $\{F^\nu CH^r(X)_{\mathbb{Q}}\}_{\nu \geq 0}$ が与えられていることをいう。

予想 (2-1)　$\mathcal{C}$ 上の filtration $F^{\cdot}CH^{*}$ で次の条件 (BB0)〜(BB3) を満たすものが少くともひとつは存在する。

(BB0)　$\forall X \in \mathcal{C}$ $\forall r \geq 0$ に対し $F^{0}CH^{r}(X)_{\mathbb{Q}} = CH^{r}(X)_{\mathbb{Q}}$

(BB1)　$F^{\cdot}CH^{*}$ は代数対応で保たれる。言いかえると次の条件が満たされる。$\forall W, X \in \mathcal{C}$ と $\forall \Gamma \in CH^{g}(W \times X)_{\mathbb{Q}}$ に対し

$$\Gamma_{*}(F^{\nu}CH^{s}(W)_{\mathbb{Q}}) \subset F^{\nu}CH^{r}(X)_{\mathbb{Q}} \quad \forall \nu \geq 0.$$

ここに　$g + s - \dim W = r$ で

$$\Gamma_{*} : CH^{s}(W)_{\mathbb{Q}} \to CH^{r}(X)_{\mathbb{Q}} \ ; \ \alpha \longmapsto (pr_{X})_{*}((pr_{W}^{*}\alpha)\cdot\Gamma)。$$

上で

$$Gr^{\nu}\Gamma_{*} : Gr_{F}^{\nu} CH^{s}(W)_{\mathbb{Q}} \to Gr_{F}^{\nu} CH^{r}(X)_{\mathbb{Q}}$$

を各 Graded peace 上に誘導される写像とする。

(BB2)　上の仮定の下

$$\varphi_{\Gamma}^{2r-\nu} : H^{2s-\nu}(W, \mathbb{Q}) \to H^{2r-\nu}(X, \mathbb{Q})$$

を Γ が代数対応としてコホモロジー群上に誘導する写像とする。

この時　$\varphi_{\Gamma}^{2r-\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad Gr^{\nu}\Gamma_{*} = 0$

(BB3)　$F^{\cdot}CH^{*}$ は discrete。つまり $\forall X \in \mathcal{C}$, $\forall r \geq 0$ に対し $N > 0$ を十分大にとれば

$$F^{N}CH^{r}(X)_{\mathbb{Q}} = 0$$

重要なポイントは3つある。第一に(1-5)は(2-1)を直ちに導くということ。第2に(2-1)では motive とか mixed motive とかいった"専門用語"は全て排除され代数対応といったごく普通の"日常用語"によって述べられている。さらに重要なのは条件(BB0)〜(BB3)が $F^{\cdot}CH^*$ をユニークに特徴付けてしまうという結果(以下に述べる cf (3-2))が示せるという事である。話しを進めるために以下の定義を導入する。

定義(2-2) $\mathcal{C}$ 上の filtration $F^{\cdot}CH^*$ が Bloch-Beilinson type (略して FBBT とかく)とは(2-1)の(BB0),(BB1)(BB2)を満たす時を言う。この時 各 $X\in\mathcal{C}$, $r\geq 0$ に対し

$$D_F^r(X) = \bigcap_{\nu\geq 0} F^{\nu}CH^r(X)_{\mathbb{Q}},$$

$$CH_F^r(X) = CH^r(X)_{\mathbb{Q}} / D_F^r(X)$$

とかく。 $D_F^r(X)$ $(X\in\mathcal{C}, r\geq 0)$ は $\mathbb{C}$ 上の smooth projective varieties 上の代数的サイクル($\mathbb{Q}$-linear)上のある equivalence relation を定めていると見れる。これを D_F-equivalence relation と呼ぶ。

上の定義によれば(2-1)は以下のように言いかえられる。

予想(2-3) ある $\mathcal{C}$ 上の FBBT $F_M^{\cdot}CH^*$ が存在して D_{F_M}-equivalence と rational equivalence が一致する。

§3. 主要結果

主要結果をやみくもにダラダラと述べていく前に我々のアプローチの正当性を保証してくれる基本的事実をまとめておく事はここまでこの論文を辛抱強く読んでいただいた読者に対するほんのささいな感謝の気持ちの表われでしょう。

(1) ある特殊な FBBT, $F_B^{\cdot}CH^*$ が具体的に定義され、それがある種の普遍性、ユニーク性を持つ。特に (2-1) は D_{F_B}-equivalence = rational equivalence という予想に同値になる。*)

(2) 代数的サイクルを有理同値のかわりに D_{F_B}-equivalence で modulo しても（言いかえると $CH^r(X)$ のかわりに $CH^r_{F_B}(X)$ (cf.(2-2)) で考えてみても）重要な情報を失わずに済む。つまり Mumford の定理 (cf. §1); $CH^r(X)$ は一般には幾何的構造が入らない程巨大であるという定理は、$CH^r_{F_B}(X)$ に拡張される。（しかも一般の余次元のサイクルに対して）

(3)（これは§4の応用編）古典的な $CH^r(X)$ の context でほとんど手のつかなかったいくつかの予想が $CH^r_{F_B}(X)$ の context では簡単に（ある時はほとんど自明に）解決される。

なおこれらの結果の証明については [Sa-1] と [Sa-2] を参照されたい。

*) よって特に Bloch-Beilinson が期待した filtration があるとすれば我々の $F_B^{\cdot}CH^*$ 以外にはない。

定義(3-1)　$\mathcal{C}$上のFBBT (cf (2-2))，$F_B^{\cdot}CH^*$を以下のように帰納的に定義する。

(1) $\forall X \in \mathcal{C}, \forall r$に対し　$F_B^0 CH^r(X)_{\mathbb{Q}} = CH^r(X)_{\mathbb{Q}}$

(2) $\nu \geq 0$を整数とし．$\forall V \in \mathcal{C}, \forall s \geq 0$に対し　$F_B^{\nu} CH^s(V)_{\mathbb{Q}}$が定義されたとする。この時

$$F_B^{\nu+1} CH^r(X)_{\mathbb{Q}} = \sum_{V, g, \Gamma} \mathrm{Im}(\Gamma_* : F_B^{\nu} CH^{r+d_V-g}(V)_{\mathbb{Q}} \to CH^r(X)_{\mathbb{Q}})$$

と定義する。ここにV, g, Γは以下の通り

(a) $V \in \mathcal{C}$ of dimension d_V

(b) g 整数，$r \leq g \leq r + d_V$

(c) $\Gamma \in CH^g(V \times X)_{\mathbb{Q}}$　で　$\varphi_{\Gamma}^{2r-\nu} = 0$　(cf (2-1) (BB2))

* Γ_*は (2-1) (BB1) の通りとする.

上の定義から$F_B^{\cdot}CH^*$がFBBTを与えている事はすぐわかる。§3始めの(i)に関する結果を述べよう，$X \in \mathcal{C}$に対し

$$[\Delta_X] = \sum_{i=1}^{2d} \pi_X^i, \quad \pi_X^i \in H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}) \otimes H^i(X, \mathbb{Q})$$

をdiagonal $\Delta_X \hookrightarrow X \times X$のコホモロジー類のKünneth分解とする

次の条件を考える

C(X)　各π_X^iはQ-algebraic，つまり$\exists \Delta_X^i \in CH^d(X \times X)_{\mathbb{Q}}$があって$\Delta_X^i$のコホモロジー類が$\pi_X^i$を与える。

$C(X)$ は一般に成立すると予想されている (cf [K1-1])。実際 $X\times X$ に対する Hodge 予想から従う。又次の場合には成立することは知られている。

(a) $\dim X\leq 2$

(b) X は $\mathbb{P}^N$ 内の complete intersection

(c) X は Abel 多様体

(d) X は linear variety

定理 (3-2) $C(X)$ が $\forall X\in\mathcal{C}$ に対し成立と仮定する。この時予想 (2-1) は次の予想 (3-3) と同値。又それらが正しいとすると $F_B^{\cdot}CH^*$ は (BB0)～(BB3) を満たすただひとつの Filtration.

予想 (3-3) D_{F_B}-equivalence = rational equivalence

ここに左辺は $D_{F_B}^r(X)=\bigcap_{\nu\geq 0}F_B^{\nu}CH^r(X)\quad(X\in\mathcal{C},\ r\geq 0)$

により定まる equivalence relation.

次に約束の(2)に関する結果を述べる。前に述べたように $F^{\nu}CH^r(X)_{\mathbb{Q}}$, $\nu\geq 2$ にはもはや一般には幾何的構造が入らないのであるから「次元」といった概念は通用しない。その替りに「rank」という概念を以下に導入してその"巨大さ"を測ることにする。後にも述べるがこれは (1-3) の自然な一般化になっている。

定義(3-4)

$X \in \mathcal{C}$, $\dim X = n$ に対し $A^r(X) \subset CH^r(X)$ を algebraic equivalent to zero なるサイクル類たちよりなる部分群とし 又 $A_m(X)=A^r(X)$ とかく。ただし $m+r=n=\dim X$。今任意の subspace $\Xi \subset CH^r(X)_{\mathbb{Q}}$ が与えられた時 "$A^r(X)$ の modulo Ξ の rank" と呼ばれる整数

$$0 \le r(A^r(X) \bmod \Xi) \le r$$

を以下に定義する。まず $r(A^r(X) \bmod \Xi)=0$ というのを

$$\dim_{\mathbb{Q}}(A^r(X)_{\mathbb{Q}}/A^r(X)_{\mathbb{Q}}\cap \Xi)<\infty$$

なる時と定義。そうでない場合 それを以下の条件を満たす最小の自然数 $\mu \ge 1$ として定義する。 (cf. $m+r=n=\dim X$)

(条件): (必ずしも連結でない) smooth projective Y で $\dim Y \le m+\mu$ なるものと morphism $f: Y \to X$ があって次が成立。

$$A^r(X)_{\mathbb{Q}} \subset \Xi + \mathrm{Im}(f_* : A_m(Y)_{\mathbb{Q}} \to A_m(X)_{\mathbb{Q}})。^{*)}$$

特に $\Xi=0$ の時簡単に $r(A^r(X) \bmod \Xi)=r(A^r(X))$ とかく。

定義より直ちに

$$r(A_0(X)) \le 1 \Leftrightarrow A_0(X) \text{ は有限次元 } (\text{cf } (1\text{-}3))$$

又 $\rho^r : A^r(X) \to J^r(X)$ を Griffiths の周期写像とした時

$$\mathrm{Ker}(\rho^r)_{\mathbb{Q}} \subset \Xi \Rightarrow r(A^r(X) \bmod \Xi) \le 1$$

一言でいえば $r(A^r(X) \bmod \Xi)$ は $CH^r(X)_{\mathbb{Q}}/\Xi$ 内で alg. equiv. to zero なるサイクル類で生成される subspace の大きさを測る量で、$CH^r(X)_{\mathbb{Q}}/\Xi$ が幾何学的になじみ深いものになっているなら、$r(A^r(X) \bmod \Xi) \le 1$ でなければならないわけである。

*) 感じをいうと $\underset{A_m(X)_{\mathbb{Q}}}{\overset{\shortparallel}{A^r(X)_{\mathbb{Q}}}}$ は modulo Ξ で次元 $\le m+\mu$ の部分多様体の中へ押し込める.

$X\in\mathcal{C}$ に対し $N^p_H H^i(X,\mathbb{Q})$ を $H^i(X,\mathbb{Q})\cap F^p_H H^i(X,\mathbb{C})$ 内の maximal sub-Hodge structure とする。ここに F^p_H は Hodge filtration。

<u>定理(3-5)</u> $W, X\in\mathcal{C}$　$\Gamma\in CH^r(W\times X)_{\mathbb{Q}}$ とし

$$\varphi^{2r-\nu}_{\Gamma}: H^{2d-\nu}(W,\mathbb{Q})\to H^{2r-\nu}(X,\mathbb{Q})$$

を Γ が代数対応として誘導する写像とする。ここに $d=\dim W$，ν は $r\geq\nu\geq 0$ なる整数。今

$$\mathrm{Im}(\varphi^{2r-\nu}_{\Gamma})\not\subset N^{r-\nu+1}_H H^{2r-\nu}(X,\mathbb{Q})$$

と仮定するなら

$$r(A^r(X)\bmod F^{\nu+1}_B CH^r(X)_{\mathbb{Q}})\geq\nu$$

(よって特に $r(A^r(X)\bmod D^r_{F_B}(X))\geq\nu$)

*)

(3-5) を使って $CH^r_{F_B}(X)=CH^r(X)_{\mathbb{Q}}/D^r_{F_B}(X)$ が"巨大"なるいくつかの例が構成できる。

(a) (zero-cycle の場合) $0\leq\nu\leq n=\dim X$ に対し

$$H^0(X,\Omega^\nu_X)\neq 0\Rightarrow r(A_0(X)\bmod D^n_{F_B}(X))\geq\nu$$

これは (3-5) で $W=X$，$\Gamma=\Delta_X$ diagonal とすることにより直ちに得られる。(a) は Mumford 定理の一般化であることに注意。実際彼の定理を言いかえると $\dim X=2$ の場合 (cf. (1-4))

$$H^0(X,\Omega^2_X)\neq 0\Rightarrow r(A_0(X))\geq 2\qquad\Box$$

---

*) (3-5) の証明については一切説明しないが使用する理論として
- Weak and Hard Lefschetz isomorphism
- Hodge 理論，特に Hodge-Riemann の bilinear relations

がある。

(b) X を $\mathbb{C}$ 上のAbel多様体とすると $0 \leq r \leq \dim X$ に対し

$$r(A^r(X) \bmod D^r_{F_B}(X)) = r$$

これはAbel多様体に対しては Liebermannによって示されている Hard Lefshetz 予想 (cf. [K1-1]) を使って (3-5) より導かれる

(c) $X \subset \mathbb{P}^N$ を complete intersection で $\dim X = n \geq 4$ とする。今

$$H^0(X, \Omega^n_X) = 0 \quad \text{かつ} \quad H^1(X, \Omega^{n-1}_X) \neq 0$$

と仮定すると

$$r(A^{n-1}(X) \bmod D^{n-1}_{F_B}(X)) \geq n-2$$

これは X 上にのっている $\mathbb{P}^N$ 内の line たちを moduli する Fano 多様体の理論を使い (3-5) より導かれる。

§4 応用編

さて§3の結果により代数的サイクルを modulo D_{F_B}-equivalence で考えてもかなり巨大な部分を持っていることがわかった。又もし Beilinson 予想が正しければそれは有理同値に等しくなることも見た。我々のアプローチの利点は一方代数的サイクルを modulo D_{F_B}-equiv で考えると今まで全く手の届かなかった種々の予想、問題が実際解けてしまうところにある。言いかえれば、今まで一見には関連性のなかった Chow 群に対するいくつかの予想が Beilinson 予想 (2-1) よりまとめて従うといってもよい。あるいはこれは予想 (2-1) 又はそれに同値な (3-3) を解くのはとても難しいだろうということを予言している

さてここではその応用のうち2つを特に述べる。以下の結果は特に $F_B^{\cdot}CH^*$ でなくとも一般のFBBT, $F^{\cdot}CH^*$ で次の条件(✱)をみたすものについて成立するのでそういう $F^{\cdot}CH^*$ をひとつ選んで話を進める。

(✱) D_F-equivalence は homological equivalence よりも細い.

まず最初に Chow群に対する Hard Lefschetz isomorphism と primitive decomposition について。今 $X \in \mathcal{C}$ に対しその上の ample line bundle $\mathcal{L}$ を固定し $l \in \mathrm{Pic}(X) \simeq CH^1(X)$ をその類とする。整数 $r, t \geq 0$ に対し次の写像を考える.

$$\Lambda_l^t : CH^r(X) \to CH^{r+t}(X) \ ; \quad \omega \mapsto \omega \cdot l^t \ .$$

$F^{\cdot}CH^*$ に対する性質 (BB1) により Λ_l^t は各 $\nu \geq 0$ に対し

$$Gr^\nu \Lambda_l^t : Gr_F^\nu CH^r(X)_{\mathbb{Q}} \to Gr_F^\nu CH^{r+t}(X)_{\mathbb{Q}}$$

を誘導する。今 $2r-\nu \leq d = \dim X$ の時

$$PGr_F^\nu CH^r(X)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Ker}(Gr_F^\nu \Lambda_l^{d+\nu-2r+1})$$

とおく.

<u>定理 (4-1)</u> $X \in \mathcal{C}$ of dimension d Hard Lefschetz 予想 B(X) が成立するとする。(B(X) については もう長くなるので説明しないが C(X) と同様 X×X に対する Hodge 予想より従い、又 C(X) が成立するとしてあげた例についても B(X) は成立することが知られている。実際 B(X) が C(X) を導くことも知られている (cf [Kl-1]).)

(1) $2r-\nu \leq d$ の時 $Gr_F^\nu \Lambda_\ell^{d-2r+\nu}$ は同型。

(2) $s = \max\{0, 2r-\nu-d\}$ と作時 自然な同型がある

$$Gr_F^\nu CH^r(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \bigoplus_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \geq s/2}} (Gr_F^\nu \Lambda_\ell^k)(PGr_F^\nu CH^{r-k}(X)_{\mathbb{Q}}) \text{。}$$

$X \in \mathcal{C}$ が与えられた時 X 上の異なる余次元の Chow 群の subquotient 同士に同型があるというのは Bloch [Bl-2] によって既に予想されていた。

次に line bundle についてはよく知られている Theorem of cube を一般の余次元の $\underbrace{\text{Chow 群に}}_{\text{modulo } D_F\text{-equiv}}$ 拡張してみよう。（これも$\underbrace{\text{予想}}_{\text{Chow 群については}}$は以前よりされていた）

<u>定理</u>(4-2) $1 \leq \nu \leq n$ に対し $X_\nu \in \mathcal{C}$, $x_\nu \in X_\nu$ を固定した基点とする。今 $C(X_\nu)$ が成立するとする。(例えば X_ν abel 多様体)

$$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$$
$$Z_\nu = X_1 \times \cdots \times \{x_\nu\} \times \cdots \times X_n$$

とし $\iota_\nu : Z_\nu \hookrightarrow X$ を inclusion とする。今 $2r-s < n$ なら

$$\{\iota_\nu^*\}_{1 \leq \nu \leq n} : Gr_F^s CH^r(X)_{\mathbb{Q}} \to \bigoplus_{\nu=1}^n Gr^s CH^r(Z_\nu)_{\mathbb{Q}} \quad \text{(cf. (2-2))}$$

は単射。特に $2r < n$ なら

$$\{\iota_\nu^*\}_{1 \leq \nu \leq n} : CH_F^r(X)_{\mathbb{Q}} \to \widehat{\bigoplus_{\nu=1}^n} CH_F^r(Z_\nu)_{\mathbb{Q}} \quad \text{(cf. (2-2))}$$

は単射。つまり X 上の代数的サイクル $\alpha \in CH^r(X)_{\mathbb{Q}}$ はその Z_ν への制限 $\alpha|_{Z_\nu} \in CH^r(Z_\nu)_{\mathbb{Q}}$ が各 ν について D_F-equivalent to zero の時、又その時に限り、α は D_F-equivalent to zero. $\square$

$r=1$ の場合 $\mathcal{D}^1_{F_B}(X)=0$ が示せるので (4-2) のこの特別な場合は古典的な line bundle に対する theorem of cube に当たる (cf. [Mum-1, §6])。

REFERENCES

[Bl-1] S. Bloch, "Lectures on Algebraic Cycles," Duke Univ. Math. Series, Durham, 1980.

[Bl-2] S. Bloch, *Some elementary theorems about algebraic cycles on abelian varieties*, Invent. Math. **37** (1976), 215–228.

[DMOS] P. Deligne, J. Milne, A. Ogus, K. Shih, *Hodge cycles, motives and Shimura varieties*, Lecture Notes in Math. **900** (1982).

[Gri] P. Griffiths, *On the periods of certain rational integrals: I and II*, Ann. of Math. **90** (1969).

[Kl-1] S.L. Kleiman, *Algebraic cycles and the Weil conjectures*, Dix Exposes sur La Cohomologie des Schemas (1968), North-Holland.

[Kl-2] S.L. Kleiman, *Motives*, In: Algebraic Geometry, Oslo 1970, Wolters-Noordhoff, Groningen.

[Mum-1] D. Mumford, "Abelian Varieties," Tata Institute Studies in Math., Oxford Univ. Press, 1970/1974/1985.

[Mum-2] D. Mumford, *Rational equivalence of 0-cycles on surfaces*, J. Math. Kyoto Univ. **9** (1969), 195–204.

[Sa-1] S. Saito, *Motives and filtrations on Chow groups*, Preprint (revised).

[Sa-2] S. Saito, *Remarks on algebraic cycles*, Preprint.