代数幾何学シンポジウム記録
1992年度 pp.98-107

logarithmic Hodge-Witt sheaf に対する Gersten 予想について

諏訪紀幸（東京電機大学工学部）

1．動機と主要な結果

1.1． k を体，X を連結な有限型 k-scheme，$N=\dim X$，また，X_{et} を X の étale site，X_{zar} を X の Zariski site，$\varepsilon: X_{et}\to X_{zar}$ を自然な site の morphism とする。X の codimension d の点の全体を $X^{(d)}$ で表わす。

l を k の標数とは異なる素数，$\mathcal{H}^j(\mathbb{Z}/l^n(r)) = R^j\varepsilon_*\mathbb{Z}/l^n(r)$ とする。X が k の上に smooth なら，$R\Gamma(X_{zar}, \mathcal{H}^j(\mathbb{Z}/l^n(r)))$ は Cousin complex

$$(1)\quad \bigoplus_{x\in X^{(0)}} H^d_x(X,\mathbb{Z}/l^n(r)) \to \bigoplus_{x\in X^{(1)}} H^{d+1}_x(X,\mathbb{Z}/l^n(r)) \to \cdots \to \bigoplus_{x\in X^{(d-1)}} H^{2d-1}_x(X,\mathbb{Z}/l^n(r)) \to \bigoplus_{x\in X^{(d)}} H^{2d}_x(X,\mathbb{Z}/l^n(r))$$

によって代表される(Bloch-Ogus[2])．したがって，Leray の spectral sequence

$$E_2^{ij} = H^i(X_{zar}, \mathcal{H}^j(\mathbb{Z}/l^n(r))) \Rightarrow H^{i+j}(X_{et}, \mathbb{Z}/l^n(r))$$

によって定義される $H^{\cdot}(X_{et},\mathbb{Z}/l^n(r))$ の filtration は coniveau filtration に他ならない。

étale cohomology の purity theorem から，Cousin complex (1)は Gersten complex

$$BO(d,r):\ \bigoplus_{x\in X^{(0)}} H^d(k(x),\mathbb{Z}/l^n(r)) \to \bigoplus_{x\in X^{(1)}} H^{d-1}(k(x),\mathbb{Z}/l^n(r-1)) \to \cdots \to \bigoplus_{x\in X^{(d-1)}} H^1(k(x),\mathbb{Z}/l^n(r-d+1)) \to \bigoplus_{x\in X^{(d)}} H^0(k(x),\mathbb{Z}/l^n(r-d))$$

に同型であるが，$d=r$，$(d,r)=(N+1,N)$ の場合が特に興味深い。

I) $d=r$

$$BO(d):\ \bigoplus_{x\in X^{(0)}} H^d(k(x),\mathbb{Z}/l^n(d)) \to \bigoplus_{x\in X^{(1)}} H^{d-1}(k(x),\mathbb{Z}/l^n(d-1)) \to \cdots \to \bigoplus_{x\in X^{(d-2)}} H^2(k(x),\mathbb{Z}/l^n(2)) \to \bigoplus_{x\in X^{(d-1)}} H^1(k(x),\mathbb{Z}/l^n(1)) \to \bigoplus_{x\in X^{(d)}} H^0(k(x),\mathbb{Z}/l^n)$$

は代数的K理論の Gersten-Quillen complex

$$GQ(d):\ \bigoplus_{x\in X^{(0)}} K_d(k(x)) \to \bigoplus_{x\in X^{(1)}} K_{d-1}(k(x)) \to \cdots \to \bigoplus_{x\in X^{(2)}} K_2(k(x)) \to \bigoplus_{x\in X^{(1)}} K_1(k(x)) \to \bigoplus_{x\in X^{(d)}} K_0(k(x))$$

と関係が付けられ，algebraic cycle の研究に有用である．実際，Galois symbol によって complex の準同型

$$\begin{array}{llllll}
\mathrm{GQ}(d)^{\geq d-3}: & \bigoplus_{x\in X^{(d-2)}} K_2(k(x)) & \to & \bigoplus_{x\in X^{(d-1)}} K_1(k(x)) & \to & \bigoplus_{x\in X^{(d)}} K_0(k(x)) \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{BO}(d)^{\geq d-3}: & \bigoplus_{x\in X^{(d-2)}} H^2(k(x),Z/l^n(2)) & \to & \bigoplus_{x\in X^{(d-1)}} H^1(k(x),Z/l^n(1)) & \to & \bigoplus_{x\in X^{(d)}} H^0(k(x),Z/l^n)
\end{array}$$

が定義される．さらに，Galois symbol は同型

$H^2(k(x),Z/l^n(2)) \xleftarrow{\sim} K_2(k(x))/l^n$ (Mercurjev-Suslin の定理)，

$H^1(k(x),Z/l^n(1)) \xleftarrow{\sim} k(x)^\times/l^n = K_1(k(x))/l^n$ (Hilbert の定理９０)，

$H^0(k(x),Z/l^n) \xleftarrow{\sim} Z/l^n = K_0(k(x))/l^n$

を誘導する．また，

$$\bigoplus_{x\in X^{(d)}} K_0(k(x)) = \bigoplus_{x\in X^{(d)}} Z$$

は X の codimension d の algebraic cycle の群に，また，

$$H^d(X,\mathcal{K}_d) = \mathrm{Coker}[\bigoplus_{x\in X^{(1)}} K_1(k(x)) \to \bigoplus_{x\in X^{(d)}} K_0(k(x))] = \mathrm{Coker}[\bigoplus_{x\in X^{(1)}} k(x)^\times \to \bigoplus_{x\in X^{(d)}} Z]$$

は X の codimension d の algebraic cycle の Chow 群に他ならない．これから，符号を除いて可換な図式

$$\begin{array}{ccc}
H^{d-1}(X_{zar},\mathcal{H}^d(Z/l^n(d))) & \xrightarrow{\gamma} & {}_{l^n}CH^d(X) \\
\downarrow \alpha & & \downarrow \rho \\
H^{2d-1}(X_{et},Z/l^n(d)) & \xrightarrow{\beta} & H^{2d}(X_{et},Z/l^m(d))
\end{array}$$

を得る([5])．ここで，

$$\alpha: H^{d-1}(X_{zar},\mathcal{H}^d(Z/l^n(d))) \to H^{2d-1}(X_{et},Z/l^n(d))$$

は Leray の spectral sequence

$$E_2^{i,j} = H^i(X_{zar},\mathcal{H}^j(Z/l^n(r))) \Rightarrow H^{i+j}(X_{et},Z/l^n(r))$$

によって定義される準同型，

$$\beta: H^{2d-1}(X_{et},Z/l^n(d)) \to H^{2d}(X_{et},Z/l^m(d))$$

は Bockstein operator，

$$\gamma: H^{d-1}(X_{zar},\mathcal{H}^d(Z/l^n(d))) \to {}_{l^n}CH^d(X)$$

は complex の準同型 $\mathrm{GQ}(d)^{\geq d-3} \to \mathrm{BO}(d)^{\geq d-3}$ によって定義される準同型，

$$\rho: {}_{l^n}CH^d(X) \to H^{2d}(X_{et},Z/l^m(d))$$

は cycle map.

さらに，k が algebraically closed で，X が k の上に smooth proper のとき，l-adic Abel-Jacobi map $\lambda^d : \mathrm{CH}^d(X)_{l\text{-tors}} \to \mathrm{H}^{2d-1}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)$ を構成することが出来る(Bloch[1])．

II) $(d,r) = (N+1, N)$

$$\mathrm{BO}(N+1,N): \bigoplus_{x\in X^{(0)}} \mathrm{H}^{N+1}(k(x), \mathbb{Z}/l^n(N)) \to \bigoplus_{x\in X^{(1)}} \mathrm{H}^{N}(k(x), \mathbb{Z}/l^n(N-1)) \to \cdots$$
$$\to \bigoplus_{x\in X^{(N-2)}} \mathrm{H}^{3}(k(x), \mathbb{Z}/l^n(2)) \to \bigoplus_{x\in X^{(N-1)}} \mathrm{H}^{2}(k(x), \mathbb{Z}/l^n(1)) \to \bigoplus_{x\in X^{(N)}} \mathrm{H}^{1}(k(x), \mathbb{Z}/l^n)$$

は有限体の上の函数体の類体論であらわれる reciprocity sequence を与える．まず，一般に自然な同型

$$\mathrm{H}^2(k(x), \mathbb{Z}/l^n(1)) \xrightarrow{\sim} {}_{l^n}\mathrm{Br}(k(x)),$$
$$\mathrm{H}^1(k(x), \mathbb{Z}/l^n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(k(\bar{x})/k(x)), \mathbb{Z}/l^n)$$

が存在することに注意する．さらに，k が有限体で X が k の上に smooth proper なら，

$$\mathrm{H}^N(X_{\mathrm{zar}}, \mathcal{H}^{N+1}(\mathbb{Z}/l^n(N))) = \mathrm{H}^{2N+1}(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{Z}/l^n(N)) = \mathbb{Z}/l^n .$$

したがって，$\mathrm{BO}(N+1,N)$ に $\mathrm{Coker}[\bigoplus_{x\in X^{(N-1)}} \mathrm{H}^2(k(x), \mathbb{Z}/l^n(1)) \to \bigoplus_{x\in X^{(N)}} \mathrm{H}^1(k(x), \mathbb{Z}/l^n)]$ $= \mathrm{Coker}[\bigoplus_{x\in X^{(N-1)}} {}_{l^n}\mathrm{Br}(X) \to \bigoplus_{x\in X^{(N)}} \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(k(\bar{x})/k(x), \mathbb{Z}/l^n)] = \mathbb{Z}/l^n$ を付け加えて reciprocity sequence

$$\cdots \to \bigoplus_{x\in X^{(N-3)}} \mathrm{H}^4(k(x), \mathbb{Z}/l^n(3)) \to \bigoplus_{x\in X^{(N-2)}} \mathrm{H}^3(k(x), \mathbb{Z}/l^n(2)) \to$$
$$\bigoplus_{x\in X^{(N-1)}} {}_{l^n}\mathrm{Br}(X) \to \bigoplus_{x\in X^{(N)}} \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(k(\bar{x})/k(x), \mathbb{Z}/l^n) \to \mathbb{Z}/l^n \to 0$$

を得る．reciprocity sequence は exact であると予想されている(加藤[10])．例えば，$\dim X = 1$ のときは，reciprocity sequence

$$0 \to {}_{l^n}\mathrm{Br}(k(X)) \to \bigoplus_{x\in X^{(1)}} \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(k(\bar{x})/k(x)), \mathbb{Z}/l^n) \to \mathbb{Z}/l^n \to 0$$

は Witt の reciprocity exact sequence

$$0 \to \mathrm{Br}(k(X)) \to \bigoplus_{x\in X^{(1)}} \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(k(\bar{x})/k(x)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

の l-torsion part に他ならない．

1.2.　k の標数が $p>0$ のとき，p-part を記述するものが必要であるが，k が完全で X が k の上に smooth であるとき，logarithmic Hodge-Witt sheaf 係数の cohomology $H^{\cdot}(X_{et}, W_n\Omega^r_{X,\log})$ がその役を果たす．ここで，$W_n\Omega^r_{X,\log}$ は対数微分形式で生成される Hodge-Witt sheaf $W_n\Omega^r_X$ の abelian subsheaf (Illusie[9], Ch.I)．l-adic étale cohomology との類似から

$$H^j(X, Z/p^n(r)) = H^{j-r}(X, W_n\Omega^r_{X,\log}),$$
$$\mathcal{H}^j(Z/p^n(r)) = R^{j-r}\varepsilon_* W_n\Omega^r_{X,\log}$$

と書くことにする．このとき，$R\Gamma(X_{zar}, \mathcal{H}^j(Z/p^n(r))) = R\Gamma(X_{zar}, R^{j-r}\varepsilon_* W_n\Omega^r_{X,\log})$ は Cousin complex

$$(2)\qquad \bigoplus_{x\in X^{(0)}} H^d_x(X, Z/p^n(r)) \to \bigoplus_{x\in X^{(1)}} H^{d+1}_x(X, Z/p^n(r)) \to \cdots$$
$$\to \bigoplus_{x\in X^{(d-1)}} H^{2d-1}_x(X, Z/p^n(r)) \to \bigoplus_{x\in X^{(d)}} H^{2d}_x(X, Z/p^n(r))$$

によって代表される([8])．$d=r$ のとき，logarithmic Hodge-Witt sheaf に対する purity theorem (Gros[6])から，Cousin complex (2) は Gersten complex

$$C(d):\ \bigoplus_{x\in X^{(0)}} H^d(k(x), Z/p^n(d)) \to \bigoplus_{x\in X^{(1)}} H^{d-1}(k(x), Z/p^n(d-1)) \to \cdots$$
$$\to \bigoplus_{x\in X^{(d-2)}} H^2(k(x), Z/p^n(2)) \to \bigoplus_{x\in X^{(d-1)}} H^1(k(x), Z/p^n(1)) \to \bigoplus_{x\in X^{(d)}} H^0(k(x), Z/p^n)$$

に同型．さらに，対数微分形式によって complex の準同型

$$\begin{array}{lccccc}
GQ(d)^{\geq d-3}: & \bigoplus_{x\in X^{(2)}} K_2(k(x)) & \to & \bigoplus_{x\in X^{(1)}} K_1(k(x)) & \to & \bigoplus_{x\in X^{(d)}} K_0(k(x)) \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
C(d)^{\geq d-3}: & \bigoplus_{x\in X^{(d-2)}} H^2(k(x), Z/p^n(2)) & \to & \bigoplus_{x\in X^{(d-1)}} H^1(k(x), Z/p^n(1)) & \to & \bigoplus_{x\in X^{(d)}} H^0(k(x), Z/p^n)
\end{array}$$

が定義され，自然な同型

$$H^2(k(x), Z/p^n(2)) \xleftarrow{\sim} K_2(k(x))/p^n \quad \text{(Bloch-加藤-Gabber の定理)},$$
$$H^1(k(x), Z/p^n(1)) \xleftarrow{\sim} k(x)^{\times}/p^n = K_1(k(x))/p^n \quad \text{(Hilbert の定理90)},$$
$$H^0(k(x), Z/p^n) \xleftarrow{\sim} Z/p^n = K_0(k(x))/p^n$$

が誘導される．したがって，l-adic étale cohomology の場合と同じように，符号を除いて可換な図式

$$
\begin{array}{ccc}
H^{d-1}(X_{\mathrm{zar}}, \mathcal{H}^d(\mathbf{Z}/p^n(d))) & \xrightarrow{\gamma} & {}_{p^n}\mathrm{CH}^d(X) \\
\downarrow \alpha & & \downarrow \rho \\
H^{2d-1}(X, \mathbf{Z}/p^n(d)) & \xrightarrow{\beta} & H^{2d}(X, \mathbf{Z}/p^m(d))
\end{array}
$$

を得る．ここで，

$$\alpha : H^{d-1}(X, \mathcal{H}^d(\mathbf{Z}/p^n(d))) \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Z}/p^n(d))$$

は Leray の spectral sequence

$$E_2^{i,j} = H^i(X_{\mathrm{zar}}, \mathcal{H}^j(\mathbf{Z}/p^n(r))) \Rightarrow H^{i+j}(X, \mathbf{Z}/p^n(r))$$

によって定義される準同型，

$$\beta : H^{2d-1}(X, \mathbf{Z}/p^n(d)) \to H^{2d}(X, \mathbf{Z}/p^m(d))$$

は Bockstein operator，

$$\gamma : H^{d-1}(X, \mathcal{H}^d(\mathbf{Z}/p^n(d))) \to {}_{p^n}\mathrm{CH}^d(X)$$

は complex の準同型 $\mathrm{CQ}(d)^{\geq d-3} \to \mathrm{C}(d)^{\geq d-3}$ によって定義される準同型，

$$\rho : {}_{p^n}\mathrm{CH}^d(X) \to H^{2d}(X, \mathbf{Z}/p^m(d))$$

は cycle map.

さらに，k が algebraically closed で，X が k の上に smooth projective のとき，p-adic Abel-Jacobi map $\lambda^d : \mathrm{CH}^d(X)_{p\text{-tors}} \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$ を構成することが出来る（[7]）.

しかし，$d = r+1$ のときは，$\mathrm{BO}(r+1, r)$ に類似の Gersten complex $\mathrm{C}(r+1, r)$ は構成できるが，一般に Cousin complex (2) と同型ではない．これは logarithmic Hodge-Witt sheaf に対する purity theorem の不完全さ，あるいは，標数 $p>0$ の体の上の代数多様体の p-part の晦渋さに由来する．

註 1.3. purity theorem の比較

X を有限型 k-scheme，Y を X の closed subscheme とする．X，Y が k の上に smooth で $\mathrm{codim}(Y, X) = d$ なら，

$$\underline{H}^j_Y(\mathbf{Z}/l^n(r)) \simeq \begin{cases} (\mathbf{Z}/l^n(r-d))_Y & (j = 2d) \\ 0 & (j \neq 2d) \end{cases}.$$

一方，

$$\underline{\mathrm{H}}^j_Y(W_n\Omega^r_{X,\log}) \simeq \begin{cases} W_n\Omega^{r-d}_{Y,\log} & (j=d) \\ 0 & (j \neq d,\ d+1) \end{cases}.$$

ところが，$r=N$ ($=\dim X$) の場合，logarithmic Hodge-Witt sheaf に対しても完全な purity theorem が成立する.

定理 1.4. k を標数 $p>0$ の完全体，X を有限型 k-scheme，Y を X の closed subscheme，$N=\dim X$ とする. X，Y が k の上に smooth で $\mathrm{codim}(Y,X)=d$ なら，$\underline{\mathrm{H}}^{d+1}_Y(W_n\Omega^N_{X,\log})=0$.

これから，$R\Gamma(X_{\mathrm{zar}}, \mathcal{H}^{N+1}(Z/p^n(N)))$ は Gersten complex

$$C(N+1,N):\ \bigoplus_{x\in X^{(0)}} \mathrm{H}^{N+1}(k(x), Z/l^n(N)) \to \bigoplus_{x\in X^{(1)}} \mathrm{H}^N(k(x), Z/l^n(N-1)) \to \cdots$$
$$\to \bigoplus_{x\in X^{(N-2)}} \mathrm{H}^3(k(x), Z/p^n(2)) \to \bigoplus_{x\in X^{(N-1)}} \mathrm{H}^2(k(x), Z/p^n(1)) \to \bigoplus_{x\in X^{(N)}} \mathrm{H}^1(k(x), Z/p^n)$$

で代表されることが従う.

Colliot-Thélène は，k が有限体で X が k の上に smooth proper なら，$\mathrm{H}^{N-1}(X,\mathcal{K}_N)\otimes_Z Q/Z=0$ となることを示し，それから $\mathrm{BO}(N+1,N)$ を用いて，$\dim X\leq 3$ なら reciprocity sequence

$$0\to \bigoplus_{x\in X^{(N-3)}} \mathrm{H}^4(k(x), Z/l^n(3)) \to \bigoplus_{x\in X^{(N-2)}} \mathrm{H}^3(k(x), Z/l^n(2)) \to$$
$$\bigoplus_{x\in X^{(N-1)}} {}_{l^n}\mathrm{Br}(k(x)) \to \bigoplus_{x\in X^{(N)}} \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(k(\bar{x})/k(x)), Z/l^n) \to Z/l^n \to 0$$

が exact であることを導いた([4]). $C(N+1,N)$ を用いれば，同様に $\dim X\leq 3$ なら reciprocity sequence

$$0\to \bigoplus_{x\in X^{(N-3)}} \mathrm{H}^4(k(x), Z/p^n(3)) \to \bigoplus_{x\in X^{(N-2)}} \mathrm{H}^3(k(x), Z/p^n(2)) \to$$
$$\bigoplus_{x\in X^{(N-1)}} {}_{p^n}\mathrm{Br}(k(x)) \to \bigoplus_{x\in X^{(N)}} \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(k(\bar{x})/k(x)), Z/p^n) \to Z/p^n \to 0$$

が exact であることが従う([13]).

2．定理の証明の概略

定理の証明には次の命題が本質的である．

命題 2.1. k を標数 $p>0$ の algebraically closed field, X を smooth affine k-scheme, $N=\dim X$ とする．このとき，j > 0 に対して

$$\mathrm{H}^{j+N}(X, \mathbb{Z}/p^n(N)) = \mathrm{H}^j(X_{\mathrm{et}}, W_n\Omega^N_{X,\log}) = 0 \ .$$

X_{et}の上の abelian sheaf の exact sequence

$$0 \to \Omega^N_{X,\log} \to \Omega^N_X \overset{C-1}{\to} \Omega^N_X \to 0 \qquad (C \text{ は } \Omega^N_X \text{ の上の Cartier operator})$$

を用いて次の補題に帰着される．

補題 2.2. k を標数 $p>0$ の algebraically closed field, X を有限型 smooth k-scheme, $N=\dim X$ とする．このとき，$C-1$ は $\Gamma(X, \Omega^N_X)$ の上で全射．

次の事実に注意して補題は示される．

(1) k を標数 $p>0$ の体，X を 有限型 normal k-scheme，また，$\omega \in \Gamma(X, Z_\infty\Omega^r_X)$ とする．このとき，$C^k\omega$ $(k\geq 0)$ によって生成される $\Gamma(X, \Omega^r_X)$ の部分空間は k の上に有限次元；

(2) k を標数 $p>0$ の algebraically closed field, E を k の上の 有限次元線形空間，φ を E の p^{-1}-linear endomorphism とする．このとき，$\varphi-1$ は E の上で全射．

2.3. 定理の証明は，局所性から k が algebraically closed, X が affine と仮定してよい．$d=\mathrm{codim}(Y,X)$ に関する帰納法による．

$d=1$ のとき，X を充分小さく取り直すことによって，$X-Y$ が affine と仮定してよい．local cohomology の exact sequence

$$\ldots \to \mathrm{H}^j_Y(X, W_n\Omega^N_{X,\log}) \to \mathrm{H}^j(X, W_n\Omega^N_{X,\log}) \to \mathrm{H}^j(X-Y, W_n\Omega^N_{X,\log}) \to \ldots$$

を考えて，命題2.1 から

$$\mathrm{H}^j_Y(X, W_n\Omega^N_{X,\log}) = 0 \qquad (j \neq 1).$$

を得る．$d>1$ のときは，同型 $\mathrm{H}^d_Y(W_n\Omega^N_{X,\log}) \xrightarrow{\sim} W_n\Omega^{N-d}_{Y,\log}$ を用いて帰納法を進める．

3. 補遺

命題2.1 から他の興味深い結論が導き出される。

定理 3.1. k を標数 $p>0$ の algebraically closed field, X を有限型 separated smooth k-scheme, $N=\dim X$ とする。このとき，$\mathrm{H}^{j+N}(X,Z/p^n(N))=\mathrm{H}^j(X_{et},W_n\Omega^N_{X,\log})$ は有限群。

実際，命題2.1 から，$\mathrm{H}^j(X_{et},W_n\Omega^N_{X,\log})$ は X の有限 affine 開被覆 $\mathcal{U}$ に対する Čech cohomology $\check{\mathrm{H}}^j(\mathcal{U},W_n\Omega^N_{X,\log})=\mathrm{H}^j(C^{\cdot}(\mathcal{U},W_n\Omega^N_{X,\log}))$ に同型。ここで，Čech complex $C^{\cdot}(\mathcal{U},W_n\Omega^N_{X,\log})$ の各成分は有限群。

系 3.2. k を標数 p の有限体，X を有限型 separated smooth k-scheme, $N=\dim X$ とする。このとき，$\mathrm{H}^{j+N}(X,Z/p^n(N))=\mathrm{H}^j(X_{et},W_n\Omega^N_{X,\log})$ は有限群。

実際，Hochschild-Serre の spectral sequence

$$E_2^{ij}=\mathrm{H}^i(\bar{k}/k,\mathrm{H}^j(X_{\bar{k}},Z/p^n(r)))\Rightarrow \mathrm{H}^{i+j}(X,Z/p^n(r))$$

を考えて，有限体の Galois cohomology に対する有限性定理から結論を得る。

系 3.3. k を algebraically closed field, X を有限型 separated smooth k-scheme とする。このとき，

(1) ${}_{p^n}\mathrm{CH}_0(X)$ は有限群；

(2) X が affine, $\dim X\geq 2$ なら，$\mathrm{CH}_0(X)$ は p-torsion-free。

実際，命題2.1 から，$j>0$ に対して，

$$\mathcal{H}^{j+N}(Z/p^n(N))=R^j\varepsilon_*W_n\Omega^N_{X,\log}=0\ .$$

したがって，符号を除いて可換な図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^{N-1}(X_{zar},\mathcal{H}^N(Z/p^n(N))) & \xrightarrow{\gamma} & {}_{p^n}\mathrm{CH}^0(X) \\ \downarrow\alpha & & \downarrow\rho \\ \mathrm{H}^{2N-1}(X,Z/p^n(N)) & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{H}^N(X,Z/p^m(N)) \end{array}$$

において，α は双射。また，一般に γ は全射。定理3.1 から $\mathrm{H}^{2N-1}(X,Z/p^n(d))$ は有限群。これから，${}_{p^n}\mathrm{CH}_0(X)$ が有限群であることが従う。

さらに，X が affine で $N=\dim X\geq 2$ なら，命題2.1 から $\mathrm{H}^{2N-1}(X,Z/p^n(d))=$

0．したがって，$_{p^n}\mathrm{CH}_0(X)=0$．

註 3.4．k を標数 $p>0$ の algebraically closed field，X を有限型 separated smooth k-scheme，$N=\dim X$ とする．このとき，

(1) $\mathrm{H}^0(X_{et}, W_n\Omega^r_{X,\log})$ は有限群．

(2) $\mathrm{H}^j(X_{et}, W_n\Omega^N_{X,\log})$ は有限群．

さらに，

(3) X が X の上に proper のとき，$\mathrm{H}^j(X_{et}, Z/p^n)=\mathrm{H}^j(X_{et}, W_n\Omega^0_{X,\log})$ は有限群．

しかし，X が k の上に proper であっても，$j>0$，$0<r<N$ なら，$\mathrm{H}^j(X_{et}, W_n\Omega^r_{X,\log})$ は有限群であるとは限らない．

以上の詳細は[13]を参照されたい．また，Gersten complex の algebraic cycle への応用については論説[12]，[14]，[11]，[3]がみやすい．

References

[1] S. Bloch - Torsion algebraic cycles and a theorem of Roitman. Comp. Math. 39 (1979)

[2] S. Bloch, A. Ogus - Gersten's conjecture and the homology of schemes. Ann. Scient. de l'Ec. Norm. Sup. 4e série 7 (1974)

[3] J-L. Colliot-Thélène - Cycles algébriques de torsion et K-théorie algébrique. Cours au C.I.M.E., juin 1991. Preprint

[4] J-L. Colliot-Thélène - On the reciprocity sequence in higher class field theory of function fields. Preprint

[5] J.-L. Colliot-Thélène, J-J. Sansuc, C. Soulé - Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux. Duke Math. J. 50 (1983)

[6] M. Gros - Classes de Chern et classes de cycles en

cohomologie logarithmique. Bull. Soc. Math. France 113 (1985)

[7] M. Gros, N. Suwa - Application d'Abel-Jacobi p-adique et cycles algébrique. Duke Math. J. 57 (1988)

[8] M. Gros, N. Suwa - La conjecture de Gersten pour les faisceaux de Hodge-Witt logarithmique. Duke Math. J. 57 (1988)

[9] L. Illusie - Comlexes de de Rham-Witt et cohomologie cristalline. Ann. Scient. de l'Ec. Norm. Sup. 4e série 12 (1979)

[10] K. Kato - A Hasse principle for two dimensional global fields. J. für die Reine und Ang, Math. 366 (1886)

[11] W. Raskind - Algebraic K-theory, étale cohomology and torsion algebraic cycles. Contemp. Math. 83 (1989)

[12] 清水勇二 - S. Bloch <Lecture on algebraic cycles> からの紹介. 第5回代数セミナー報告集Ⅰ, 城崎 (1982)

[13] N. Suwa - A note on Gersten's conjecture for logarithmic Hodge-Witt sheaves. Prépublication de l'Université de Paris-Sud (1992)

[14] 諏訪紀幸 - l-adic and p-adic Abel-Jacobi maps. Arithmetic Algebraic Geometry シンポジウム, 東京大学 (1987)