代数幾何学シンポジウム記録
1992年度　pp.63-71

ℓ進コホモロジーの行列式表現とJacobi和、de Rham判別式

東大数理　斎藤 毅（Takeshi SAITO）

Uを体k上のsmooth schemeとする。$\mathcal{F}$をU上のsmoothなℓ進層($\ell \neq \mathrm{ch}\, k$)とするとℓ進コホモロジー$H^q_c(U_{\bar{k}}, \mathcal{F})$が定義される。これは$k$の絶対Galois群$G_k = \mathrm{Gal}(k^{sep}/k)$の有限次ℓ進表現となる。ここではその行列式表現、

$$\det R\Gamma_c(U_{\bar{k}}, \mathcal{F}) = \bigotimes_q \left(\wedge^{\dim} H^q_c(U_{\bar{k}}, \mathcal{F})\right)^{\otimes(-1)^q}$$

をG_kの1次元ℓ進表現として決定する。

1° 定数係数の場合。(de Rham判別式)

特異点解消を仮定すれば次元に関する帰納法によりproperな場合に帰着されるのではじめから、$X=U$がproperかつsmoothと仮定する。この場合Poincaré双対性から次が直ちに従う。

補題. nをXの次元 $\chi = \sum_i (-1)^i \dim H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$をEuler数とすると

$$\det R\Gamma(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)^{\otimes 2} \simeq \mathbb{Q}_\ell(-n\chi)$$

であり．さらに n 奇数なら χ は偶数で

$$\det R\Gamma(X_{\bar K}, \mathbb{Q}_\ell) \simeq \mathbb{Q}_\ell\left(-\frac{n\chi}{2}\right).$$

ここで $\mathbb{Q}_\ell(m) = (\varprojlim \mu_{\ell^n} \otimes \mathbb{Q}_\ell)^{\otimes m}$.

したがって偶数次元のときに位数が(高々)2の G_K の指標

$$\kappa = \det R\Gamma(X_{\bar K}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes \mathbb{Q}_\ell\left(\frac{n\chi}{2}\right)$$

を求めればよい．$H^q_{dR}(X/K) = \mathbb{H}^q(X, \Omega^\cdot_{X/K})$ を X の deRham コホモロジーとする．

定理1．X がさらに射影的，char $K \neq 2$ とすると，κ は K の(高々)2次拡大 $K\left(\sqrt{(-1)^{\frac{n\chi}{2}+b_-}\delta}\right)$ と対応する G_K の指標である．

ここで $b_- \equiv \sum_{q<n} \dim H^q_{dR}(X/K)$ mod 2．$\delta \in K^\times/(K^\times)^2$ はカップ積 $\cup : H^n_{dR}(X/K) \times H^n_{dR}(X/K) \to K$ の非退化対称双一次形式としての判別式である

例1．$n=0$ のとき　L を K の有限(分離)次拡大とし $X = \mathrm{Spec}\, L$ とすると $\kappa = \det \mathrm{Ind}_{G_L}^{G_K} 1$．一方 $(-1)^{\frac{n\chi}{2}+b_-}\delta = \delta$ は L の判別式 $d_{L/K}$

例2．X が $\mathbb{P}^3$ 内の2次曲面 $ax^2+by^2+cz^2+dw^2=0$　$abcd \neq 0$ のとき κ は $K(\sqrt{abcd})$ と対応する．

注　k が有限体で Tate 予想を仮定し、k' を k の2次拡大.

$C(X_{k^{(\prime)}}) = CH^{\frac{n}{2}}(X_{k^{(\prime)}})$/hom. equiv. とすると

$$\kappa = 1 \Leftrightarrow \mathrm{rk}\, C(X_k) \equiv \mathrm{rk}\, C(X_{k'}) \mod 2.$$

2° 一般の場合　(Jacobi 和)

定数層の場合は既にわかったものとして比

$$\det R\Gamma_c(U_{\bar k}, \mathcal{F})^{\otimes -1} \otimes \det R\Gamma_c(U_{\bar k}, \mathbb{Q}_\ell)^{\otimes \mathrm{rk}\, \mathcal{F}}$$

を考える. 次の仮定1〜3のもとで考える.

1) smooth compact化. U は proper smooth な X から単純正規交叉因子 D をぬいたものとする. D が単純正規交叉とは. 各既約成分 D_i が smooth でかつそれらが横断的に交わることである（k が完全でないときは交わりも smooth を仮定する）

2) tame な分岐. ℓ進層 $\mathcal{F}$ の D にそっての分岐は tame。I_i を各 D_i での惰性群. すなわち K_i を X の関数体の D_i で定まる付値による完備化としたときの $I_i = \mathrm{Gal}(K_i^{sep}/K_i^{ur})$ とし. P_i をその p-Sylow 部分群 $(p = \mathrm{ch}\, k)$ とする. このとき $\mathcal{F}$ の分岐が tame とは $\mathcal{F}$ によって定まる各局所 monodromy 表現（これは I_i の表現になる）V_i の P_i への制限が自明となることである.

3) 有限性. $\mathbb{Z}$ 上有限生成な環 A 上 U と $\mathcal{F}$ が定義される. A 上の scheme U_A があって $U = U_A \otimes_A k$ かつ $\mathcal{F}$ は U_A 上の ℓ進層 $\mathcal{F}_A$ の U へのひきもどしとなっている

定理2 以上の仮定のもとさらに X を射影的とすると. G_K の1次元表現として

$$\det R\Gamma_c(U_{\bar K}, \mathcal{F})^{\otimes -1} \otimes \det R\Gamma_c(U_{\bar K}, \mathbb{Q}_\ell)^{\otimes \mathrm{rk}\mathcal{F}} = c_{X,U/K}^*(\det \mathcal{F}) \otimes J_{D,\mathcal{F}}.$$

右辺の定義は以下の通りである.

第1項(幾何的) まず相対標準類 $c_{X,U/K}$ を X の相対 Chow 群 $CH^n(X,D)$ の中に定義し, 次に標準 pairing

$$G_K^{ab} \times CH^n_{\emptyset}(X,D) \to \pi_1^{ab}(U)^{tame}$$

を定義する. すると $c_{X,U/K}^*(\det\mathcal{F})$ は $\mathcal{F}$ の行列式が定める $\pi_1^{ab}(U)^{tame}$ の指標を $c_{X,U/K}$ との pairing により G_K^{ab} にひきもどして得られる指標である.

相対 Chow 群はここでは次のように定義する. $\mathcal{K}_{n,X,D}$ を複体 $\mathcal{K}_{n,X} \to \bigoplus_i \mathcal{K}_{n,D_i} \to \bigoplus_{i<j} \mathcal{K}_{n,D_i\cap D_j} \to \cdots$ とし, hypercohomology $H^n(X, \mathcal{K}_{n,X,D})$ を $CH^n(X,D)$ とおく. 自然な射 $\mathcal{K}_{n,X,D} \to \mathcal{K}_{n,X}$ と Bloch-Quillen の公式 $H^n(X, \mathcal{K}_{n,X}) = CH^n(X)$ により, $CH^n(X,D) \to CH^n(X)$ が定義される. 次に相対標準類 $c_{X,U/K}$ を $(-1)^n c_n(\Omega^1_{X/K}(\log D), \mathrm{res}) \in CH^n(X,D)$ として定義する. V を階数 n の局所自由層 $\Omega^1_{X/K}(\log D)$ の定める(共変) vector 束とし $\Delta = \bigcup_i \Delta_i$ を residue 写像 $\mathrm{res}_i : \Omega^1(\log D)|_{D_i} \to \mathcal{O}_{D_i}$ により, $\Delta_i = \mathrm{res}_i^{-1}(1) \subset V_{D_i}$ として定める. このとき複体 $\mathcal{K}_{n,V,\Delta}$ を上と同様に定義すると V の 0-section は Δ とまじわらないの

でそのclassが$H^n(U, \underline{K}_{n\,U,\mathcal{O}})$に定義される。さらにK群のGersten分解により$H^n(U, \underline{K}_{n\,U,\mathcal{O}}) \cong H^n(X, \underline{K}_{n\,X,D}) = CH^n(X,D)$である。そこでこのclassの$CH^n(X,D)$での像として$c_n(\Omega^1_{X/k}(\log D), \mathrm{res})$を定義する。これは通常のchern類$c_n(\Omega^1_{X/k}(\log D))$の$CH^n(X)$のもちあげであることは定義から直ちに従う。

Pairing $G_k^{ab} \times CH^n(X,D) \to \pi_1^{ab}(U)^{tame}$の定義は繁雑になるのでその不分岐な商$G_k^{ab} \times CH^n(X) \to \pi_1(X)^{ab}$についてのみ説明する。$x$を$X$の閉点として$x$の類とのpairing $G_k^{ab} \to \pi_1(X)^{ab}$は群の移送$G_k^{ab} \to G_{k(x)}^{ab}$の非分離次数倍と包含射$x \to X$の誘導する$G_{k(x)}^{ab} \to \pi_1^{ab}(X)$の合成として定義する。これが有理同値を消すことは$\mathbb{P}^1$が単連結であることから従う。

$\pi_1(U)^{tame}$はUのetale被覆でDにそって分岐がtameなものを統制する$\pi_1(U)$の商であり、$\mathcal{F}$は対応する$\pi_1(U)^{tame}$のℓ進表現で定める。$\det \mathcal{F}$はその最高次外巾が定める$\pi_1^{ab}(U)^{tame}$の1次元表現である。これらにより上で述べたように右辺第一項が定義される。

第2項（数論的）まず$\mathcal{F}$のDにそっての分岐から1の巾根の群の指標（の族）を構成し、次にその族からJacobi和を使ってGalois商の指標$J_{D,\mathcal{F}}$を定義する。

D_iをDの既約成分とし、k_iをその定数体とする。惰性群I_iのpと素な商I_i/P_iはこのとき$\varprojlim_{p \nmid m} \mu_m(\bar{k}_i)$と標準的に同一視さ

れる．局所 monodromy 表現 V_i は仮定 2 より I_i/P_i の表現である．さらに仮定 3 と Grothendieck の局所 monodromy 定理より I_i/P_i の作用は準巾単．つまり V_i の半単純化 V_i^{ss} へ I_i/P_i は有限な商を経由して作用する．以上のことより半単純化 V_i^{ss} は

$$V_i^{ss} = \bigoplus_j \mathrm{Tr}_{k_{ij}/k_i}(\chi_{ij})$$

と一意的にかける．ここで χ_{ij} は位数 m_{ij} の I_i/P_i の指標，k_{ij} は k_i に 1 の原始 m_{ij} 根を添加した体．Tr は Galois 群による共役の直和である．さらに $D_i^* = D_i - \bigcup_{j \neq i} D_j$ とおき，c_i を D_i^* の Euler 数 $\chi_c(D_i^* \otimes_{k_i} \bar{k})$ とおく．このようにして k の有限次拡大の族と，その 1 の巾根の群の指標の族および整数の族の 3 つ組 $\chi = ((k_{ij})_{ij}, (\chi_{ij})_{ij}, (c_i)_i)$ がえられる．これは相互法則 $\prod_{ij} N_{k_{ij}/k}(\chi_{ij})^{c_i} = 1$ をみたすことが確かめられる．

この 3 つ組から Jacobi 和を定義する．まず k が有限体とする．ψ を k の自明でない加法的指標とする．Jacobi の和 j_χ を

$$j_\chi = \prod_{ij} \left(-\sum_{a \in k_{ij}^\times} \chi_{ij}^{-1}\left(a^{\frac{q_{ij}-1}{m_{ij}}}\right) \psi_i(\mathrm{Tr}_{k_{ij}/k}\, a) \right)^{c_i}$$

により定義する．上記相互法則により，これは Jacobi 和であり ψ のとり方によらない．G_k^{ab} の指標 $J_{D,\mathcal{F}} = J_\chi$ は $J_\chi(Fr_k) = j_\chi$ により定義する．

一般の場合は仮定 3 により有限体の場合に帰着して定義す

3. 仮定3のAはさらに正規かつX、DもA上定義されるとしてよい。すると上のことから、Aの各閉点において、Jacobi和が定義される。$J_{D,\chi} = J_\chi$ を $\pi_1(\mathrm{Spec}\,A)^{ab}$ の指標で各閉点における Frobenius の値がその Jacobi 和になるものとして定義する。この条件で一意的であることは Cebotarev 密度定理から従い、存在しかつ代数的 Hecke 指標から定まる ℓ進指標であることは SGA $4\frac{1}{2}$ で示されている

3° 証明の概略

$\mathbb{Z}$上有限生成な環上の model がとれるので Cebotarev 密度定理により、k が有限体の場合に帰着される。次元に関する帰納法を使うため、Lefshetz pencil をとって $\mathbb{P}$ へ射 $f: X \to \mathbb{P}^1$ を作る。Frobenius を求めればよいが、それはこの場合L関数の関数等式の定数項であり、Deligne-Laumonにより積公式が示されているので、各局所項を求めればよい。

good reduction: 定理1の方は fiber の次元が奇なので補題によりわかっている。定理2の方は次元に関する帰納法の仮定である。

bad reduction! 定理1の場合は Picard-Lefschetz公式により各点の寄与をその点での Hessian 行列式を使って表わすことができる。一方 de Rham コホモロジーの方も標準写像

$L = g^*\Omega^1_{\mathbb{P}'} \to E = \Omega^1_X$ からえられる複体 $(n=2m)$

$$L^{\otimes m} \to L^{\otimes m-1}\otimes E \to \cdots \to \Lambda^m E \to \cdots \to L^{\otimes -m}\otimes \Lambda^n E$$

が特異点の剰余体の局所自由分解になっていることを使って判別式をHessianで表わし一致することをみる

定理2の場合はSGA7 Exp.Iにあるようにvanishing cycleを計算する。そこではこの計算はある予想に基づいているが、ここでは仮定が強くなっているので予想は不要となる。するとvanishing cycleの分岐がtameとなるので局所項は惰性群の表現だけで決まりGaussの和を使って書ける。このようにして証明が完結する。

以上省略が多いですがくわしくは文献1, 2を見て下さい。Hodge類似として周期行列式に対しても類似の等式も証明できます（都立大 寺杣友秀氏との共同研究）

文献 1. T.S. Jacobi sum Hecke characters, de Rham discriminant and the determinant of l-adic cohomologies 東大プレプリントシリーズ 1992.

2 —, ε-factor of a tamely ramified sheaf on a variety 同 1991

積公式については.

P. Deligne Les constantes des equation des fonction L

Spr. LNM 349 (1972) 501-597.

G. Laumon Transformation de Fourier --- Publ IHES

65 (1987) 131-210.

Jacobi 和.

SGA 4$\frac{1}{2}$. Spr LNM 569 (1977) の Application

de la formule des traces ---

Picard Lefschetz 公式. Lefschetz pencil

SGA 7 II Spr LNM 340 (1973) の Exposes

XV, XVII etc.

Vanishing cycle の計算

SGA 7 I Spr LNM 288 (1972) の Expose I