代数幾何学シンポジウム記録
1992年度　pp.32-39

直線束に対する強Lefschetz型定理とその応用

大阪大・教養　榎　一郎

M を n 次元コンパクトケーラー多様体，ω を M のケーラー形式とする．微分形式に ω を外積させる作用を L とかく．L は deRham または Dolbeault コホモロジー群の準同型を引きおこす．古典的な強Lefschetz定理により，

$$L^q : H^{n-q}(M, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{n+q}(M, \mathbb{C})$$

は同型となる．特にHodge分解により，次は同型：

$$L^q : H^0(M, \Omega^{n-q}) \cong H^q(M, \Omega^n).$$

これをベクトル束係数コホモロジーに拡張することを考える．E を M 上のベクトル束とする．E-係数であっても L は同様に定義され，次が成り立つ：

<u>定理</u> 1. M を n-次元コンパクトケーラー多様体，E を M 上の Griffiths の意味で半正なベクトル束とすると，

$$L^q : H^0(M, \Omega^{n-q}(E)) \longrightarrow H^q(M, \Omega^n(E)), \quad q > 0$$

は全射になる．

Griffithsの意味で半正であることの定義は，（定理1の証明とともに）後で述べるが，次と同値である：「$\mathbb{P}(E)$ を E の射影化（$\mathbb{P}(E)_x$ は E_x の line 全体），F を $\mathbb{P}(E)$ 上のトートロジカル直線束とするとき，$c_1(F)_{\mathbb{R}}$ の実 d-閉 (1, 1)-形式による代表元 φ で，M 上各点で半正定値となるものがある。」

直線束がGriffithsの意味で半正であるとき，単に**半正**ということにする。前原によっても注意されたように[ ]，Kollárの単射定理[ ]は半正直線束に対しても成り立つ（Kollárは直線束の適当な巾が大域切断で生成されている場合に示した）：

Kollárの単射定理　M を（n次元）コンパクトケーラー多様体，F を M 上の半正直線束とする．このとき，$s \in H^0(M, F^{\otimes k})$ とテンソル積をとってえられる準同型

$$s\otimes\cdot : H^q(M, \Omega^n(F^{\otimes m})) \to H^q(M, \Omega^n(F^{\otimes(m+k)})),\ m>0,$$

は，$s \neq 0$ なら単射である．

さて，さまざまな応用のためには，半正直線束のみならず数値的半正（nef）直線束にまで拡張しておくことが望ましい．ただしコンパクトケーラー多様体 M 上の直線束 F が**数値的半正**であるとは次のように定義する：$c_1(F)_{\mathbb{R}}$ が，

M のケーラー錐の $H^2(M,\mathbb{R})$ における閉包にはいっていること，すなわち，ω を M のケーラー形式としたとき，任意の $\varepsilon>0$ に対し，$c_1(F)_{\mathbb{R}}$ の実 d-閉 $(1,1)$-形式による代表元 φ_ε で，$\varphi_\varepsilon+\varepsilon\omega$ が M の各点で正定値となるものがあること。

もちろん直線束が半正であれば，数値的半正であるが，逆は一般には成り立たない：藤木による反例がある。実は，上の強Lefschetz型定理も消滅定理も数値的半正直線束では一般に成り立たない。この場合も，藤木の例が反例になっていることを後で示す。

応用を2つあげる。F が数値的半正直線束のとき，

$$\nu(F):=\max\{k \mid c_1(F)_{\mathbb{R}}^k\neq 0 \ \text{in}\ H^{2k}(M,\mathbb{R})\}$$

とおく（$c_1(F)_{\mathbb{R}}=0$ のときは，$\nu(F)=0$ とする）。

<u>定理</u>2　M をコンパクトケーラー多様体とし，M の標準束 K_M が $\mathbb{Q}$-直線束として $K_M=F+E$ と半正直線束 F と effective divisor E に分かれているとするとき，

$$\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{m^{\nu(F)}}\dim H^0(M,K_M+\nu F)>0$$

なる，$\kappa(M)=\nu(F)$，すなわち

$$\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{m^{\nu(F)}}\dim H^0(M,\nu K_M)>0$$

となる。

<u>定理</u> 3　M をコンパクトケーラー多様体, $D=\sum_j a_j D_j$ を M 上の(正整数) effective 因子 (各 D_j は被約かつ既約) とし,

$$D_0=\sum_{a_j=b} D_j, \quad b=\max_j a_j$$

とおく. $[D]$ が半正であれば, 制限写像

$$H^q(M, K_M+mD)\longrightarrow H^q(D_0, K_M+mD),\ \ q\geq 0,\ m>0,$$

は全射.

§. 定理の証明について.

M を n 次元コンパクトケーラー多様体, E をその上のベクトル束とする. E のエルミート計量 h と, M のケーラー計量 (ケーラー形式と同一視) ω を固定する. E の複素構造とエルミート計量 h から E のエルミート接続 ∇ が定まる. ∇ に関する共変外微分を d^∇ とし, その $(1,0)$-成分を ∂_h (または単に ∂) とかく ($(0,1)$-成分は $\bar\partial$). h の曲率 $R:=(d^\nabla)^2$ は $\mathrm{End}(E)$-値の $(1,1)$-形式となる.

h と M のケーラー計量 ω から定まる E-値 p-形式(etc) に対する M 上の L^2-内積を $(\ ,\ )$ とかく. ケーラー形式を外積させる作用素 L の, この内積に関する形式的随伴作用素を Λ, ∂_h, $\bar\partial$ のを, それぞれ, ∂_h^*, $\bar\partial^*$ とかく. これらの間には, 次の関係式が成立つ:

$$(4)\quad \begin{cases} \partial_h^* L - L\partial_h^* = -\sqrt{-1}\,\bar\partial, & \bar\partial^* L - L\bar\partial^* = \sqrt{-1}\,\partial_h, \\ \partial\Lambda - \Lambda\partial = -\sqrt{-1}\,\bar\partial^*, & \bar\partial\Lambda - \Lambda\bar\partial = \sqrt{-1}\,\partial_h^*. \end{cases}$$

ここで，2つのラプラシアン

$$(5)\quad \begin{aligned} \Box_{\bar\partial} &= \bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial, \\ \Box_{\partial_h} &= \partial_h\partial_h^* + \partial_h^*\partial_h \end{aligned}$$

を考えると，上の関係式により，

$$\Box_{\bar\partial} = \Box_{\partial} + \sqrt{-1}(R\Lambda - \Lambda R)$$

が成り立つ．

(E, h) が(Griffithsの意味で)半正であるとは，各 $\xi \in E_x$, $x \in M$, に対し，$h(R\xi, \xi)$ が，半正定値であることである．h をうまく選べば (E, h) が半正になるとき，単に E が半正であるという．

さて $L^q : \{(n-q,0)\text{−形式}\} \longrightarrow \{(n,q)\text{−形式}\}$ は各点ごとに同型になっている．($n = \dim M$)．実際 (n,q)−形式 ξ に対して，$\xi = (1/q!)^2 L^q(\Lambda^q \xi)$ である．したがってベクトル束に対する強Lefschetz型定理は次から従う．

命題 6. (E, h) が半正であるとき，E−値 (n,q)−形式 ξ に対し，

$$\Box_{\bar\partial}\xi = 0 \iff \begin{cases} \bar\partial\Lambda^q\xi = 0 \quad \text{i.e., } \Lambda^q\xi \in H^0(M, \Omega^{n-q}(E)) \\ R\Lambda\xi = 0. \end{cases}$$

<u>命題6の証明</u>　ξ は (n,q)-形式なので, $\partial_h\xi=0$ かつ $R\xi=0$ である. (5)により,

$$\|\bar\partial\xi\|^2+\|\bar\partial^*\xi\|^2=(\Box_{\bar\partial}\xi,\xi)=\|\partial_h^*\xi\|^2+(\sqrt{-1}R\Lambda\xi,\xi).$$

また(4)と $\xi=(1/q!)^2L^q\Lambda^q\xi$ により,

$$(q!)^2\partial_h^*\xi=-\sqrt{-1}\,q\,L^{q-1}\bar\partial\Lambda^q\xi-\sqrt{-1}\,L^q\Lambda\bar\partial\Lambda^q\xi.$$

(⇐) $\bar\partial\Lambda^q\xi=0$ かつ $R\Lambda\xi=0$ なら上の2つから, ただちに $\bar\partial\xi=0$ かつ $\bar\partial^*\xi=0$ すなわち $\Box_{\bar\partial}\xi=0$ となる.

(⇒) (E,h) が半正なので,

$$\sqrt{-1}(R\Lambda\xi,\xi)\geq 0\quad(\text{“}=0\text{”}\Leftrightarrow R\Lambda\xi=0)$$

となる. したがって $R\Lambda\xi=0$. また $\bar\partial\xi=0$ により, $L^q\bar\partial\Lambda^q\xi=0$ すなわち $\Lambda\bar\partial\Lambda^q\xi=0$. 再び上の2つを用いて, $\partial_h^*\xi=0$, $\bar\partial\Lambda^q\xi=0$ を得る. ■

Kollárの単射定理も命題6から従う. 実は, ξ が $F^{\otimes m}$-値調和 (n,q)-形式であれば, 命題6により, $s\otimes\xi$ も調和形式になる. 実際, 命題6により, $\bar\partial\Lambda^q\xi=0$ かつ $R\Lambda\xi=0$. $\bar\partial s=0$ なので, $\bar\partial\Lambda^q s\otimes\xi=s\otimes\bar\partial\Lambda^q\xi=0$. $F^{\otimes(m+k)}$ の曲率 R' は $(m+k)/m\cdot R$ (F の計量を h とし, $F^{\otimes m}$, $F^{\otimes(m+k)}$ の計量は $h^{\otimes m}$, $h^{\otimes(m+k)}$ を考える) であるから,

$$R'\Lambda(s\otimes\xi)=s\otimes\frac{m+k}{m}R\Lambda\xi=0.$$

定理2の証明には、次が用いられる：

<u>命題</u> 7　M を m 次元コンパクトケーラー多様体，ω を M のケーラー形式とする．TM を M の正則接束とし，$E = (TM)^{\otimes m}$ とおく．M の標準束 K_M が $\mathbb{Q}$-直線束として，$K_M =$ (数値的半正直線束) + (effective divisor) と分解しているとき，任意の連接部分層 $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}(E)$, $\mathrm{rk}\,\mathcal{S} > 0$, に対し，

$$\int_M c_1(\mathcal{S}) \wedge \omega^{m-1} \leqq 0$$

となる．

定理3の証明について．定理1，Kollárの単射定理において，"半正直線束"を次のような条件に弱めることができる．

(*) "直線束 F が，$\mathbb{R}$-直線束として $F = F_0 + D$ と分解する，ただし F_0 は半正直線束，D は積分可能な effective divisor"

ここで effective divisor $D = \sum a_j D_j$ (D_j は既約かつ被約) が<u>積分可能</u>であるとは，D_j の局所定義関数を f_j としたとき，$1/\prod_j |f_j|^{2a_j}$ が積分可能であること．

さて $F = F_0 + D$ が上の条件(*)をみたしていて，(F_0, h_0) が半正であるとする．h_0 を無理やり F の計量とみなすと，これは，D に沿って，丁度増大度が，$1/\prod_j |f_j|^{2a_j}$ となる極

をもつことになる．しかし，これは積分可能であるため，
L^2-理論は，あたかも D がないかのように成り立つ．したがって定理1，Kollárの単射定理もそのまま成り立つ．

特に $\mathbb{Q}$-effective divisor $D=\sum a_j D_j$ が半正のとき，そのくり上げ $\ulcorner D \urcorner$ は (オ) をみたしている．定理3のように $b=\max_j a_j$，$D_b=\sum_{a_j=b} D_j$ とおくと，
$D-D_b=\ulcorner (1-\frac{1}{b})D \urcorner$ であるから，定理3が成り立つ．

§. 反例

C を楕円曲線とする．$H^1(C,\mathcal{O})\cong\mathbb{C}$ なので，C 上の rk 2 ベクトル束 E で，$0\to\mathcal{O}_C\xrightarrow{s}E\to\mathcal{O}_C\to 0$ (完全)，$E\not\cong\mathcal{O}_C\oplus\mathcal{O}_C$ となるものがある．$S=\mathbb{P}(E)$ とおき，$s(1)$ の定める無限遠切断を Γ とおく．すると，$K_S=-2\Gamma$ で $[\Gamma]$ は数値的半正である．次が容易に示せ，定理1，単射定理の数値的半正直線束に対する一般化の反例となっている；

命題8 a) $L: H^0(S,\Omega^1(m\Gamma))\to H^1(S,\Omega^2(m\Gamma))$ は
自明（すなわち $=0$）　$(m\geq 3)$

b) $s\in H^0(S,\Gamma)$ を定義切断とするとき，

$s\otimes\cdot : H^1(S,m\Gamma)\to H^1(S,(m+1)\Gamma)$ は
自明（すなわち $=0$）　$(m\geq 1)$