

P進 Hodge 理論とゼータの値

東京工業大学 加藤和也

§1. 城崎と宇宙

創建千年の歴史をもつ城崎温泉寺の石段を登るとき、ここを歩いた昔の人々のことかしのはれ、この石段を過ぎ去っていった年月のことかが思われてくる。仏教の法のこととは全く理解していない筆者であるが、P進 Hodge理論のような数学の深い法もまた、この温泉寺の大氣の中に、千年も億年もきらきらまいり入って、人間や生物の生活とともにあったにちかいない。この石段に落ちた紅葉の一つ一つが、どんな数学の法則をあらわし、城崎を囲む山々の一つ一つの峰の形が、宇宙の始まりに関わるとのようないいのうな真理の姿をかたどっているのである。建築家ガウディが自分の故郷の山の形に似せてバルセローナの教会の尖塔を設計したとされる事からも、山の形が、宇宙の真理をかたどっていることは知れるのである。

筆者は[4]において、鶴の恩返しの鶴の思いか、宇宙の起源を考える鍵であることを書いた。そこには、鶴女房のみな

らす、蛇女房や雪女もあらわれたのであった。（その後こぶ
とりじいさんまであらわれた時は筆者もさすがにうろたえた
が、こぶと/orじいさんについてはまた論するに至っていない。）
これらを書きながら、当時の筆者は自分でもちよつとついて
ゆけないものを感じたが、今はちゃんとついてゆけるし、實
に自然なことのように思える。鶴の恩返しのような昔話や童話には、
我々の祖先がまだ原生生物やそれ以前のものであった頃から
の、悲しみや喜びの記憶を形にした所がある。したがって、土曜
日午時からのテレビの「日本昔はなし」を見ることは、宇宙
の起源を思うことであり、P進 Hodge 理論を思うことである
にちがいない。

筆者は狂ってしまったのであるうか。いまだ狂い足らざる
ことを恥ずるのみである。人間はみな狂っていて、子に狂い、
孫に狂うものであること、P進 Hodge 理論を発展させた最大の
功労者 Fontaine も、かつては、変な研究をやっている「グル
ノーブルの狂人」と目されながら、雪深い山小舎でひとり、
P進 Hodge 理論の想を練ったことを考えたい。最近、息子と
ディズニー映画「美女と野獣」を見た。この漫画映画を「原作の
味をそこなった」と嫌うかたもおられるけれども、私はすば
らしいと思う理由は、主人公の娘さんもその父親もいかれて
いて、映画はそれを力強く支持していることである。娘さん

は、夢のようなことはかり考へる「いかれた娘」として登場し、「友達もいない」といふ（子供が見る映画で、友達もいなくなるいかれかたを賞め讃える映画、というのはかなり思い切っていると思う），その父親は完全にいかれた発明家であり、そして彼らはいかれて いるかゆえに森の中の魔法の城にたどりつけるのである。

§2. p 進 Hodge 理論とセータの値.

p 進 Hodge 理論と、セータの値の研究のような数論とは、かなりかけ離れた心持ちのものである。数論は、ある数が有理数か無理数か、ある素数でわりきれるかどうか、とか、非常に微妙な話をどうとぶのであるが、 p 進 Hodge 理論の方は、代数多様体なら何でも持ってこいという、細かい所は気にしない性格である。しかしながら、異質なもののぶれあう所に大きな数学の発展の生まれることは、常々見られることがある。九州での学会で筆者が指摘したように、白壁・水・酒倉の柳川の風土と、長崎のキリストン文化といふ、異質なものをぶれあわせて、北原白秋の处女詩集「邪宗門」が生まれたことは、その典型的な例ではあるまいか。また、南から北へ目を移すならば、函館の町の美しさといふものが、明治の初め

に港として外国の文化にふれた驚きを、そのまま結晶して今に残しているためであろうことも、その典型的な例ではなかろうか。

§3. 宇宙は心？

あとで §5 に述べる探査を筆者が考え実行したとき、その方針は、ゼータの心を推しはかるということであった。ゼータは必ずそこにやってくる。複素関数として定義されるゼータにとって、大変苦手な、P進 Hodge の山道を、ゼータは与ひように会うために切ない思いをもって、必ず越えてくる。（鶴が娘に姿を変えたように） K_2 の中の「ゼータの化身」に姿を変えて。

ゼータに心があるというと、顔をそむける人もいるかもしがぬ。しかし、犬に心があることはもちろんだとか、ロボットにも、そのうち（ロボットが高等化すれば） 心があると人が認めるようになるであろうし、人形にも心、原稿用紙にも心、ボールペンにも心があるという人だっているのである。ゼータに心を感じるのは、単に我々の心を投影しているだけだという人もあるかもしれないが、実は逆に我々の心が、ゼータの心の投影かもしれないことはいうまでもない。

上野健爾さんに、「宇宙は物質だから……」と筆者が話しかけ

たとき、「宇宙は物質ですか？」と疑問を投げかけられてしまつたことがあった。上野さんのお考えは、筆者ごときの推しはかれるとこではないか、すると宇宙は「心」なのであるうか。

$$\text{宇宙} = \text{心} = \text{セータ}$$

なのであるうか。最近筆者は息子とともに映画「ゴジラ対モスラ」を見たが、さすがに映画の中味は、中年男の感動を呼ぶものではなかった。しかし、映画が始まるまで20分間場内に流れ続けた「モスラやモスラ……」という主題歌[6]は、1番がまじないの言葉だけできでいて、2番になつてやつと、「時を越えて海を越えて」モスラが来てくれる、という日本語がはいってくる、見事な構成であつて胸にせまるものがあり、聞いているうちに中年男は不覚の涙を落とすところであった。宇宙の遠い涯てにむかって、存在するかしないかわからぬ親を哀しく呼ぶようなその歌は、セータを呼ぶ歌でもあり、

$$\dots\dots\dots = \text{モスラ}$$

と、さつきの等式は続くのであるうか。

とにかくにも、このような「セータの心を推しはかる」という方法が、実際に役に立つことは、驚きと言わざるえない。そしてこのような方法の数学における大切さは、今後もっともっと強まっていくようにも思えるのである。(これか筆者が[0]を数学の教科書として講義に用いる理由である。)

§4. ワープ航法の発見。

銀河系とアンドロメダ星雲の間には、ほとんど旅行不可能と思えるほどの大きな距離がある。筆者はつい先日、それをのり越える、 explicit reciprocity law を用いた驚くべきワープ航法を発見した。以下、それを説明する。

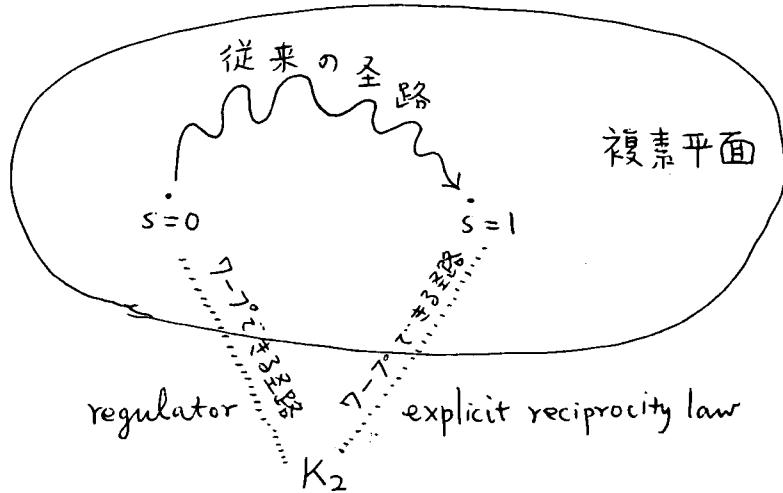
(通常の上半平面の) 保型形式 f の zeta 関数 $L(f, s)$ の $s=1$ での値は、数論のさまざまな問題（たとえば Birch, Swinnerton-Dyer 予想）に関連した、大切な値である。一方、 $L(f, s)$ は $s=0$ で 1 位の零点を持つか、1 階微分の値 $L'(f, 0)$ と、 $L(f, 1)$ は、数論から見て、1 方のことと 1 方のこととに全く応用することしかできないほど、かけ離れた数学的対象であった。そのため、これまでには、 $L'(f, 0)$ と K_2 の間の関係についての Bloch や Beilinson の理論は、 $L(f, 1)$ については研究には全く役に立たず、「 K_2 は K_2 のためにのみあり、数論の役には立たぬ」と悪口をいう人もいたのである。

このように「 $s=0$ での様子」と「 $s=1$ での様子」はかけ離れた現象であると見え、 $s=0$ から $s=1$ へゆくことは非常に遠かったのである。

このように遠かったのは、今までには、複素平面の中で $s=0$ から $s=1$ へ動いていたからである（図参照）。複素平面の中

て $s=0$ から $s=1$ まで動くことは、我々の知っている、宇宙内の点から宇宙内の点への、ふつうの移動法である。

ワーフ航法の図



しかしながら §5 に述べるのは、 $L'(f, 0)$ から $L(f, 1)$ へ移る新しい方法である。これは K_2 を通り、P進 Hodge 理論を用いて一般化された explicit reciprocity law, を通ってゆくものである。

この方法では、以前全く数論的に無縁であったはずの $s=0$ と $s=1$ は深く結びつけているのであり、 $s=0$ での理論が $s=1$ での強力な結果をもたらすのである。つまりこの方法では、 $s=0$ と $s=1$ の 2 点は非常に近いのである。

この、複素平面の中を通っていかない $s=0$ から $s=1$ への移動こそは、explicit reciprocity law によるワーフ航法であり、千年のうちに宇宙旅行に実用化されるようになるに思える。このような考え方いかれた夢という人もいるかもしれないが、大発明のための多くのアイデアは、かつてそのように言われた

のである。

実際の所、 $s=0$ から $s=1$ へゆくこの新しいゆきかたが、我々を宇宙空間の新しい認識に導くであろうことは、言をまたない。

§5. explicit reciprocity law の一般化と保型形式の zeta の値

P進 Hodge 理論と zeta の値の関係の研究の応用として、[2] で、 Kolyvagin の次の結果の、別証を、説明した。

'E が \mathbb{Q} 上の 楕円曲線で、モジュラー曲線から全射があるとする。E の zeta 関数を $L(E, s)$ と書くと、

$$L(E, 1) \neq 0 \implies \#(E(\mathbb{Q})) < \infty$$

この別証の方法を この §5 で簡単に思いあわし、[2] に述べなかつた、 explicit reciprocity law の一般化との関係を述べたい。筆者的方法は、 §4 の図の の航路をゆくもので、次の 3 段階に要約される。

① (これは Beilinson の仕事である。) Beilinson はモジュラー曲線の K_2 の中に、「ゼータの化身」というべき元の族を発見した。そのゼータの化身と呼ぶべき由縁は、 K_2 からの regulator map を通して、これらの元が、 weight 2 の保型形式 f についての $L'(f, 0)$ や、もっと詳しくは $L'_{\equiv a \bmod N}(f, 0)$ を表わすという

ことである。 $(L(f, s) = \sum_{n \geq 1} c_n n^{-s}$ と書くとき、

$$L_{\equiv a \pmod{N}}(f, s) = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \equiv a \pmod{N}}} c_n n^{-s}$$

と定義する。)

② Beilinson の得た “ K_2 の中のゼータの化身” のをす
“norm compatible system” から、カロア・コホモロジー群

$$H^1(\mathbb{Q}(S_N), H_{et}^1(\bar{X}, \mathbb{Q}_p)(1))$$

(X はモジュラー曲線、 $\bar{X} = X \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}$ 、 $N \geq 1$ 、 S_N は 1 の原始 N 乗根) の元を作った。(これは全く形式的でいい。) すると、驚くべきことは、これらの元は、自分たちがもともとゼータの化身であったことを忘れない、すなわちなあもゼータの化身と呼ばれるべき元であり、 p 進 Hodge 理論からくる map

$$\exp^*: H^1(\mathbb{Q}(S_N), H_{et}^1(\bar{X}, \mathbb{Q}_p)(1)) \rightarrow \mathbb{Q}(S_N) \otimes H^0(X, \Omega_X^1) \otimes \mathbb{Q}_p$$

を通じて $L_{\equiv a \pmod{N}}(f, 1)$ をこれらの元が表わす、ということ(こういうことが生ずる本当の理由は、不明である。「ゼータの懸命なん」とか、どうしようがない)が証明できる。この証明(この話の最も重要な箇所)

に、後述の一般化された explicit reciprocity law を用いるのであるか、この点を [2] では省略してしまった。

(①で zeta 関数の $s=0$ での様子があらわれていたものが、②では $s=1$ での様子があらわれてあり、見事にワープがおこなわれたことになるのである。)

③ ②で得た、カロア・コホモロジーと関連した p -adic な zeta の値の表示は、非常に強力で、そこから簡単に(椭円曲

線 E に対し, $L(f, s) = L(E, s)$ なる保型形式 f を持つたすことはより), $L(E, 1) \neq 0 \Rightarrow \#(E(\mathbb{A})) < \infty$ が導かせる。この③は非常に簡単な議論となる。

以下で, ②に用ひらる一般化された explicit reciprocity law を説明する。これは [1] [3] [5] における explicit reciprocity law の一般化とは、異なる一般化である。

K を完備離散付値体とし, F をその剰余体, K の標数は 0, F の標数は $p > 0$ で $[F : F^p] = p^r < \infty$ とする。

$n \geq 0$ に対し, ζ_{p^n} を 1 の原始 p^n 乗根とし

$$K_n = K(\zeta_{p^n})$$

とおき, Milnor K 群についての norm compatible system

$$\varprojlim_n K_{r+1}^M(K_n) \quad (\varprojlim \text{は norm に関する})$$

を考える。通常の explicit reciprocity law では剰余体 F は perfect (つまり $r=0$) であり, この場合我々は乗法群についての norm compatible system

$$\varprojlim_n K_1^M(K_n) = \varprojlim_n (K_n)^\times$$

を考えるわけであるが, 今我々はその状況の一般化を, Milnor の K 群を用いて考えているわけである。

$n \geq 1$ を fix し, $\mathbb{Z}_p(1)$ の基底 α をとり, 次の合成写像 (各 map はあとで説明)

$$\textcircled{H}: \varprojlim_{m \geq n} K_{r+1}^M(K_m) \xrightarrow{\delta_\xi} H^{r+1}(K_n, \mathbb{Q}_p(r)) \xrightarrow{\exp^*} K_n \otimes_K \hat{\Omega}_K^r$$

を具体的に計算するのか、我々の explicit reciprocity law である。

などにます。

$$\hat{\Omega}_{K_n}^q \underset{\text{def}}{=} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \varprojlim_k \left(\Omega_{O_{K_n}/\mathbb{Z}}^q / p^k \Omega_{O_{K_n}/\mathbb{Z}}^q \right) \quad (q \in \mathbb{Z})$$

(Ω^q は q 次外微分形式の加群)。次に δ_ξ は、次の合成写像の \varprojlim_m である:

$$K_{r+1}^M(K_m) \xrightarrow{(1)} H^{r+1}(K_m, \mathbb{Z}/p^m(r+1)) \xrightarrow{(2)} H^{r+1}(K_m, \mathbb{Z}/p^m(r)) \xrightarrow{(3)} H^{r+1}(K_n, \mathbb{Z}/p^m(r))$$

など (1) は cohomological symbol map, (2) は

$$\mathbb{Z}/p^m \cong \mathbb{Z}/p^m(1); \quad 1 \mapsto \xi \bmod p^n$$

による同型, (3) は corestriction map である。

最後に \exp^* であるか定義は大変である。 $(r=0)$ で剰余体 F が有限体の場合, この

$$\exp^*: H^1(K_n, \mathbb{Q}_p) \rightarrow K_n$$

は, $K_n \xrightarrow{\exp} K_n^\times \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\text{局部類体論}} Gal(K_n^{ab}/K_n) \otimes \mathbb{Q}$ の \mathbb{Q}_p -双対

になる。) F が完全体の場合には, Fontaine の定義した B_{dR} という K を含む巨大な体のあることは, [2] にも述べたが, 剰余体が完全体と限らない K にも B_{dR} の理論がある (都築[7])。

B_{dR} は K を含む巨大な環で, $d: K \rightarrow \hat{\Omega}_K^1$ と両立する connection

$$\nabla : B_{dR} \rightarrow B_{dR} \otimes_K \hat{\Omega}_K^1$$

をもち， B_{dR} は $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ が作用し，さらには B_{dR} はこの作用と両立する filtration $\{B_{dR}^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ をもつていて， $K \subset B_{dR}^0$ ，

$$0 \rightarrow B_{dR}^{i, \nabla=0} \rightarrow B_{dR}^i \xrightarrow{\nabla} B_{dR}^{i-1} \otimes_K \hat{\Omega}_K^1 \xrightarrow{\nabla} B_{dR}^{i-2} \otimes_K \hat{\Omega}_K^2 \xrightarrow{\nabla} \cdots$$

は exact である。さらには B_{dR}^i 係数のカーロア・コホモロジーは，

$$H^q(K, B_{dR}^i) = 0 \quad \text{if } q \neq 0, 1 \text{ または if } i \leq 1,$$

$$H^1(K, B_{dR}^i) \xleftarrow[\text{(*)}]{\cong} H^0(K, B_{dR}^i) \xleftarrow[\text{(**)}]{\cong} K \quad \text{if } i \leq 0$$

ここで (*) は $H^1(K, \mathbb{Z}_p) = \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(K^{\text{ab}}/K), \mathbb{Z}_p)$ の元

$$\text{Gal}(K^{\text{ab}}/K) \xrightarrow[1 \text{ の } p \text{ 乗根への作用}]{\cong} \mathbb{Z}_p^\times \xrightarrow{\log} \mathbb{Z}_p$$

を cup 積するところ，(**) は $K \subset B_{dR}^0$ によるもの。([7])。

以上の事が S, exact sequence

$$0 \rightarrow B_{dR}^{r, \nabla=0} \rightarrow B_{dR}^r \xrightarrow{\nabla} B_{dR}^{r-1} \otimes_K \hat{\Omega}_K^1 \xrightarrow{\nabla} \cdots \xrightarrow{\nabla} B_{dR}^0 \otimes_K \hat{\Omega}_K^r \rightarrow 0$$

は，次の同型 δ を与える：

$$\begin{aligned} K_n \otimes_K \hat{\Omega}_K^r &\cong H^0(K_n, B_{dR}^0 \otimes_K \hat{\Omega}_K^r) \xrightarrow[\text{(*)}]{\cong} H^1(K_n, B_{dR}^0 \otimes_K \hat{\Omega}_K^r) \\ &\xrightarrow[\cong]{\delta} H^{r+1}(K_n, B_{dR}^{r, \nabla=0}) \end{aligned}$$

これが $\mathbb{Q}_p(r) \subset B_{dR}^{r, \nabla=0}$ により，得られる

$$H^{r+1}(K_n, \mathbb{Q}_p(r)) \rightarrow H^{r+1}(K_n, B_{dR}^{r, \nabla=0}) \cong K_n \otimes_K \hat{\Omega}_K^r$$

が \exp^* である。

- 般化された explicit reciprocity law とは，次の定理である：

定理: (簡単のため) P が K の素元であるとする。(さらに)

簡単のため $K_{r+1}^M(\mathcal{O}_{K_n})$ を $K_{r+1}^M(K_n)$ の

$$\{f_1, \dots, f_{r+1}\} \quad f_1, \dots, f_{r+1} \in (\mathcal{O}_{K_n})^\times$$

で生成された部分群とし $\varprojlim_{m \geq n} K_{r+1}^M(\mathcal{O}_{K_m})$ の元の $K_n \otimes_K \hat{\Omega}_K^r$ の

像のみ計算する。結果は次のとおり：

$$(u_m)_m \in \varprojlim_n K_{r+1}^M(\mathcal{O}_{K_m}) \text{ とすると, } (u_m)_m \text{ の (H) による}$$

$K_n \otimes_K \hat{\Omega}_K^r$ の像は、各 $m \geq n$ に対する u_m の

$$\begin{aligned} K_{r+1}^M(\mathcal{O}_{K_m}) &\longrightarrow \hat{\Omega}_{\mathcal{O}_{K_m}/\mathbb{Z}}^{r+1} \\ \{f_1, \dots, f_{r+1}\} &\mapsto \frac{df_1}{f_1} \wedge \dots \wedge \frac{df_{r+1}}{f_{r+1}} \\ &\leftrightharpoons \mathcal{O}_{K_m}/I_m \otimes_{\mathcal{O}_K} \hat{\Omega}_{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}}^r \\ a \omega \wedge \frac{d\xi_{pm}}{\xi_{pm}} &\longleftrightarrow a \otimes \omega \\ &\longrightarrow \mathcal{O}_{K_n}/(P^{m-1}) \otimes_{\mathcal{O}_K} \hat{\Omega}_{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}}^r \\ \frac{1}{P^{m-n}} \text{Trace} \end{aligned}$$

によると像の \varprojlim_m は P^{-n} をかけたものである。すなはち、

$\hat{\Omega}_{\dots} = \varprojlim_K \Omega_{\dots}/P^k \Omega_{\dots}$, ξ_{pm} は \mathbb{Z} に伴う 1 の原始 P^m 乗根、 I_m は \mathcal{O}_{K_m} の ideal で、 $(P^m) \subset I_m \subset (P^{m-1})$ となるもの、

$\frac{1}{P^{m-n}} \text{Trace}$ は $\text{Trace} : \mathcal{O}_{K_m} \rightarrow \mathcal{O}_{K_n}$ (\mathbb{Z} の像 = $P^{m-n} \mathcal{O}_{K_n}$) の $\frac{1}{P^{m-n}}$ 倍が準写像である。

さてこの定理の [2]との関係を述べる。 X を \mathbb{Q} 上の r 次元代数多様体、 K を X の函数体の何らかの意味での P 進完備化とする。

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_n K_{r+1}^M(X \otimes \mathbb{Q}(\mathfrak{f}_{p^n})) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{Q}(\mathfrak{f}_{p^n}), H_{et}^r(\bar{X}, \mathbb{Q}_p))(r) \\ \downarrow & & \searrow \text{exp}^* \\ & & \mathbb{Q}(\mathfrak{f}_{p^n}) \otimes \Gamma(X, \Omega_X^r) \otimes \mathbb{Q}_p \\ \varprojlim_n K_{r+1}^M(K(\mathfrak{f}_{p^n})) & \xrightarrow{\text{(H)}} & K_n \hat{\otimes}_K \hat{\Omega}_K^{r+1} \end{array}$$

は可換である。先に述べた①②③のstepのうちの②における、 X をモジュラー曲線とした時($r=1$ となる)の、上図の

$$\varprojlim_n K_2(X \otimes \mathbb{Q}(\mathfrak{f}_{p^n})) \longrightarrow \mathbb{Q}(\mathfrak{f}_{p^n}) \otimes \Gamma(X, \Omega_X^r) \otimes \mathbb{Q}_p$$

の計算が大切($\varprojlim_n K_2$ 内の「セータの化身」の像の計算が大切)な箇所だと言ったが、ここでの所が、この(H)の計算(我々の explicit reciprocity law)によって可能になるのである。

引用文献

- [0] 天沢退二郎 詩はどこに住んでいるか 思潮社
(天沢さんは筆者の近所に住んでおられ、「こういう世界と私の書くものとが決して無関係ではない」というのが愉快というか、感動的です」と励ましてくださいました。)
- [1] K. Kato, Explicit reciprocity law and Cohomology of Fontaine-Messing, Bull. Math. Soc. France 1991.
- [2] K. Kato, $L(E, 1) \neq 0 \Rightarrow \#E(\mathbb{Q}) < \infty$. 数理解析研究会録 (保型形式研究会報告集) 1991年12月

- [3] K. Kato, explicit reciprocity law と zeta の値, 数理解析研講究録 810 (1992)
- [4] K. Kato, ゼータ元に関する一考察, 1992 年度代数学シンポジウム報告集
- [5] K. Kato, Lectures on the approach to Iwasawa theory of Hasse-Weil L-functions via B_{dR}, preprint
- [6] 田中友幸他(作詞), 古関裕而(作曲) 今村恵子・大沢さやか(歌), モスラの歌
- [7] N. Tsuzuki: Variation of B_{dR}, preprint

少し余白があるので、小学校1年の息子の国語の教科書にある、感銘を受けた童話のあらすじを紹介する(松谷みよ子作)。子りすがくるみの木から、自分のひいひいひいおじいさんの話を聞く。「とてもしつぽの美しいハリすだった。自分は芽を出した時、自分を土の中に埋めたまま食べ忘れたそのりすに、あなたのひいひいひい孫においしくるみの実を食べさせてあげると約束をした」と。子りすは自分も土に埋めて食べ忘れたくるみの実のあることを思い出す。そのくるみはもう芽を出していくて、子りすに、「あなたのひいひいひい孫においしくるみを食べさせると約束する。子りすはとても喜んで、その芽のまわりを走り回る。(原文はとても美しい。昔の国語の教科書には、こんな良い詩は、のってなかつたよう気がする。)