代数幾何学シンポジウム記録
1993年度 pp.129-139

A trial of an arithmetic construction of rank 2 reflexive sheaves (笹倉氏の仕事の紹介)

都立大理学部
寺杣友秀

0. 動機　$\mathbb{P}^n$ 上の rank の小さい vector bundle を構成することは、大問題であるが、現在の所、余り多くのことは知られていない。今まで知られている nontrivial な、その例としては、

① $\mathbb{P}^4$ 上の rank 2 vector bundle (Horrocks-Mumford)
② $\mathbb{P}^5$ 上の rank 3 vector bundle (Horrocks)
③ $\mathbb{P}^{2m+1}$ 上の rank $2m$ vector bundle
(null correlation bundle = mathematical instanton)
④ $\mathbb{P}^n$ 上の rank $(n-1)$ bundle (Tango)
⑤ $\mathbb{P}^4$ 上の rank 3 vector bundle (笹倉)

等があげられる。その中でも有名な Horrocks-Mumford の vector bundle には、いくつかの構成法があるが、そのひとつとして stratification を使って、組み合わせ論的に(とくに、有限体の構造を使った組み合わせ論を使い)構成する方法が知られている。ここではその構成法に従って、$\mathbb{P}^n$ 上の reflexive sheaf の構成法をのべたい。残念ながらこの方法では、構成される reflexive sheaf は locally free とならないが、有限体をもとにして組み立てられているので、群の作用や chern class に関して(現在のところは c_4 まで)具体的に計算することが可能である。

<u>1. 構成法.</u> pを素数で. $p\equiv 1 \pmod 4$ となるものとする。以下このpをfixして. $\mathbb{P}^{p-1}$ 上の reflexive sheaf を構成しよう。今. $\mathbb{F}_p$をp元体. $V=\mathrm{Map}(\mathbb{F}_p,\mathbb{C})$ なる p次元ベクトル空間とする。$\mathbb{P}=\mathbb{P}^{p-1}=\mathbb{P}(V)$ とする。$i\in\mathbb{F}_p$ に対して. その特性関数を$x_i\in V$ とする。すなわち. $\mathbb{P}=\mathrm{Proj}(\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_p])$ である。$i\in\mathbb{F}_p$に対して. H_i を $x_i=0$ で定義される超平面, $H_i^0=H_i-\bigcup_{j\neq i}H_j$ とする。$N_i=\mathbb{P}-\bigcup_{j\neq i}H_j$ とおくと. N_i は H_i^0 の open neibourhood となり. $\bigcup_{i\in\mathbb{F}_p}N_i=\mathbb{P}-\{\text{codim 2 strata}\}$ となる。ここでいう statification は divisor H_i $(i\in\mathbb{F}_p)$ から自然に定まるものである。$\mathbb{F}_p^\times$の元zが平方剰余であるとは. ある$y\in\mathbb{F}_p^\times$の元が存在して. $z=y^2$と書けることである。この時. $z\in\mathbb{F}_p^{\times 2}$ で表わす。$x-y\in\mathbb{F}_p^{\times 2}$の時. $x\sim y$ と書き. $x-y\in\mathbb{F}_p^\times-\mathbb{F}_p^{\times 2}$ の時 $x\nsim y$ と書く。pの条件より $x\sim y\iff y\sim x$ である。

<u>Def</u> $(f, f_i^\pm)$ $\mathbb{C}[x_i]_{i\in\mathbb{F}_p}$ の元 $f, f_i^\pm$ を.

$$f=\prod_{i\in\mathbb{F}_p}x_i,\quad f_i^+=\prod_{j\sim i}x_j,\quad f_i^-=\prod_{j\nsim i}x_j$$

で定義する。$\deg f=p$, $\deg f_i^\pm=\frac{1}{2}(p-1)$ である。

<u>Def</u> (Sheaf $\mathcal{F}_p^0$) $\mathcal{F}_p^0|_{N_i}$ を $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(p)^{\oplus 2}|_{N_i}$ の subsheaf で. $e_1=(f,0)$, $e_2=(0,f)$, $f_i'=(x_{i+1}^{\frac{p+1}{2}}f_i^-,\ x_{i+1}^{\frac{p+1}{2}}f_i^+)$ で生成されたものとして定義する。(以下 $x_{i+1}^{\frac{p+1}{2}}=\ell_i$ と書く.) この時. 容易に. $(\mathcal{F}_p^0|_{N_i})|_{N_i\cap N_j}$ と. $(\mathcal{F}_p^0|_{N_j})|_{N_i\cap N_j}$ は一致するので. $\mathcal{F}_p^0|_{N_i}$ は $\mathcal{F}_p^0$ なる $\bigcup_{i\in\mathbb{F}_p}N_i$ 上の torsion free sheaf の制限として得られる。これにより $\mathcal{F}_p^0$ を定義する。

$$\mathcal{F}_p^\circ \Big/ \bigcup_{i\in\mathbb{F}_p} N_i = \mathbb{P}^{p-1} - \{\text{codim 2 strata}\} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^{p-1}$$

<u>Lemma</u> $\mathcal{F}_p^\circ$ は $\bigcup_{i\in\mathbb{F}_p} N_i$ 上 locally free

<u>proof</u> 3つの generator e_1, e_2, f_i' の間には次の関係式

$$l_i f_i^- e_1 + l_i f_i^+ e_2 = f f_i'$$

が成り立つが、$l_i f_i^-$, $l_i f_i^+$ は x_i で割りきれない単項式なので、N_i 上 invertible ∴ $\mathcal{F}_p^\circ|_{N_i}$ は e_1, f_i' で生成される。

Q.E.D.

<u>Def</u> $\bigcup_{i\in\mathbb{F}_p} N_i$ から $\mathbb{P}^{p-1}$ の自然な inclusion を j とする。(上図)
$\mathcal{F}_p$ を $\mathcal{F}_p = j_* \mathcal{F}_p^\circ$ で定義する。この時 $\mathcal{F}_p$ は reflexive なので、codim 2 まで locally free であることがわかるが、([O.S.S]) その local な generator を書き下してみよう。

<u>Lemma</u> $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(p)^{\oplus 2}$ から H_i $(i\in\mathbb{F}_p)$ への制限写像を δ_i. $\delta = \bigoplus_i \delta_i : \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(p)^{\oplus 2} \longrightarrow \bigoplus_{i\in\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_{H_i}(p)^{\oplus 2}$ とおく。また $\bigoplus_{i\in\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_{H_i}(\frac{1}{2}(p+1))$ から $\bigoplus_{i\in\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_{H_i}(p)^{\oplus}$ への準同型 Φ^1 を

$$\Phi^1 : \bigoplus_{i\in\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_{H_i}(\tfrac{1}{2}(p+1)) \ni (\sigma_i) \longmapsto (\sigma_i f_i)_i \in \bigoplus_{i\in\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_{H_i}(p)^{\oplus 2}$$

とおく。ここで $f_i = (f_i^-, f_i^+)$ である。

この時 $\mathcal{F}_p = \delta^{-1}(\mathrm{Im}\,\Phi^1)$ である

<u>proof</u> $\delta^{-1}(\mathrm{Im}\,\Phi^1) \subset \mathcal{F}_p$ は、$\delta^{-1}(\mathrm{Im}\,\Phi^1)|_{N_i} = \mathcal{F}_p^\circ|_{N_i}$ を見ればよい。$\mathrm{Ker}\,\delta$ は $(x_i, 0)$, $(0, x_i)$ で生成され $\prod_{j\neq i} x_j$ は N_i 上で unit なので、$(f, 0)$, $(0, f)$ で生成される。

$f_i' = x_{i+1}^{\frac{1}{2}(p+1)}(f_i^-, f_i^+)$ なので. $\mathcal{F}_p^0|_{N_i} = \delta^{-1}(\mathrm{Im}\,\Phi^1)$.

逆は. $s \in \mathcal{F}_p(U) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(p)^{\oplus 2}$ とすると.

$s|_{N_i \cap U} = a e_1 + b f_i \qquad a \in \mathcal{O}(N_i \cap U),\ b \in \mathcal{O}(\frac{p+1}{2})(N_i \cap U)$

$\therefore\ s|_{H_i^0 \cap U} = b f_i|_{H_i^0}$ から. $b \in \mathcal{O}_{H_i}(\frac{p+1}{2})$ を得る.

(f_i の第1成分と第2成分に共通因子がないことに注意せよ。)

Q.E.D.

<u>Theorem</u> $\mathcal{F}_p$ は codim 2 まで locally free で2つの generator が explicit に与えられる。

<u>proof</u> $i, j \in \mathbb{F}_p$ $(i \neq j)$ とした時. $H_{ij} = H_i \cap H_j$,
$H_{ij}^0 = H_{ij} - \bigcup_{k \neq i,j} H_k$ 上で $\mathcal{F}_p$ が local に2つの section で generate されている事を見る。

<u>Lemma</u> $\zeta \in \mathcal{F}_p(U)$ $U \supset H_{ij}^0$ とする。
この時. $\exists\, \sigma_{ij} \in \mathcal{O}(\frac{p+3}{4})|_{H_{ij}}$ s.t

$$\left.\begin{aligned} \zeta|_{H_{ij}} &= \varphi_{ij}|_{H_{ij}} \cdot \sigma_{ij} \cdot f_i|_{H_{ij}} \\ &= \varphi_{ji}|_{H_{ij}} \cdot \sigma_{ij} \cdot f_j|_{H_{ij}} \end{aligned}\right\} \text{—}(*)$$

ここで. $\zeta \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(p)^{\oplus 2}$, $\sigma_{ij} \in \mathcal{O}_{H_{ij}}(\frac{p+3}{4})$, $f_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(\frac{p-1}{2})^{\oplus 2}$
と見なし. φ_{ij} は

$$\varphi_{ij} = \begin{cases} \prod_{\substack{k \sim i \\ k \neq j}} x^k & (\text{if } \alpha - \beta) \\ \prod_{\substack{k \neq i \\ k \sim j}} x^k & (\text{if } \alpha \neq \beta) \end{cases}$$

で与えられる $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(\frac{p-1}{4})$ の元である

<u>proof</u>. ξが $\delta^{-1}(\mathrm{Im}\,\Phi^{1})$ にはいっている条件を H_i°, H_j° で表え、H_{ij}° での compatibility を見ることにより、$\varphi_{ij}|_{H_{ij}}$, $f_i|_{H_{ij}}$ 等が因数分解されることを見る。計算は省略する。

このLemmaを認めて、実際に H_{ij}° 上での local な generator を書き下してみよう。以下 Lemma に出て来る φ_{ij} の様な単項式がよく出て来るので、次の様な Notation を採用する。例えば

$$f_{ij}^{+-} = \prod_{\substack{k\sim i\\ k\not\sim j}} x_k, \quad f_{ij}^{++} = \prod_{\substack{k\sim i\\ k\sim j}} x_k \quad \text{等である。}$$

以下簡単のため、$\alpha\sim\beta$ としておこう。$\alpha\not\sim\beta$ の時も同様の結果を得る。

<u>主張</u>（$\alpha\sim\beta$ とする。）下に与える $f_{ij}\in \mathcal{O}_{\mathbb{P}}\left(\frac{p-1}{4}+\frac{p-1}{2}\right)^{\oplus 2}$ と $e_2=(0,f)$ が H_{ij}° 上での $\mathcal{F}_p$ の generator を与える。

$$f_{ij} = \left(\frac{f}{f_{ij}^{++}x_ix_j},\ f_{ij}^{+-}f_i^{+}+f_{ji}^{+-}f_j^{-}\right)$$

<u>主張の証明</u>　上の f_{ij} に対して、次の等式が成り立つ。

$$f_{ij}-f_{ij}^{+-}(f_i^-,f_i^+)=(0,f_{ji}^{+-}f_j^+) \qquad \text{——}(**)$$

i と j の役割を入れかえても同様の式を得るが、例えば $(**)$ を H_{ij} に制限すると

$$f_{ij}|_{H_i} = f_{ij}^{+-}(f_i^-,f_i^+)|_{H_i} \quad \text{を得る} \qquad \text{——}(***)$$

上で、今 $\xi\in\mathcal{F}_p(U)$ の元として、Lemma を適応して、$\sigma_{ij}\in\mathcal{O}_{H_{ij}}\left(\frac{p+3}{4}\right)$ の元を得るが、$(***)$ と $(*)$ を使うと、$\tilde{\sigma}_{ij}$ を1つの $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}\left(\frac{p+3}{4}\right)$ への σ_{ij} の lifting とすると

$(3-\tilde{\sigma}_{ij} f_{ij})|_{H_{ij}}=0$ を得る。再び(***)を使って、必要ならば、$\tilde{\sigma}_{ij}$ をとりかえて、$(3-\tilde{\sigma}_{ij} f_{ij})|_{H_i}=0$ となる様にできる。(f_iの係数 f_{ij}^{+-} は、H_{ij}° の open set 上 invertible である。) また H_{ij}° の open set 上、$e_2=(0,f)$ と、f_{ij} で f_i が生成されるので、e_2 と f_{ij} が H_{ij}° 上 $\mathcal{F}_p$ を生成する。

Q.E.D.

この様に、生成元の形までわかるので、より高い codimension での解析も可能である。Key となる点は、Lemma の様に"係数" σ_{ij} を見つけることと、適当な"base"(open set に合わせて選ぶ)に関する関係式及びその係数の"invertibility"である。次の定理が証明できるが、より複雑な考察を必要とする。

<u>Theorem</u> $\mathcal{F}_p$ は codimension 3 の strata で locally free

また、codimension 4 の strata で一般に($p=5$の時を除いていつも) locally free とならないが、locally free との隔りは、よりくわしく $c_4(\mathcal{F}_p)$ で計算できる。

2. $c_4(\mathcal{F}_p)$ の計算と Shioda elliptic surface $S(4)$

1. で見た様に H_{ij} のまわりでの local section の generator の形は、$i\sim j$ の時と、$i\not\sim j$ の時で形が違う。($i\sim j$ の時にしか 1. では扱わなかった。) さらに、H_{ijk} (i,j,k は互いに異なる $\mathbb{F}_p$ の元) のまわりでの local な generator は、i,j,k がそれぞれの差が $\mathbb{F}_p^{\times 2}$ に属するか否かにより

場合分けして構成する必要がある。以下記号的に、状況を表わすために、3つの文字 i, j, k を用意して、これを vertex として、$i \sim j$ なる場合を考える時は、i と j を edge で結び、$i \nsim j$ なる場合を考える時は、edge で結ばない様にする。例えば、$i \sim j$, $j \sim k$, $i \nsim k$ に対しては、

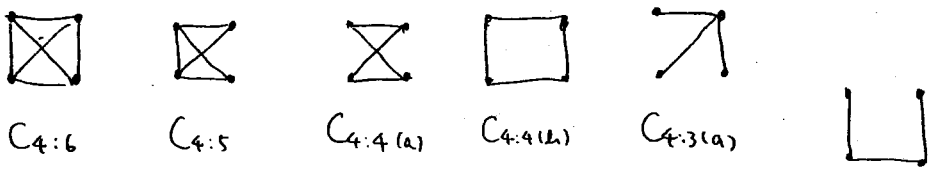
なるグラフを対応させる。さらに簡単のために、case 

という様に書く。同様に H_{ijkl} のまわりでの $\mathcal{F}_p^0$ の構造は、4つの互いに異なる元 i, j, k, l の場合分けによって調べる。

<u>3つの vertex の場合分け</u>（以下 i, j, k の permutation を modulo して行なう。）以下の様に場合分けされる。

$C_{3:0}$　$C_{3:1}$　$C_{3:2}$　$C_{3:3}$

<u>4つの vertex の場合分け</u>（同様に）



$C_{4:6}$　$C_{4:5}$　$C_{4:4(a)}$　$C_{4:4(b)}$　$C_{4:3(a)}$　$C_{4:3(b)}$

$C_{4:0}$　$C_{4:1}$　$C_{4:2(b)}$　$C_{4:2(a)}$　$C_{4:3(c)}$

$\mathcal{F}_p^0$ の構造に関して次の定理を得る。

<u>定理</u>　$\mathcal{F}_p$ には $\mathcal{F}^0 \subset \mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}^2 \subset \mathcal{F}^3 \subset \mathcal{F}^4 \subset \mathcal{F}_p$ なる filtration がはいって、次の性質を満たす

(1) $\mathcal{F}_p / \mathcal{F}^i$ の support は codim $\geq i+1$ の linear space に含まれる.

(2)
$$\mathcal{F}^1/\mathcal{F}^0 = \bigoplus_{i \in \mathbb{F}_p} \mathcal{O}_{H_i}(1-p+n_i)$$

$$\mathcal{F}^2/\mathcal{F}^1 = \bigoplus_{\substack{i,j \in \mathbb{F}_p \\ \text{相異}}} \mathcal{O}_{H_{ij}}(2-p+n_{ij})$$

$$\mathcal{F}^3/\mathcal{F}^2 = \bigoplus_{\substack{i,j,k \in \mathbb{F}_p \\ \text{相異}}} \mathcal{O}_{H_{ijk}}(3-p+n_{ijk})$$

$$\mathcal{F}^4/\mathcal{F}^3 = \bigoplus_{\substack{i,j,k,l \in \mathbb{F}_p : \text{type } 4:3(b) \\ \text{相異} \quad \text{以外}}} \mathcal{O}_{H_{ijkl}}(4-p+n_{ijkl})$$

$$\bigoplus_{ijkl : \text{type } 4:3(b)} \left\{ \mathcal{O}_{H_{ijkl}}(4-p+n_{ijkl+}) \oplus \mathcal{O}_{H_{ijkl}}(4-p+n_{ijkl-}) \right\}$$

ここで. n_i, n_{ij}, n_{ijk}, n_{ijkl}, n_{ijkl+}, n_{ijkl-} は. $\{i,j,k,l\} \subset \mathbb{F}_p$ の type によりそれぞれ決まる整数である。

例えば $\{i,j,k,l\}$ が 4:4(b) の時は.

$$n_{ijkl} = (5-p)/2 + \{x \mid i+x, j+x, k+x, l+x\}$$

である。

この記述を使って. $c_i(\mathcal{F}_p)$ $(i=1,2,3,4)$ を求めることができる。

<u>定理</u> $c_1(\mathcal{F}_p) = p$, $c_2(\mathcal{F}_p) = \frac{1}{2}p(p-1)$ $c_3(\mathcal{F}_p) = 0$

$$c_4(\mathcal{F}_p) = -\frac{5}{26} \# \left(\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{F}_p^4 \mid x_i \neq x_j, \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \text{ は type } 4:4(b) \} \right)$$

さて、$\mathbb{F}_p$ 内の4点集合で $C_4:4(b)$ type の数であるが、これは容易に、$C_4:6$ type の4点集合の数で表わされることがわかる。以下 $C_4:6$ type の4点集合が Shioda elliptic surface の有理点と関係づいて、それにより Gauß和で書けることを見てみよう。$\{i, j, k, l\}$ が type $C_4:6$ とすると、

$j-i=x^2$, $k-j=y^2$, $l-k=z^2$, $k-i=s^2$, $l-j=t^2$

$l-i=u^2$, $(x, y, z, s, t, u \in \mathbb{F}_p)$ とかけ、さらに (x, y, z, s, t, u) は、関係式

$$x^2+y^2=s^2, \quad y^2+z^2=t^2, \quad x^2+y^2+z^2=u^2$$

を満たす。$X=x/y$, $Z=z/y$, $S=s/y$, $T=t/y$, $U=u/y$ とおけば、X, Z, S, T, U は

$$X^2+1=S^2, \quad 1+Z^2=T^2 \quad X^2+1+Z^2=U^2 \quad \text{——} (*)$$

を満たし、これは、Shioda elliptic surface $S(4)$ の定義方程式に他ならない。塩田先生の "Algebraic cycles on certain K3 surface in char p" の結果から、これは $E=\{(a, b) \mid a^2=b^4+1\}$ で定義される elliptic curve の2つの直積から dominate される。具体的には以下の様に表わされる。今 $E \times E$ の点 (a, b, c, d) ; $a^2=b^4+1$, $c^2=d^4+1$ として、

$\alpha=bd$, $\beta=d/b$, $\gamma=acd/b$ とおくと、

$\gamma^2=(\alpha^2+\beta^2)(1+\alpha^2\beta^2)$ を満たす。この時、

$$X=\frac{1-\alpha^2}{2\alpha}, \quad Z=\frac{1-\beta^2}{2\beta}, \quad S=\frac{1+\alpha^2}{2\alpha}, \quad T=\frac{1+\beta^2}{2\beta}, \quad U=\gamma/2\alpha\beta$$

とおくと $(*)$ の式が満たされる。これから E の有理点の数の計算に帰着し、それは Gauß和で表わされる。

3. $\mathfrak{F}_p$ 上の群作用

まず、$\mathfrak{F}_p$ 上の群作用が Morocho-Mumford の vector bundle の時と同様に構成される。$V = \mathrm{Map}(\mathbb{F}_p, \mathbb{C})$, V 上の Symmetric polynomial $\mathrm{Sym}(V)$, 及び $\mathrm{Sym}(V)$ 上の rank 2 free module への作用をまず定義しよう。今 $\psi : \mathbb{F}_p \to \mathbb{C}^\times$ を1つの additive character として fix しよう。$\mathbb{F}_p \oplus \mathbb{F}_p x \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}_p x^{\frac{p-1}{2}}$ の元 $C = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{\frac{p-1}{2}} x^{\frac{p-1}{2}}$ に対して $h_C \in \mathrm{Map}(\mathbb{F}_p, \mu_p)$ を $h_C(x) = \psi(C(x))$ で定義すると、値ごとのかけ算により $h_C \in \mathrm{Aut}(V)$ の元を定める。$a \in \mathbb{F}_p^\times$, $b \in \mathbb{F}_p$ に対して $\mathbb{F}_p$ 上の自己同型 $x \mapsto ax+b$ が定まるが、これにより誘導される、V 上の自己同型を $(ax+b)^*$ とかく。$h(C)$ と $(ax+b)^*$ の交換関係は

$$\begin{cases} h_C \circ (ax+b)^* = (ax+b)^* \circ h_{C'} \\ C'(ax+b) = C(x) \end{cases}$$

となっているので、$\{(ax+b)^* \mid a \in \mathbb{F}_p^\times, b \in \mathbb{F}_p\}$ と $\mathbb{F}_p \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}_p x^{\frac{p-1}{2}}$ の半直積 $G_p = \{(ax+b)^*\} \ltimes (\mathbb{F}_p \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}_p x^{\frac{p-1}{2}})$ を $(ax+b)^* C(x) (ax+b)^{*-1} = C(ax+b)$ で定義すると $\mathbb{P}(V)$ 上の sheaf $\mathcal{O}(p)$ は G_p linearizable である。

x_i (= i の characteristic function) に対して

$(ax+b)^{*-1} x_i = x_{ai+b}$, $\quad h_C x_i = \psi(C(i)) x_i$

なので、$f_i^+ = \prod_{j \sim i} x_j$ 上の action を見ると、

$$\begin{aligned} ((ax+b)^{*-1} h_C) f_i^+ &= \prod_{j \sim i} \psi(C(j)) \prod_{j \sim i} (ax+b)^{*-1} x_j \\ &= \prod_{j \sim i} \psi(C(j)) f_{ai+b}^{\pm} \end{aligned}$$

($\pm$ は $a \in \mathbb{F}_p^{\times 2} \Rightarrow +$, $a \notin \mathbb{F}_p^{\times 2} \Rightarrow -$)

となる。ここでその係数を計算すると、

$$\prod_{j\sim i}\psi(c(j)) = \psi\Big(\sum_{j\sim i}\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(p-1)} c_k j^k\Big) = \psi\Big(\sum_{u\in\mathbb{F}^\times/\pm1}\sum_k c_k(i+u^2)^k\Big)$$

$$= \Big\{\psi\Big(\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(p-1)} c_k i^k\Big)\,\psi\big(c_{\frac{1}{2}(p-1)}\big)\Big\}^{\frac{1}{2}(p-1)}$$

となる。次に multiplicative cocycle $\kappa : G_p \longrightarrow \mu_p$ を $\kappa((ax+b)^{*-1}hc) = \psi(c_{\frac{1}{2}(p-1)})$ で定義する実際、κ は

$$\kappa(gg') = \kappa(g)^{\varepsilon(g')}\kappa(g'), \quad \varepsilon((ax+b)^{*-1}h) = \begin{cases} 1 & a\in\mathbb{F}_p^{\times 2} \\ -1 & a\notin\mathbb{F}_p^{\times 2}\end{cases} \qquad \text{—}(**)$$

を満たす。$\mathcal{O}(p)\oplus\mathcal{O}(p)$ への G_p-linearization と $\mathcal{O}(p)$ への G_p-linearization と κ を用いて

$$g : \mathcal{O}(p)\oplus\mathcal{O}(p) \longrightarrow \mathcal{O}(p)\oplus\mathcal{O}(p) \ ;\ (a,b) \longmapsto$$

$$\begin{cases} \big(\kappa(g)^{\frac{p-1}{2}} g^*(a),\ \kappa(g)^{-\frac{p-1}{2}} g^*(b)\big) & (\text{if } \kappa(g)=1) \\ \big(\kappa(g)^{-\frac{p-1}{2}} g^*(b),\ \kappa(g)^{\frac{p-1}{2}} g^*(a)\big) & (\text{if } \kappa(g)=-1)\end{cases}$$

で定義すると、上の $(**)$ より これが G_p-linearization になっていることがわかる。さらに $(f,0)$, $(0,f)$, (f_i^-, f_i^+) で生成される module がこの action で stable であることから、$\mathcal{F}_p$ の G_p-linearization を与えていることがわかる。