代数幾何学シンポジウム記録
1993年度 pp.77-95

On p-adic Poincaré series and equations defining Shimura curves

日本女子大学 理学部 数物科学科 栗原 章

kurihara@tansei.cc.u-tokyo.ac.jp

1 序

p を素数とし、Γ を $PGL_2(\mathbf{Q}_p)$ の torsion-free discrete subgroup で $\Gamma\backslash PGL_2(\mathbf{Q}_p)$ が compact なものとする。 Mumford の p進上半平面を $\mathcal{P}(\Delta)$ と書くことにする([10])。$\mathcal{P}(\Delta)$ は $PGL_2(\mathbf{Q}_p)$ が作用する $\mathbf{Z}_p$ 上の formal scheme である。 $\mathcal{P}(\Delta)$ の Γ による商を P_Γ とすると、これは $\mathbf{Z}_p$ 上の曲線である。 $\omega_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbf{Z}_p}$ を dualizing sheaf とする。整数 $k \geq 0$ に対して、 $\mathbf{Z}_p$-module $H^0(\mathcal{P}(\Delta), \omega_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbf{Z}_p}^{\otimes k})^\Gamma$ は Γ に関する重さ $2k$ の保型形式のなす空間である。

この報告では、適当な条件を満たす $\gamma_1, \ldots, \gamma_r \in \Gamma$ $(r \geq 1)$ と整数 $k_1, \ldots, k_r \geq 1$ に対して、 p進 Poincaré 級数 $\varphi_\Gamma(\gamma_1, \cdots, \gamma_r; k_1, \cdots, k_r)$ を定義し、それを調べる。 p進 Poincaré 級数 $\varphi_\Gamma(\gamma_1, \cdots, \gamma_r; k_1, \cdots, k_r)$ は重さ $2k$ (但し、$k = k_1 + \cdots + k_r$) の Γ に関する保型形式となるが、 $k \geq 1$ に対して、 $H^0(\mathcal{P}(\Delta), \omega_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbf{Z}_p}^{\otimes k})^\Gamma$ はこの様な p進 Poincaré 級数たちで張られることが分かる。

B を $\mathbf{Q}$ 上の定符号四元数環で、 $B \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p \cong M_2(\mathbf{Q}_p)$ となるものとする。上記 Γ を $B^\times/\mathbf{Q}^\times$ の部分群であると仮定する。 $k \geq 1$ に対して、 de Shalit ([3]) による Eichler-志村 同型

$$I : H^0(\mathcal{P}(\Delta), \omega_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbf{Z}_p}^{\otimes k})^\Gamma \bigotimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p \xrightarrow{\cong} H^1(\Gamma, V_{2k-2})$$

がある。ここで、 V_{2k-2} は $PGL_2(\mathbf{Q}_p)$ の $2k-2$ 次の対称テンソル表現である。表現 V_{2k-2} は $\mathbf{Q}$-structure $V_{2k-2,\mathbf{Q}}$ を持ち、従って、 $H^0(\mathcal{P}(\Delta), \omega_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbf{Z}_p}^{\otimes k})^\Gamma \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$ も $H^1(\Gamma, V_{2k-2,\mathbf{Q}})$ に対応して $\mathbf{Q}$-structure を持つ。 $\varphi \in H^0(\mathcal{P}(\Delta), \omega_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbf{Z}_p}^{\otimes k})^\Gamma$ に対して、 $I(\varphi)$ は φ に付随する $\mathcal{P}(\Delta)$ 上の V_{2k-2}-valued のある微分形式の vanishing cycle たち上での residue たちで与えられる。 p進 Poincaré 級数 φ に対して、これら residue は公式 $\sum_{n\geq 0} q^n = \frac{1}{1-q}$ のみを用いて有限の形に表わされることが分かり、その結果

$$I(\varepsilon\varphi) \in H^1(\Gamma, V_{2k-2,\mathbf{Q}}) \quad (\exists \varepsilon \in \mathbf{Q}_p^\times, \varepsilon^2 \in \mathbf{Q}^\times)$$

となる。$\varepsilon\varphi$ を有理化された p 進 Poincaré 級数と呼ぶことにする。Hecke 作用素の有理化された p 進 Poincaré 級数への作用は $H^1(\Gamma, V_{2k-2,\mathbf{Q}})$ への作用を考えることにより、rational arithmetic の範囲内で計算することができる。

B の極大整環 $\mathcal{O}$ をとり、

$$\Gamma(1) = \left\{ \gamma \in \mathcal{O} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\frac{1}{p}] \mid N_{B/\mathbf{Q}}(\gamma) = 1 \right\} / \{\pm 1\}$$

とおく。Čerednik ([1, 2]) により $P_{\Gamma(1)}$ は以下のように志村曲線 ([12, 13]) である。$\widehat{B}$ を $\mathbf{Q}$ 上の不定符号四元数環で $\widehat{B}$ の判別式が p と B の判別式との積に等しいものとする。$\widehat{\mathcal{O}}$ を $\widehat{B}$ の極大整環とする。同型 $\widehat{B} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \cong M_2(\mathbf{R})$ を固定し、

$$\widehat{\Gamma(1)} = \left\{ \gamma \in \widehat{\mathcal{O}} \mid N_{\widehat{B}/\mathbf{Q}}(\gamma) = 1 \right\} / \{\pm 1\}$$

とおく。$S_{\widehat{\Gamma(1)}}$ を $\widehat{\Gamma(1)}$ に対応する志村曲線とするとき、これは $\mathbf{Q}$ 上の代数曲線であるが、$P_{\Gamma(1)} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$ は $S_{\widehat{\Gamma(1)}}$ と $\mathbf{Q}_p$ の不分岐二次拡大上で同型である。この同型を用いて、$S_{\widehat{\Gamma(1)}}$ の定義方程式を計算することを試みる。

不定符号四元数環 $\widehat{B}$ の判別式が 39 のときの志村曲線 $S_{\widehat{\Gamma(1)}}$ の例を後で与える。この例に関しては、環 $\oplus_{k\geq 0} H^0(\mathcal{P}(\Delta), \omega_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbf{Z}_p}^{\otimes k})^{\Gamma(1)}$ の生成元を有理化された p 進 Poincaré 級数の $\mathbf{Q}$ 係数一次結合として与え、それらの *local expansion* を p $(= 3, 13)$ の適当な巾を法として計算し、それを用いて、ある Hecke common eigenform たちの満たす $\mathbf{Q}_p$ 上の代数方程式の係数の p 進近似値を求める。これらの係数の適当な比は有理数であるが、我々は p 進近似値からその有理数が何であるか候補を得る。これから、志村曲線 $S_{\widehat{\Gamma(1)}}$ の $\mathbf{Q}$ 上の定義方程式を得る。(従って、厳密な意味では証明にはなってはいない。)

志村曲線 $S_{\widehat{\Gamma(1)}}$ の定義方程式のいくつかの例は [7, 6] で与えられていた。それらの例について $\widehat{B}$ の判別式は 6, 10, 14, 15, 21, 22, 33, 46 であったが、$S_{\widehat{\Gamma(1)}}$ の種数は高々 1 であった。次の表のように、いくつかの例が上記の判別式 39 のときと同様に計算された。森田 [9] によって、志村曲線 $S_{\widehat{\Gamma(1)}}$ は判別式を割らない素数 ℓ については good reduction を持ち、従って Hasse L の Euler factor は重さ 2 の保型形式に作用する Hecke operator $T(\ell)$ によって記述される。次の表の曲線についてはこの条件は多くの素数 ℓ について満たされている。従って、非常に確からしいのである。

橋本 - 村林 [4] は志村曲線 $S_{\widehat{\Gamma(1)}}$ を二つの Humbert surface の intersection として考察している。

$\widehat{B}$の判別式	$S_{\widehat{\Gamma(1)}}$の種数	$S_{\widehat{\Gamma(1)}}$の定義方程式
6	0	$x^2 + y^2 + 3 = 0$
10	0	$x^2 + y^2 + 2 = 0$
14	1	$(x^2 - 13)^2 + 7^3 + 2y^2 = 0$
15	1	$(x^2 + 243)(x^2 + 3) + 3y^2 = 0$
21	1	$x^4 - 658x^2 + 7^6 + 7y^2 = 0$
22	0	$x^2 + y^2 + 11 = 0$
26	2	$y^2 = -13^2x^6 - 24x^4 + 19x^2 - 2$
33	1	$x^4 + 30x^2 + 3^8 + 3y^2 = 0$
34	1	$\begin{cases} y^2 &= -(44x^2 - 68x + 27) \\ w^2 &= x^2 + 1 \end{cases}$
35	3	$\begin{cases} y^2 &= x \\ w^2 &= -(7x + 1)(x^3 + 197x^2 + 51x + 7) \end{cases}$
38	2	$y^2 = -19x^6 - 82x^4 - 59x^2 - 16$
39	3	$\begin{cases} y^2 &= 2x^2 + 6x + 5 \\ w^2 &= -(3x^2 + 12x + 13)(x^2 + 12x + 39) \end{cases}$
46	1	$(x^2 - 45)^2 + 23 + 2y^2 = 0$
51	3	$\begin{cases} y^2 &= -x \\ w^2 &= -(x - 3)(243x^3 - 235x^2 - 31x - 1) \end{cases}$
55	3	$\begin{cases} y^2 &= 4x^2 + 1 \\ w^2 &= -(3x^2 - x + 1)(x^2 + x + 3) \end{cases}$
57	3	$\begin{cases} y^2 &= -(43x^2 + 16x + 4) \\ w^2 &= (4x - 1)(4x^3 + 24x - 1) \end{cases}$
58	2	$-2y^2 = 29^2x^6 + 431x^4 + 39x^2 + 1$
62	3	$\begin{cases} y^2 &= x \\ w^2 &= -(64x^4 + 99x^3 + 90x^2 + 43x + 8) \end{cases}$
65	5	$\begin{cases} x^2 - x - 3 &= y^2 + 3yz + z^2 \\ xz &= y \\ -2w^2 &= 5x^2 - 11x - 1 + 9y^2 + 11yz + 3z^2 \end{cases}$

2　p進 Poincaré 級数

まず、Mumford curve ([10]) について少し復習しておく。p を素数とする。$PGL_2(\mathbf{Q}_p)$ の Bruhat-Tits building を Δ と書くことにする。$PGL_2(\mathbf{Q}_p)$ は左から Δ に作用する。Δ の頂点の集合と向き付けられた edge の集合をそれぞれ $Ver(\Delta)$ と $Edge(\Delta)$ と書くことにする。$PGL_2(\mathbf{Z}_p)$ の全ての元によって固定される頂点を v_0 とし、v_0 から始まり $\begin{bmatrix} 1 & \\ & p \end{bmatrix} v_0$ で終わる edge を σ_0 とする。$\sigma \in Edge(\Delta)$ に対して、その始点と終点をそれぞれ $o(\sigma)$ と $t(\sigma)$ と表わすことにする。更に、$\sigma = [o(\sigma), t(\sigma)]$ とも書くことにする。$\sigma \in Edge(\Delta)$ の逆向きの edge を $\bar{\sigma}$ と書くことにする。

射影直線 $P = \mathbf{P}^1_{\mathbf{Z}_p} = \mathrm{Proj}\ \mathbf{Z}_p[X_1, X_2]$ と $P_\eta = \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Proj}\ \mathbf{Q}_p[X_1, X_2]$ を考える。X_1, X_2 は射影座標で、これに関して $PGL_2(\mathbf{Q}_p)$ は P_η に左から作用する。環 $A_\eta = \mathbf{Q}_p[X_1^2, X_1X_2, X_2^2]$ を考える。$PGL_2(\mathbf{Q}_p)$ は A_η に右から作用する。A_η の部分環 $A_{v_0} = \mathbf{Z}_p[X_1^2, X_1X_2, X_2^2]$ と $A_{\sigma_0} = \mathbf{Z}_p[pX_1^2, X_1X_2, X_2^2]$ を考える。$v \in Ver(\Delta)$ に対して、$g \in PGL_2(\mathbf{Q}_p)$ を $v = gv_0$ となるようにとり $A_v = (g^{-1})^* A_{v_0} \subset A_\eta$ また、$P_v = \mathrm{Proj}\ A_v$ とおく。P_v^{imm} を

$$P_v^{imm} = P_v \setminus \Big(P_v \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p \text{ のすべての } \mathbf{F}_p\text{-rational points} \Big)$$

によって定義する。同様に、$\sigma \in Edge(\Delta)$ に対して、$g \in PGL_2(\mathbf{Q}_p)$ を $\sigma = g\sigma_0$ となるようにとり $A_\sigma = (g^{-1})^* A_{\sigma_0} \subset A_\eta$ とおく。$A_{\bar{\sigma}} = A_\sigma$ である。$P_\sigma = \mathrm{Proj}\ A_\sigma$ とおく。P_σ の special fibre は交わる二本の $\mathbf{F}_p$- 射影直線からなる。P_σ^{imm} を

$$P_\sigma^{imm} = P_\sigma \setminus \Big(P_\sigma \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p \text{ の double point でないすべての } \mathbf{F}_p\text{-rational points} \Big)$$

によって定義する。$v \in Ver(\Delta)$ に対する P_v^{imm} と $\sigma \in Edge(\Delta)$ に対する P_σ^{imm} を貼り合わせて separated scheme $P(\Delta)$ を得る。

$$P(\Delta) = \bigcup_{v \in Ver(\Delta)} P_v^{imm} \cup \bigcup_{\sigma \in Edge(\Delta)} P_\sigma^{imm}$$

$P(\Delta)$ の special fibre に沿っての formal completion $\mathcal{P}(\Delta)$ が Mumford の p進上半平面である。

Γ を $PGL_2(\mathbf{Q}_p)$ の torsion-free discrete subgroup で $\Gamma \backslash PGL_2(\mathbf{Q}_p)$ が compact なものとする。すると、商 $\Gamma \backslash \mathcal{P}(\Delta)$ を得るが、これは algebrize される。即ち、$\mathbf{Z}_p$-proper scheme P_Γ でその special fibre に沿った formal completion が $\Gamma \backslash \mathcal{P}(\Delta)$ と同型となるものが唯一つ存在する。

少し言葉を導入する。v_1, $v_2 \in Ver(\Delta)$ に対して、 oriented edge $\{\sigma_n\}_{1\le n\le d}$ で $v_1 = o(\sigma_1)$, $t(\sigma_n) = o(\sigma_{n+1})$ $(1 \le n \le d-1)$, $\sigma_n \neq \overline{\sigma_{n+1}}$ $(1 \le n \le d-1)$, $v_2 = t(\sigma_d)$ となるものが存在するとき、 v_1 と v_2 の距離は d であるといい、$dist(v_1, v_2) = d$ と記す。 Δ の二つの部分複体 S_1, S_2 に対しては $dist(S_1, S_2) = \min\{dist(v_1, v_2) | v_1 \in S_1, v_2 \in S_2\}$ とおく。

列 $\{\sigma_n\}_{n\ge1}$ (但し、$\sigma_n \in Edge(\Delta)$) は $t(\sigma_n) = o(\sigma_{n+1})$ $(n \ge 1)$ かつ $\sigma_n \neq \overline{\sigma_{n+1}}$ $(n \ge 1)$ のとき *infinite path* と呼ばれる。

二つの infinite path $\{\sigma_n\}_{n\ge1}$ と $\{\tau_n\}_{n\ge1}$ に対して、 $\sigma_{s+j} = \tau_{t+j}$ $(j \ge 0)$ となる $s, t \ge 1$ があるとき、これらは*equivalent*であるという。

infinite path の equivalence class と $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ の点とは一対一に対応する。(対応するものどうしは$PGL_2(\mathbf{Q}_p)$ において等しい固定化群を持つ。) infinite path に対応する点はその limit point という。

列 $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ ($\sigma_n \in Edge(\Delta)$) は $t(\sigma_n) = o(\sigma_{n+1})$ $(n \in \mathbf{Z})$ で $\sigma_n \neq \overline{\sigma_{n+1}}$ $(n \in \mathbf{Z})$ のとき *doubly infinite path* と呼ばれる。

点 $\alpha, \beta \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ $(\alpha \neq \beta)$ に対して、 doubly infinite path $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ で $\{\overline{\sigma_{-n}}\}_{n\ge1}$ の limit point が α で $\{\sigma_n\}_{n\ge1}$ の limit point が β となるものが唯一つ存在する。この doubly infinite path を $[\alpha, \beta]$ と記す。

$\omega_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbf{Z}_p}$ を $\mathcal{P}(\Delta)$ の $\mathbf{Z}_p$ 上の dualizing sheaf とする。点α, $\beta \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ $(\alpha \neq \beta)$ に対して、 $s(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{z-\beta} - \frac{1}{z-\alpha}\right) dz$ とおく。ここで、 $z = X_1/X_2$。

次のことが分かる。

Proposition 2.1 次が成り立つ。

(1) $s(\alpha, \beta) \in H^0(\mathcal{P}(\Delta), \omega_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbf{Z}_p})$

(2) 頂点 v に対応する $\mathcal{P}(\Delta)$ の成分での $s(\alpha, \beta)$ の *vanishing order* は $dist(v, [\alpha, \beta])$ である。

さて、p進Poincaré級数を定義する。 $\gamma_1, \ldots, \gamma_r \in \Gamma$ $(r \ge 1)$ が与えられているとする。ここで、 $\gamma_i \neq 1$ ($i = 1, \ldots, r$) とする。 α_i と β_i をそれぞれ$\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ における γ_i の repulsive fixed point 及び attractive fixed point とする。従って、特に $\gamma_i^* s(\alpha_i, \beta_i) = s(\alpha_i, \beta_i)$ である。 $\{\alpha_i, \beta_i\} \cap \{\alpha_j, \beta_j\} = \emptyset$ ($i \neq j$) と仮定する。整数 $k_1, \ldots, k_r \ge 1$ が与えられているとする。 $k = k_1 + \cdots + k_r$ また $s = s(\alpha_1, \beta_1)^{k_1} \cdots s(\alpha_r, \beta_r)^{k_r}$ とおく。

このとき、p進 Poincaré 級数 $\varphi_\Gamma(\gamma_1,\ldots,\gamma_r;k_1,\ldots,k_r)$ を次で定義する。

$$\varphi_\Gamma(\gamma_1,\ldots,\gamma_r;k_1,\ldots,k_r)=\begin{cases}\sum_{\gamma\in\langle\gamma_1\rangle\backslash\Gamma}\gamma^*s & (\ r=1\ \text{のとき}\ )\\ \\ \sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^*s & (\ r\geq 2\ \text{のとき}\ )\end{cases}$$

ここで、γ_1 によって生成される無限巡回群を $\langle\gamma_1\rangle$ とした。

Proposition 2.2 $\varphi_\Gamma(\gamma_1,\ldots,\gamma_r;k_1,\ldots,k_r)\in H^0(\mathcal{P}(\Delta),\omega^{\otimes k}_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbf{Z}_p})^\Gamma$

$k=1$ のときは、このような p進 Poincaré 級数は既に [8] に表われている。対応 $\gamma\mapsto\varphi_\Gamma(\gamma;1)$ は $\gamma\in\Gamma$ について加法的である。

Proposition 2.3 各 $k\geq 1$ に対して、 $H^0(\mathcal{P}(\Delta),\omega^{\otimes k}_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbf{Z}_p})^\Gamma$ はこのようなp進 *Poincaré* 級数で張られる。

3 Eichler-志村 同型 と Residue

まず Eichler-志村 同型([3]) について復習する。 $v\in Ver(\Delta)$ と $\sigma\in Edge(\Delta)$ に対して、 $V_{v,2k}$, $V_{\sigma,2k}$, V_{2k} をそれぞれ A_v, A_σ, A_η の次数が $2k$ の部分とする。 $z=X_1/X_2$ とおいていたが、混乱を避けるために $u=X_1$ 及び $v=X_2$ と書くことにする。すると、

$$V_{2k}=\mathbf{Q}_pu^{2k}+\mathbf{Q}_pu^{2k-1}v+\cdots+\mathbf{Q}_puv^{2k-1}+\mathbf{Q}_pv^{2k}$$

は $PGL_2(\mathbf{Q}_p)$ の $2k$ 次の対称テンソル表現である。 U_v を P_v^{imm} のその special fibre に沿っての formal completion とする。各 $v\in Ver(\Delta)$ に対して、 U_v 上の coherent sheaf $V_{v,2k}\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathcal{O}_{U_v}$ 及び $V_{v,2k}\otimes_{\mathbf{Z}_p}\omega_{U_v/\mathbf{Z}_p}$ が考えられる。$\eta=(u-vz)^2/dz$ とおく。すると $k\geq 0$ と $v\in Ver(\Delta)$ に対して $\eta^k\in H^0(U_v,V_{v,2k}\otimes_{\mathbf{Z}_p}\omega^{\otimes(-k)}_{U_v/\mathbf{Z}_p})$ である。

$k\geq 1$ についての $\varphi\in H^0(\mathcal{P}(\Delta),\omega^{\otimes k}_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbf{Z}_p})$ と $\sigma\in Edge(\Delta)$ に対して、 *residue* $\mathrm{Res}_\sigma(\eta^{k-1}\varphi)\in V_{\sigma,2k-2}$ は次のように定義される。まず、 $o(\sigma)=v_0$ であると仮定する。すると、

$$\left.\frac{\eta^{k-1}\varphi}{dz}\right|_{U_{v_0}}\in H^0(U_{v_0},V_{v_0,2k-2}\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathcal{O}_{U_{v_0}})=V_{v_0,2k-2}\otimes_{\mathbf{Z}_p}H^0(U_{v_0},\mathcal{O}_{U_{v_0}})$$

であるから $\left.\eta^{k-1}\varphi\right|_{U_{v_0}}$ は次のような表示を持つ。

$$\left.\eta^{k-1}\varphi\right|_{U_{v_0}}=\left\{\sum_{a\in\mathbf{F}_p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{a,n}}{(z-\alpha(a))^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{\infty,n}}{(\frac{1}{z}-\frac{1}{\beta})^n}\right\}dz$$

ここで、各 $a \in \mathbf{F}_p$ に対して、 $\alpha(a) \in \mathbf{Z}_p$ は a の持ち上げとしそれを固定する。また、$c_{a,n}$, $c_{\infty,n} \in V_{v_0,2k-2}$ であって

$$\begin{aligned} c_{a,n} &\rightarrow 0 \quad \text{各} a \in \mathbf{F}_p \text{について } n \rightarrow \infty \text{のとき} \\ c_{\infty,n} &\rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \text{のとき} \end{aligned}$$

である。この様な表示を $\eta^{k-1}\varphi$ の v_0 における *local expansion* と呼ぶことにする。次のようにおく。

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{v_0,a}(\eta^{k-1}\varphi) &= c_{a,1} \ (\text{各 } a \in \mathbf{F}_p \text{ について}) \\ \mathrm{Res}_{v_0,\infty}(\eta^{k-1}\varphi) &= -\sum_{a \in \mathbf{F}_p} c_{a,1} \end{aligned}$$

一方、次のような自然な全単射がある。

$$\begin{aligned} \{\sigma \in Edge(\Delta) | o(\sigma) = v_0\} &\xrightarrow{D} \mathbf{P}^1(\mathbf{F}_p) = \mathbf{F}_p \cup \{\infty\} \\ t(\sigma) = \begin{bmatrix} p & \alpha(a) \\ & 1 \end{bmatrix} v_0 \text{ であるような } \sigma &\mapsto a \\ t(\sigma) = \begin{bmatrix} 1 & \\ & p \end{bmatrix} v_0 \text{ であるような } \sigma &\mapsto \infty \end{aligned}$$

そこで、 $\mathrm{Res}_\sigma(\eta^{k-1}\varphi) = \mathrm{Res}_{v_0,D(\sigma)}(\eta^{k-1}\varphi)$ とおく。一般の $\sigma \in Edge(\Delta)$ については、$\mathrm{Res}_\sigma(\eta^{k-1}\varphi)$ を任意の $g \in PGL_2(\mathbf{Q}_p)$ に対して、 $\mathrm{Res}_\sigma(\eta^{k-1}g^*\varphi) = \mathrm{Res}_{g\sigma}(\eta^{k-1}\varphi)$ であるように決める。ここで、任意の $g \in PGL_2(\mathbf{Q}_p)$ に対して、 $g^*\eta = \eta$ であることに注意する。さてこのとき、$\mathrm{Res}_{\bar{\sigma}}(\eta^{k-1}\varphi) = -\mathrm{Res}_\sigma(\eta^{k-1}\varphi)$ であり、これは $V_{o(\sigma),2k-2} \cap V_{t(\sigma),2k-2} = V_{\sigma,2k-2} \subset V_{2k-2}$ に含まれる。

つぎのようにおく。

$$C^1_{har}(V_{2k-2}) = \left\{ f : Edge(\Delta) \rightarrow V_{2k-2} \;\middle|\; \begin{array}{l} f(\bar{\sigma}) = -f(\sigma) \ (\forall \sigma \in Edge(\Delta)), \\ \sum_{\substack{\sigma \in Edge(\Delta) \\ o(\sigma) = v}} f(\sigma) = 0 \ (\forall v \in Ver(\Delta)). \end{array} \right\}$$

さて、Γ を $PGL_2(\mathbf{Q}_p)$ の discrete subgroup で $\Gamma \backslash PGL_2(\mathbf{Q}_p)$ が compact であるようなものとする。 (torsion-free でなくてもいい。) $k \geq 1$ に対して、写像

$$I : H^0(\mathcal{P}(\Delta), \omega^{\otimes k}_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbf{Z}_p})^\Gamma \bigotimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p \longrightarrow C^1_{har}(V_{2k-2})^\Gamma$$

を $I(\varphi)(\sigma) = \mathrm{Res}_\sigma(\eta^{k-1}\varphi)$ によって定義する。すると I は同型写像である。更に、Γ が torsion-free で算術的であるときは自然な同型 $C^1_{har}(V_{2k-2})^\Gamma \simeq H^1(\Gamma, V_{2k-2})$ がある ([3]) 。

$s = s(\alpha_1,\beta_1)^{k_1}\cdots s(\alpha_r,\beta_r)^{k_r}$ と $\varphi = \varphi_\Gamma(\gamma_1,\ldots,\gamma_r;k_1,\ldots,k_r)$ を前節のようにとる。以下では、$\sigma \in Edge(\Delta)$ に対して、$\mathrm{Res}_\sigma(\eta^{k-1}\varphi)$ を計算する。

$i = 1,\ldots,r$ に対して、$\rho_{\alpha_i} = \mathrm{Res}_{\alpha_i}(\eta^{k-1}s)$ 及び $\rho_{\beta_i} = \mathrm{Res}_{\beta_i}(\eta^{k-1}s)$ とおく。ここの residue は $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}_p}$ における通常の residue である。

初等的計算によって、

Proposition 3.1 次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\rho_{\beta_1} &= \prod_{i=1}^{r}(\beta_i-\alpha_i)^{k_i}\cdot(-1)^{k_1-1}(u-\beta_1 v)^{2k-k_1-1}\\
&\quad\times\sum\binom{k_1-1+i_1}{i_1}\binom{k_2-1+i_2}{i_2}\binom{k_2-1+j_2}{j_2}\cdots\binom{k_r-1+i_r}{i_r}\binom{k_r-1+j_r}{j_r}\\
&\quad\times\frac{(u-\alpha_1 v)^{i_1}(u-\alpha_2 v)^{i_2}(u-\beta_2 v)^{j_2}\cdots(u-\alpha_r v)^{i_r}(u-\beta_r v)^{j_r}}{(\beta_1-\alpha_1)^{k_1+i_1}(\beta_1-\alpha_2)^{k_2+i_2}(\beta_1-\beta_2)^{k_2+j_2}\cdots(\beta_1-\alpha_r)^{k_r+i_r}(\beta_1-\beta_r)^{k_r+j_r}}
\end{aligned}
$$

ここで、和は $i_1+i_2+j_2+\cdots+i_r+j_r = k_r-1$ に関してとるものとする。他の ρ_{α_i} 及び ρ_{β_i} も同様に表わされる。

さて、$\mathrm{Res}_\sigma(\eta^{k-1}\varphi)$ は次のようにして計算することができる。$A = \{\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_r,\beta_r\}$ とおく。また、$r=1$ のとき $C = \langle\gamma_1\rangle\backslash\Gamma$ 、$r \geq 2$ のとき $C = \Gamma$ とおく。

$\sigma \in Edge(\Delta)$ に対して、点 $\alpha \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ で、α を limit point とする infinite path $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ で、ある $n \geq 1$ に対して $\sigma = \sigma_n$ となるものが存在するものの全体を $\Sigma(\sigma)$ と書く。そのとき、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}_\sigma(\eta^{k-1}\varphi) &= \sum_{\gamma\in C}\mathrm{Res}_\sigma(\gamma^*\eta^{k-1}s)\\
&= \sum_{\gamma\in C}\sum_{\alpha\in\gamma^{-1}A\cap\Sigma(\sigma)}\mathrm{Res}_\alpha(\gamma^*\eta^{k-1}s)\\
&= \sum_{\gamma\in C}\sum_{\gamma\alpha\in A\cap\Sigma(\gamma\sigma)}\gamma^*\mathrm{Res}_{\gamma\alpha}(\eta^{k-1}s)\\
&= \sum_{\gamma\in C}\gamma^*\sum_{\alpha\in A\cap\Sigma(\gamma\sigma)}\rho_\alpha
\end{aligned}
$$

である。$\sigma \in Edge(\Delta)$ に対して、$f : Edge(\Delta) \to V_{2k-2}$ を $f(\sigma) = \sum_{\alpha\in A\cap\Sigma(\sigma)}\rho_\alpha$ によって定義する。すると、$\rho_{\alpha_1}+\rho_{\beta_1}+\cdots+\rho_{\alpha_r}+\rho_{\beta_r} = 0$ より $f(\overline{\sigma}) = -f(\sigma)$ また $I(\varphi) = \sum_{\gamma\in C}\gamma^* f$ を得る。

まず、$r=1$ のときを考える。$[\alpha_1,\beta_1]=\{\sigma_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ とおくと、f は

$$f(\sigma)=\begin{cases}\rho_{\beta_1} & \sigma=\sigma_n\ (n\in\mathbf{Z})\ \text{のとき}\\ \rho_{\alpha_1} & \sigma=\overline{\sigma_n}\ (n\in\mathbf{Z})\ \text{のとき}\\ 0 & \text{その他のとき}\end{cases}$$

で与えられる。$F_1: Edge(\Delta)\to V_{2k-2}$ を

$$F_1(\sigma)=\begin{cases}\rho_{\beta_1} & \sigma=\sigma_n\ (0\le n<d_1)\ \text{のとき}\\ \rho_{\alpha_1} & \sigma=\overline{\sigma_n}\ (0\le n<d_1)\ \text{のとき}\\ 0 & \text{その他のとき}\end{cases}\tag{3.1}$$

で定義する。ここで、$q_1\in p\mathbf{Z}_p$ は γ_1 の固有値の比で、$d_1=\mathrm{ord}_p(q_1)$ とおく。すると、F_1 は compact support を持ち、$I(\varphi)=\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^*F_1$ である。

次に、$r\ge 2$ のときを考える。v_0 は原点であった。i $(1\le i\le r)$ に対して、v_i を $[\alpha_i,\beta_i]$ 上の頂点で $dist(v_0,[\alpha_i,\beta_i])=dist(v_0,v_i)$ となるものとする。$[\alpha_i,\beta_i]=\{\sigma_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ とし、但し $o(\sigma_0)=v_i$ とする。$\ell_i=dist(v_0,v_i)$ とおく。$\tau_0,\ldots,\tau_{\ell_i-1}$ を v_0 から v_i への path とする。$f_i: Edge(\Delta)\to V_{2k-2}$ を

$$f_i(\sigma)=\begin{cases}\rho_{\beta_i} & \sigma=\sigma_n\ (0\le n)\ \text{のとき}\\ -\rho_{\beta_i} & \sigma=\overline{\sigma_n}\ (0\le n)\ \text{のとき}\\ -\rho_{\alpha_i} & \sigma=\sigma_n\ (n<0)\ \text{のとき}\\ \rho_{\alpha_i} & \sigma=\overline{\sigma_n}\ (n<0)\ \text{のとき}\\ \rho_{\alpha_i}+\rho_{\beta_i} & \sigma=\tau_m\ (0\le m<\ell_i)\ \text{のとき}\\ -\rho_{\alpha_i}-\rho_{\beta_i} & \sigma=\overline{\tau_m}\ (0\le m<\ell_i)\ \text{のとき}\\ 0 & \text{その他のとき}\end{cases}$$

で定義する。すると、$f=f_1+\cdots+f_r$ である。$\rho^{an}_{\alpha_i}=\sum_{n\ge0}(\gamma_i^{-1})^{*n}\rho_{\alpha_i}$ 及び $\rho^{an}_{\beta_i}=\sum_{n\ge0}\gamma_i^{*n}\rho_{\beta_i}$ とおく。$F_i: Edge(\Delta)\to V_{2k-2}$ を

$$F_i(\sigma)=\begin{cases}\rho^{an}_{\beta_i}-\rho^{an}_{\alpha_i}+\rho_{\alpha_i} & \sigma=\sigma_n\ (0\le n<d_i)\ \text{のとき}\\ -\rho^{an}_{\beta_i}+\rho^{an}_{\alpha_i}-\rho_{\alpha_i} & \sigma=\overline{\sigma_n}\ (0\le n<d_i)\ \text{のとき}\\ \rho_{\alpha_i}+\rho_{\beta_i} & \sigma=\tau_m\ (0\le m<\ell_i)\ \text{のとき}\\ -\rho_{\alpha_i}-\rho_{\beta_i} & \sigma=\overline{\tau_m}\ (0\le m<\ell_i)\ \text{のとき}\\ 0 & \text{その他のとき}\end{cases}\tag{3.2}$$

で定義する。ここで、$q_i\in p\mathbf{Z}_p$ は γ_i の固有値の比で、$d_i=\mathrm{ord}_p(q_i)$ とおく。すると、F_i は compact support を持ち $I(\varphi)=\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^*(F_1+\cdots+F_r)$ である。$\sigma\in Edge(\Delta)$ が

$\bigcup_{i=1}^{r}[\alpha_i,\beta_i]$ の convex closure に含まれなければ、 $(F_1+\cdots+F_r)(\sigma)=0$ であることに注意する。

かくして次を得た。

Proposition 3.2 p 進 *Poincaré* 級数 $\varphi_\Gamma(\gamma_1,\ldots,\gamma_r;k_1,\ldots,k_r)$ に対して、写像

$$F_i : Edge(\Delta) \longrightarrow V_{2k-2}$$

を上記のように決めるとき、 $\sigma\in Edge(\Delta)$ に対して、 $F_i(\bar\sigma)=-F_i(\sigma)$ であり、 F_i は *compact support* を持ち、

$$I(\varphi_\Gamma(\gamma_1,\ldots,\gamma_r;k_1,\ldots,k_r))=\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^*(F_1+\cdots+F_r)$$

が成り立つ。

$r\geq 2$ のときに、 $\rho^{an}_{\alpha_i}$ 及び $\rho^{an}_{\beta_i}$ は以下の様にして有限の形にできる。簡単のため、α_i, $\beta_i\neq\infty$ としよう。 Proposition 3.1 により ρ_{α_i} 及び ρ_{β_i} は

$$\rho_{\alpha_i} = \sum_{\substack{m+n=2k-2\\ m>n}} A^{(i)}_{m,n}(u-\alpha_i v)^m(u-\beta_i v)^n$$

$$\rho_{\beta_i} = \sum_{\substack{m+n=2k-2\\ m<n}} B^{(i)}_{m,n}(u-\alpha_i v)^m(u-\beta_i v)^n$$

と書かれる。ここで、$A^{(i)}_{m,n}$, $B^{(i)}_{m,n}\in\mathbf{Q}_p$ である。

$$\gamma_i^*(u-\alpha_i v)^m(u-\beta_i v)^n=q_i^{(-m+n)/2}(u-\alpha_i v)^m(u-\beta_i v)^n$$

より、等式 $1+q+q^2+\cdots=\frac{1}{1-q}$ ($|q|<1$) を用いて、

$$\rho^{an}_{\alpha_i} = \sum_{\substack{m+n=2k-2\\ m>n}} \frac{A^{(i)}_{m,n}}{1-q_i^{(m-n)/2}}(u-\alpha_i v)^m(u-\beta_i v)^n \tag{3.3}$$

$$\rho^{an}_{\beta_i} = \sum_{\substack{m+n=2k-2\\ m<n}} \frac{B^{(i)}_{m,n}}{1-q_i^{(-m+n)/2}}(u-\alpha_i v)^m(u-\beta_i v)^n$$

を得る。

Proposition 3.3 θ を $\overline{\mathbf{Q}_p}$ の体の自己同型とする。各 $i=1,\dots,r$ について、

$$\alpha_i^\theta=\alpha_i,\quad \beta_i^\theta=\beta_i,\quad q_i^\theta=q_i \tag{3.4}$$

であるか、または

$$\alpha_i^\theta=\beta_i,\quad \beta_i^\theta=\alpha_i,\quad q_i^\theta=q_i^{-1} \tag{3.5}$$

であると仮定する。$\psi=\prod_{i=1}^r(q_i-q_i^{-1})^{k_i-\delta}\varphi$ とおく。ここで、$r=1$ のときは $\delta=1$、$r\geq 2$ のときは $\delta=0$ とおく。そのとき、

$$I(\psi)(\sigma)^\theta=I(\psi)(\sigma)\quad (\forall\sigma\in Edge(\Delta))$$

が成り立つ。

4 志村曲線

B を $\mathbf{Q}$ 上の定符号四元数環とする。disc(B) をその判別式とする。disc(B) を割らない素数 p をとり同型写像 $B\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_p\xrightarrow{\cong}M_2(\mathbf{Q}_p)$ を固定する。

$PGL_2(\mathbf{Q}_p)$ の $2k$ 次の対称テンソル表現 V_{2k} は $\mathbf{Q}$-structure $V_{2k,\mathbf{Q}}$ を持つ。低い次数に対しては、

$$\begin{aligned} V_{0,\mathbf{Q}} &= \mathbf{Q}\\ V_{2,\mathbf{Q}} &= Hom_{\mathbf{Q}}(\ker(Tr_{B/\mathbf{Q}}:B\to\mathbf{Q}),\mathbf{Q}) \end{aligned}$$

である。(二次形式の Laplacian を用いる記述については [3] を見よ。)

さて、Γ を $B^\times/\mathbf{Q}^\times$ の部分群で $PGL_2(\mathbf{Q}_p)$ の cocompact discrete subgroup であるものとする。$C^1_{har}(V_{2k-2})$ 及び $C^1_{har}(V_{2k-2})^\Gamma$ は各々 $\mathbf{Q}$-structure $C^1_{har}(V_{2k-2,\mathbf{Q}})$ 及び $C^1_{har}(V_{2k-2,\mathbf{Q}})^\Gamma$ を持つ。

Theorem 4.1 Γ は *torsion-free* であると仮定する。$\gamma_1,\dots,\gamma_r\in\Gamma$ 及び $k_1,\dots,k_r\geq 1$ を Section 2 の如きものとする。

$$\psi=\prod_{i=1}^r(q_i-q_i^{-1})^{k_i-\delta}\varphi_\Gamma(\gamma_1,\dots,\gamma_r;k_1,\dots,k_r)$$

とおく。ここで、$r=1$ のときは $\delta=1$ であり、$r\geq 2$ のときは $\delta=0$ である。$k=k_1+\cdots+k_r$ とおく。そのとき、

$$I(\psi)\in H^1(\Gamma,V_{2k-2,\mathbf{Q}})$$

が成り立つ。

Proof. Proposition 3.3 による。 □

このような ψ (または、その $\mathbf{Q}$-multiple) を有理化された p進 Poincaré 級数と呼ぶことにする。 $q_i - q_i^{-1}$ は純虚数である。従って、 factor $\prod_{i=1}^{r}(q_i - q_i^{-1})^{k_i-\delta}$ は有理数であるか純二次数である。

$\mathcal{O}$ を B の 極大整環とする。

$$\Gamma(1) = \left\{ \gamma \in \mathcal{O} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\frac{1}{p}] \mid N_{B/\mathbf{Q}}(\gamma) = 1 \right\} / \{\pm 1\}$$

とおく。

$\widehat{B}$ を $\mathbf{Q}$ 上の不定符号四元数環でその判別式が $p \cdot \mathrm{disc}(B)$ となるものとする。 $\widehat{\mathcal{O}}$ を $\widehat{B}$ の極大整環とする。

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{O}}^1 &= \left\{ \gamma \in \widehat{\mathcal{O}} \mid N_{\widehat{B}/\mathbf{Q}}(\gamma) = 1 \right\} \\ \widehat{\Gamma(1)} &= \widehat{\mathcal{O}}^1 / \{\pm 1\} \end{aligned}$$

とおく。 $\widehat{\Gamma(1)}$ は複素上半平面 $H = \{z = x + y\sqrt{-1} \in \mathbf{C} \mid y > 0\}$ に作用し、その商 $\widehat{\Gamma(1)} \backslash H$ の志村 model を $S_{\widehat{\Gamma(1)}}$ とする ([12, 13]) 。 Čerednik [1, 2] の *theorem of interchanging local invariants* によって、 K_p を $\mathbf{Q}_p$ の不分岐二次拡大とするとき、

$$S_{\widehat{\Gamma(1)}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p \cong \left(P_{\Gamma(1),n} \otimes_{\mathbf{Q}_p} K_p \right) \Big/ (\tau(p) \otimes \sigma)$$

となる ([6, 11] も見よ)。ここで、$Gal(K_p/\mathbf{Q}_p) = \{1, \sigma\}$ 、また $\tau(p)$ は p に関する Atkin-Lehner involution である。

少し、記号を導入しておく。 正整数 m に対して、

$$\begin{aligned} & \{v \in Ver(\Delta) \mid dist(v_0, v) = m\} \\ \cong\ & \mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \\ =\ & \{(x_1, x_2) \in (\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^2 \mid x_1 \in (\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times \text{ または } x_2 \in (\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times\} / (\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})^\times \end{aligned}$$

そこで、 Δ の頂点 v で $dist(v_0, v) = m$ であり その対応する $\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})$ における座標が (x_1, x_2) となるものを (m, x_1, x_2) と表わすことにする。

5 例

B を判別式が 13 の $\mathbf{Q}$ 上の定符号四元数環とする。伊吹山 [5] によって B とその極大整環 $\mathcal{O}$ は例えば次のように与えられる。

$$\begin{aligned} B &= \mathbf{Q}+\mathbf{Q}\alpha+\mathbf{Q}\beta+\mathbf{Q}\alpha\beta, \quad \alpha^2=-13,\ \beta^2=-11,\ \alpha\beta=-\beta\alpha \\ \mathcal{O} &= \mathbf{Z}+\mathbf{Z}\frac{1+\beta}{2}+\mathbf{Z}\frac{\alpha(1+\beta)}{2}+\mathbf{Z}\frac{3+\alpha}{11}\beta \end{aligned}$$

そこで、

$$Ibuk(x,y,z,w)=x+y\frac{1+\beta}{2}+z\frac{\alpha(1+\beta)}{2}+w\frac{3+\alpha}{11}\beta \quad (x,y,z,w\in\mathbf{Q})$$

とおくことにする。同型 $B\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_3\xrightarrow{\cong}M_2(\mathbf{Q}_3)$ を

$$\alpha \mapsto \begin{bmatrix} & 13 \\ -1 & \end{bmatrix}, \quad \beta \mapsto \sqrt{-11}\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$$

によって与える。ここで、$\sqrt{-11}\in\mathbf{Q}_3$ は $\sqrt{-11}\equiv 1 \bmod 3$ ととることにする。

群 $\Gamma(1)$ は torsion-free である。商グラフ $\Gamma(1)\backslash\Delta$ は 2 個の頂点と 8 個の向き付けられた edge からなる。 Δ における $\Gamma(1)$ の基本領域は

$$\{v_0,v_1\}\cup\{e_0,e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$$

で与えられる。ここで、頂点に関しては

$$v_0 \;=\; \text{原点}, \quad v_1 \;=\; (1,1,0)$$

また、向き付けられた edge に関しては

$$\begin{aligned} e_0 &= [v_0,v_1], & e_1 &= [v_1,v_0], \\ e_2 &= [v_0,(1,2,1)], & e_3 &= [v_1,(2,1,3)], \\ e_4 &= [v_0,(1,1,1)], & e_5 &= [v_1,(2,1,6)], \\ e_6 &= [v_0,(1,0,1)], & e_7 &= [v_1,(2,1,0)] \end{aligned}$$

とおいた。自由群 $\Gamma(1)$ は

$$\gamma_2 \;=\; Ibuk(1,-4,-1,5), \quad \gamma_4 \;=\; Ibuk(1,2,1,-5), \quad \gamma_6 \;=\; Ibuk(2,1,0,0)$$

によって生成される。基本領域の境界にある向き付けられた edge に対しては、

$$e_2 \;=\; \gamma_2\overline{e_3}, \quad e_4 \;=\; \gamma_4\overline{e_5}, \quad e_6 \;=\; \gamma_6\overline{e_7}$$

の様に作用している。 e_i の $\Gamma(1)\backslash\Delta$ への像を $\dot{e}_i$ と書く。 $\varphi(\cdot)=\varphi_{\Gamma(1)}(\cdot)$ と書くことにして、

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= \varphi(\dot{e}_0+\dot{e}_7;1),\\
\varphi_2 &= \varphi(\dot{e}_3+\dot{e}_4;1),\\
\theta &= \varphi(\dot{e}_0+\dot{e}_3+\dot{e}_5+\dot{e}_6;1),\\
\chi &= \frac{\sqrt{-299}}{13}\{-\varphi(\{\dot{e}_0,\dot{e}_3,\dot{e}_6,\dot{e}_5\};2)\ +\ \varphi(\{\dot{e}_0,\dot{e}_5,\dot{e}_6,\dot{e}_3\};2)\}
\end{aligned}
$$

を考える。 $k\geq 0$ について、 $M_{2k}(\Gamma(1))=H^0(\mathcal{P}(\Delta),\omega^{\otimes k}_{\mathcal{P}(\Delta)/\mathbf{Z}_p})^{\Gamma(1)}\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{Q}_p$ と書くことにする。すると、 φ_1, φ_2, θ は $M_2(\Gamma(1))$ の基底である。 Atkin-Lehner involution $\tau(3)$, $\tau(13)$ 及び Hecke 作用素 $T(5)$ は

$$
\tau(3)^*\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \theta\end{bmatrix}, \tag{5.6}
$$

$$
\tau(13)^*\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \theta\end{bmatrix}, \tag{5.7}
$$

$$
T(5)\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&\\2&-2&\\&&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \theta\end{bmatrix} \tag{5.8}
$$

の様に作用している。

$$
\begin{aligned}
\varphi_1^e &= \varphi_1+(-1+\sqrt{2})\varphi_2, \qquad (5.9)\\
\varphi_2^e &= \varphi_1+(-1-\sqrt{2})\varphi_2
\end{aligned}
$$

とおと、 φ_1^e,φ_2^e は common eigenform となる。 ε_3, $\varepsilon_{13}=\pm 1$ に対して、 $(2,2)$ 型 Abel 群 $\langle\tau(3),\tau(13)\rangle\subset Aut(S_{\widehat{\Gamma(1)}})$ の $\tau(3)\mapsto\varepsilon_3$, $\tau(13)\mapsto\varepsilon_{13}$ となる 1-次元表現を $\left\{\begin{matrix}\varepsilon_3\\ \varepsilon_{13}\end{matrix}\right\}$ と書くことにする。すると、 $\chi\in M_4(\Gamma(1))$ であり、

$$
M_4(\Gamma(1)) = \left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}-1\\-1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}-1\\-1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right\} \tag{5.10}
$$

$$
\chi \in \left\{\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right\} \tag{5.11}
$$

となる。

$P_{\Gamma(1)}/\tau(39)$ の genus は 0 である。従って、$P_{\Gamma(1)}$ は hyperelliptic curve でその方程式は

$$\begin{aligned} \theta^2 &= A_0^e \varphi_1^{e\,2} + A_1^e \varphi_1^e \varphi_2^e + A_2^e \varphi_2^{e\,2}, \\ \chi^2 &= B_0^e \varphi_1^{e4} + B_1^e \varphi_1^{e\,3} \varphi_2^e + B_2^e \varphi_1^{e\,2} \varphi_2^{e2} + B_3^e \varphi_1^e \varphi_2^{e3} + B_4^e \varphi_2^{e4} \end{aligned} \tag{5.12}$$

の形をしている。ここで、$A_i^e, B_j^e \in \mathbf{Q}_3(\sqrt{2})$ である。

さて、志村 [12] によって、

$$\frac{A_0^e A_2^e}{A_1^{e\,2}},\ \frac{B_1^e B_3^e}{B_2^{e\,2}} \in \mathbf{Q}, \quad \frac{B_2^e B_4^e}{B_3^{e\,2}},\ \frac{A_0^e B_3^e}{A_1^e B_2^e} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2})$$

である。

$\varphi_1, \varphi_2, \theta, \chi$ の v_0 における *local expansion* を modulo 3^{15} で計算することにより、

$$\begin{aligned} \frac{A_0^e A_2^e}{A_1^{e\,2}} &= \frac{1}{3^2}[3587231 \bmod 3^{14}] \\ \frac{B_1^e B_3^e}{B_2^{e\,2}} &= [11208842 \bmod 3^{15}] \\ \frac{B_2^e B_4^e}{B_3^{e\,2}} &= [5778707 \bmod 3^{15}] + 3^2[778036 \bmod 3^{13}]\sqrt{2} \\ \frac{A_0^e B_3^e}{A_1^e B_2^e} &= [1594322 \bmod 3^{13}] + \frac{1}{3}[3776030 \bmod 3^{14}]\sqrt{2} \end{aligned} \tag{5.13}$$

を得る。一方、$\mathrm{disc}(B) = 3$, $p = 13$ の場合にも同様な計算をして、

$$\begin{aligned} \frac{A_0^e A_2^e}{A_1^{e\,2}} &= [1220101 \bmod 13^7] \\ \frac{B_1^e B_3^e}{B_2^{e\,2}} &= [7300382 \bmod 13^7] \\ \frac{B_2^e B_4^e}{B_3^{e\,2}} &= [12310392 \bmod 13^7] + [53516622 \bmod 13^7]\sqrt{2} \\ \frac{A_0^e B_3^e}{A_1^e B_2^e} &= [62748516 \bmod 13^7] + [27521280 \bmod 13^7]\sqrt{2} \end{aligned} \tag{5.14}$$

を得る。これらから、次のように推測する。

$$\begin{aligned} \frac{A_0^e A_2^e}{A_1^{e\,2}} &= \frac{17}{2^2 3^2} \\ \frac{B_1^e B_3^e}{B_2^{e\,2}} &= \frac{2^2 47}{19^2} \\ \frac{B_2^e B_4^e}{B_3^{e\,2}} &= \frac{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19^2}{2^3 47^2} + \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19}{47^2}\sqrt{2} \\ \frac{A_0^e B_3^e}{A_1^e B_2^e} &= -1 + \frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 19}\sqrt{2} \end{aligned} \tag{H}$$

以下では、これを仮定する。

$\mathbf{Q}_3$ の不分岐二次拡大 K_3 の元 ω で $K_3=\mathbf{Q}_3(\omega)$, $\omega^2\in\mathbf{Q}_3$ となるものを固定しておく。(5.6),(5.11) により、 $C_{\varphi_1^e}, C_{\varphi_2^e}\in\mathbf{Q}_3(\sqrt{2})^\times=K_3^\times$, $C_\theta, C_\chi\in\omega\mathbf{Q}_3^\times$ であって、 $C_{\varphi_1^e}$ と $C_{\varphi_2^e}$ は $\mathbf{Q}_3$ 上共役で

$$
\begin{aligned}
C_{\varphi_1^e}\varphi_1^e,\ C_{\varphi_2^e}\varphi_2^e &\in H^0(S_{\widehat{\Gamma(1)}},\omega_{S_{\widehat{\Gamma(1)}}/\mathbf{Q}})\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}(\sqrt{2}),\\
C_{\varphi_1^e}\varphi_1^e,\ C_{\varphi_2^e}\varphi_1^e &\text{ は } \mathbf{Q} \text{ 上共役},\\
C_\theta\theta &\in H^0(S_{\widehat{\Gamma(1)}},\omega_{S_{\widehat{\Gamma(1)}}/\mathbf{Q}}),\\
C_\chi\chi &\in H^0(S_{\widehat{\Gamma(1)}},\omega^{\otimes 2}_{S_{\widehat{\Gamma(1)}}/\mathbf{Q}})
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

となるものが存在する。(5.12) より $C_{\varphi_1^e}\varphi_1^e, C_{\varphi_2^e}\varphi_2^e, C_\theta\theta, C_\chi\chi$ の満たす $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ に係数を持つ方程式を得る。

$$
\begin{aligned}
(C_\theta\theta)^2 &= \frac{C_\theta^2}{C_{\varphi_1^e}^2}A_0^e(C_{\varphi_1^e}\varphi_1^e)^2+\frac{C_\theta^2}{C_{\varphi_1^e}C_{\varphi_2^e}}A_1^e(C_{\varphi_1^e}\varphi_1^e)(C_{\varphi_2^e}\varphi_2^e)+\frac{C_\theta^2}{C_{\varphi_2^e}^2}A_2^e(C_{\varphi_2^e}\varphi_2^e)^2\\
(C_\chi\chi)^2 &= \frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_1^e}^4}B_0^e(C_{\varphi_1^e}\varphi_1^e)^4+\frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_1^e}^3C_{\varphi_2^e}}B_1^e(C_{\varphi_1^e}\varphi_1^e)^3(C_{\varphi_2^e}\varphi_2^e)\\
&\quad+\frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_1^e}^2C_{\varphi_2^e}^2}B_2^e(C_{\varphi_1^e}\varphi_1^e)^2(C_{\varphi_2^e}\varphi_2^e)^2\\
&\quad+\frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_1^e}C_{\varphi_2^e}^3}B_3^e(C_{\varphi_1^e}\varphi_1^e)(C_{\varphi_2^e}\varphi_2^e)^3+\frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_2^e}^4}B_4^e(C_{\varphi_2^e}\varphi_2^e)^4
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

ここで、 $\frac{C_\theta^2}{C_{\varphi_1^e}C_{\varphi_2^e}}A_1^e, \frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_1^e}^2C_{\varphi_2^e}^2}B_2^e\in\mathbf{Q}$ である。更に、 $\frac{C_\theta^2}{C_{\varphi_1^e}^2}A_0^e$ と $\frac{C_\theta^2}{C_{\varphi_2^e}^2}A_2^e$, $\frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_1^e}^4}B_0^e$ と $\frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_2^e}^4}B_4^e$, $\frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_1^e}^3C_{\varphi_2^e}}B_1^e$ と $\frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_1^e}C_{\varphi_2^e}^3}B_3^e$ は $\mathbf{Q}$ 上共役である。(H) によって、次のように書ける。

$$
\begin{aligned}
\frac{C_\theta^2}{C_{\varphi_1^e}^2}A_0^e &= (-1+3\sqrt{2})(1+\sqrt{2})\alpha,\\
\frac{C_\theta^2}{C_{\varphi_1^e}C_{\varphi_2^e}}A_1^e &= 2\cdot 3a,\\
\frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_1^e}^4}B_0^e &= 5\cdot 7(-1-\sqrt{2})^2\frac{\alpha^2 b}{a^2},\\
\frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_1^e}^3C_{\varphi_2^e}}B_1^e &= 2^2(-1-\sqrt{2})(9+8\sqrt{2})\frac{\alpha b}{a},\\
\frac{C_\chi^2}{C_{\varphi_1^e}^2C_{\varphi_2^e}^2}B_2^e &= 2\cdot 19b,
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

ここで、$\alpha \in \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 、a, $b \in \mathbf{Q}$ であり、 $\alpha\alpha' = a^2$ となっている。(α' は α の $\mathbf{Q}$ 上の共役。) $d \in \mathbf{Q}$ と $\delta \in \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ で $a = d\delta\delta'$ で $\alpha = d\delta^2$ であるものがある。Φ_1, Φ_2 を

$$\begin{aligned} \delta C_{\varphi_1^e}\varphi_1^e &= \Phi_1 + (1+\sqrt{2})\Phi_2 \\ \delta' C_{\varphi_2^e}\varphi_2^e &= \Phi_1 + (1-\sqrt{2})\Phi_2 \end{aligned} \tag{5.18}$$

とおく。更に、$d_1 = 1/8d$ 及び $d_2 = a^2/16bd^2$ とおく。すると、方程式 (5.16) は

$$\begin{aligned} d_1(C_\theta\theta)^2 &= 2\Phi_1^2 + 6\Phi_1\Phi_2 + 5\Phi_2^2 \\ d_2(C_\chi\chi)^2 &= (3\Phi_1^2 + 12\Phi_1\Phi_2 + 13\Phi_2^2)(\Phi_1^2 + 12\Phi_1\Phi_2 + 39\Phi_2^2) \end{aligned} \tag{5.19}$$

となる。$\mathbf{Z}[\sqrt{-13}]$, $\mathbf{Z}[\sqrt{-39}]$, $\mathbf{Z}[\frac{1+\sqrt{-39}}{2}]$ の $\widehat{\mathcal{O}}$ への optimal embedding に対応する $S_{\widehat{\Gamma(1)}}$ 上の点を各々 $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$, $\{Q_1', Q_2', Q_3', Q_4'\}$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\theta) &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \\ \mathrm{div}(\chi) &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_1' + Q_2' + Q_3' + Q_4' \end{aligned}$$

であることが分かる。ここで、div は $S_{\widehat{\Gamma(1)}}$ 上でとる。志村 [12], 3.2. Main Theorem I, により

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\sqrt{-13}, P_1) &= \mathbf{Q}(\sqrt{-13}, \sqrt{-1}, \sqrt{13d_2}) \\ \mathbf{Q}(\sqrt{-39}, Q_1) &= \mathbf{Q}(\sqrt{-39}, \sqrt{-3}, \sqrt{-d_1(1-2\sqrt{-3})}) \end{aligned}$$

は各々 $\mathbf{Q}(\sqrt{-13})$ 及び $\mathbf{Q}(\sqrt{-39})$ の Hilbert class field である。これより、

$$\begin{aligned} d_1 &= (-3)^{0\text{ または }1} 13^{0\text{ または }1} \mod \mathbf{Q}^{\times 2}, \\ d_2 &= (-1)^{0\text{ または }1} 13^{0\text{ または }1} \mod \mathbf{Q}^{\times 2} \end{aligned}$$

を得る。(5.13), (5.17) より、$d_1 \in 3^{2\mathbf{Z}}\mathbf{Z}_3^\times$, $d_2 \in -1 \cdot \mathbf{Q}_3^{\times 2}$ が得られる。同様に、$\mathrm{disc}(B) = 3$, $p = 13$ の場合より、$d_1 \in 13^{2\mathbf{Z}}\mathbf{Z}_{13}^\times$, $d_2 \in -1 \cdot \mathbf{Q}_{13}^{\times 2}$ を得る。従って、$d_1 \in \mathbf{Q}^{\times 2}$, $d_2 \in -1 \cdot \mathbf{Q}^{\times 2}$ 。$d_1 = k_1^2$, $d_2 = -k_2^2$ (k_1, $k_2 \in \mathbf{Q}^\times$) とおき、更に $\Theta = k_1 C_\theta\theta$ 及び $X = k_2 C_\chi\chi$ とおくと仮定 (H) の下で志村曲線 $S_{\widehat{\Gamma(1)}}$ の方程式を得る。

$$\begin{aligned} \Theta^2 &= 2\Phi_1^2 + 6\Phi_1\Phi_2 + 5\Phi_2^2 \\ X^2 &= -(3\Phi_1^2 + 12\Phi_1\Phi_2 + 13\Phi_2^2)(\Phi_1^2 + 12\Phi_1\Phi_2 + 39\Phi_2^2) \end{aligned} \tag{5.20}$$

参考文献

[1] I. V. Čerednik, Towers of algebraic curves uniformized by discrete subgroups of $PGL_2(k_w) \times E$, Math. USSR-Sb. **28** (1976), 187–215.

[2] I. V. Čerednik, Uniformization of algebraic curves by discrete arithmetic subgroups of $PGL_2(k_w)$ with compact quotients, Math. USSR-Sb. **29** (1976), 55–78.

[3] E. de Shalit, Eichler cohomology and periods of modular forms on p-adic Schottky groups, J. reine angew. Math. **400** (1989), 3-31.

[4] K. Hashimoto and N. Murabayashi, Shimura curves as intersection of Humbert surfaces and defining equations of QM-curves of genus two, preprint.

[5] T. Ibukiyama, On maximal orders of division quaternion algebras over the rational number field with certain optimal embeddings, Nagoya Math. J. **88** (1982), 181–195.

[6] B. W. Jordan and R. A. Livné, Local Diophantine properties of Shimura curves, Math. Ann. **270** (1985), 235-248.

[7] A. Kurihara, On some examples of equations defining Shimura curves and the Mumford uniformization, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA **25** (1979), 277–300.

[8] Yu. I. Manin and V. G. Drinfel'd, Periods of p-adic Schottky groups, J. reine angew. Math. **262/263** (1973), 239–247.

[9] Y. Morita, Reduction modulo $\mathfrak{P}$ of Shimura curves, Hokkaido Math. J. **10** (1981), 209–238.

[10] D. Mumford, An analytic construction of degenerating curves over complete local rings, Compositio Math. **24** (1972), 129–174.

[11] A. P. Ogg, Mauvaise réduction des courbes de Shimura. In: Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1983–84 (Progress in Math., vol. 59, pp. 199–217) Boston Basel Stuttgart:Birkhäuser 1985.

[12] G. Shimura, Construction of class fields and zeta functions of algebraic curves, Ann. Math. **85** (1967), 58–159.

[13] G. Shimura, On canonical models of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, Ann. Math. **91** (1970), 144–222.