代数幾何学シンポジウム記録
1993年度 pp.49-57

対称トーリック Fano 多様体上の Einstein-Kähler 計量について

東北大学 理学部　　中川 泰宏

1 Fano 多様体上の Einstein-Kähler 計量

この節では、X は n 次元 Fano 多様体を表すものとする。すなわち X は n 次元のコンパクト複素多様体で正の第一 Chern 類 $c_1(X)$ を持つものとする。X 上の Kähler 計量 g に対応する Kähler 形式を

$$\omega_g := \sqrt{-1}\sum_{i,j=1}^{n} g_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\overline{z^j}$$

で表す。特に我々は ω_g の de Rham コホモロジー類 $[\omega_g]$ が

$$[\omega_g] = 2\pi c_1(X)$$

を満たすもののみを考える事にする。さらに g の Ricci 形式 Ric_g を

$$\mathrm{Ric}_g := \sqrt{-1}\,\bar{\partial}\partial \log\det(g_{i\bar{j}})$$

で定義する。この時以下の事が成り立つ。

Remark 1.1 Ric_g の de Rham コホモロジー類 $[\mathrm{Ric}_g]$ は $[\mathrm{Ric}_g] = 2\pi c_1(X)$ を満たす。

Definition 1.2 Kähler 計量 g が **Einstein-Kähler** 計量であるとは、Einstein の方程式

$$\mathrm{Ric}_g = \omega_g$$

を満たすときをいう。

一般には、X 上の実数値の滑らかな関数 f_g が存在して

$$\mathrm{Ric}_g - \omega_g = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}f_g$$

となる。ここで**二木不変量**を

$$F_X : H^0(X, \mathcal{O}(TX)) \ni V \mapsto \int_X (Vf_g)\omega_g^n \in \mathbb{C}$$

で定義する。この時 F_X の定義は $[\omega_g]$ のみにより g の取りかたによらない事が示される ([2])。
一般の Fano 多様体上に Einstein-Kähler 計量が存在するかという問題を考えると、この問題に対しては反例が知られている。実は次のように二つの障害がよく知られている。

Fact 1.3 (i) Xが Einstein-Kähler 計量を持てば、Xの自己同型群$\mathrm{Aut}(X)$ の単位元を含む連結成分$\mathrm{Aut}^\circ(X)$ は簡約代数群になる ([7])。
(ii) Xが Einstein-Kähler 計量を持てば、F_Xは恒等的に零である ([2])。

そこで二木は次のような予想を立てた。

Conjecture 1.4 ([2]) 二木不変量 F_Xが恒等的に零である様な Fano 多様体 Xは Einstein-Kähler 計量を持つ。

ここで次の事に注意する。

Remark 1.5 (i) $\mathrm{Aut}^\circ(X)$ が簡約代数群であるが、F_Xが零でない様な Fano 多様体 Xの例は知られている ([2])。
(ii) 逆に F_Xが消えているが$\mathrm{Aut}^\circ(X)$ 簡約でない様な Fano 多様体 Xの例は知られていない。

ここで少し脱線するが、Einstein-Kähler 計量の一般化である端的 Kähler 計量について説明する。そのためにまず記号の準備をする。

$$2\pi c_1(X)^+ := \{\eta \in 2\pi c_1(X)\,;\ \eta\text{は Kähler 形式である。}\}$$

とし、その元$\eta = \sqrt{-1}\sum_{i,j=1}^{n} h_{i\bar{j}}dz^i d\overline{z^j} \in 2\pi c_1(X)^+$に対して

$$R(\eta)_{i\bar{j}} := -\frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \overline{z^j}} \log\det(h_{\alpha\bar{\beta}}),$$
$$\sigma(\eta) := \sum_{i,j=1}^{n} h^{\bar{j}i} R(\eta)_{i\bar{j}}$$

とする。ここで $(h^{\bar{j}i})$ は $(h_{i\bar{j}})$ の逆行列である。

Definition 1.6 ([1]) Kähler 計量 gは対応する Kähler 形式ω_gが汎関数

$$2\pi c_1(X)^+ \ni \eta \mapsto \int_X \sigma(\eta)^2 \eta^n \in \mathbb{R}$$

の臨界点であるとき**端的 Kähler 計量**という。

この端的 Kähler 計量については、次が成り立つ事が示されている。

Fact 1.7 (i) gが端的 Kähler 計量となるための必要十分条件は

$$\mathrm{grad}_g(\sigma(\omega_g)) := \sum_{i,j=1}^{n} g^{\bar{j}i} \frac{\partial \sigma(\omega_g)}{\partial \overline{z^j}} \frac{\partial}{\partial z^i}$$

が正則ベクトル場となる事である ([1])。特に Einstin-Kähler 計量は端的 Kähler 計量である。
(ii) F_Xが恒等的に零の時、端的 Kähler 計量は Einstein-Kähler 計量となる ([2])。

最近、Hwang と満渕は端的 Kähler 計量を研究するために次の概念を導入した。

Definition 1.8 ([4]) G を線形代数群とし、$G = H \ltimes U$をその Chevalley 分解とする。すなわちUは冪単根基で、Hはある簡約代数部分群である。このときGが第一種であるとは、$U = \{\mathrm{id}\}$ となるかまたは Hが半単純でない時をいう。

この第一種という概念に対して Hwang と満渕は次を示した。

Fact 1.9 ([4]) (i) Xが端的 Kähler 計量を持てば、$\mathrm{Aut}^\circ(X)$ は第一種である。
(ii) Xがトーリック多様体であれば (トーリック多様体の定義は次節を参照の事)、$\mathrm{Aut}^\circ(X)$ は第一種である。

この事実は次の予想の正当性を支持するものである。

Conjecture 1.10 トーリック Fano 多様体上には、端的 Kähler 計量が存在する。

もしこの予想が正しいとすると Fact1.7(ii) により Conjecture1.4をトーリック Fano 多様体に限った次の予想が示される。

Conjecture 1.11 二木不変量 F_Xが恒等的に零であるようなトーリック Fano 多様体 X は Einstein-Kähler 計量を持つ。

2 トーリック Fano 多様体

この節では、トーリック Fano 多様体について簡単な復習をする。(詳しくは小田 ([10]) を見よ。) 前節に引き続き本節でも Xは n 次元 Fano 多様体を表すものとする。

Definition 2.1 n 次元 Fano 多様体 Xは効果的かつ概等質的な代数的トーラス $T_n := (\mathbb{C}^*)^n$ の代数的な作用を持つ時、**トーリック Fano 多様体**と呼ばれる。

Definition 2.2 Pを n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$の中の n 次元凸多面体とする。Pは以下の条件を満たす時、**n 次元 Fano 多面体**と呼ばれる。

(i) $\mathbb{R}^n$の原点 0 が Pの内部$\mathrm{Int}(P)$ に含まれる。

(ii) Pの頂点集合は $\mathbb{Z}^n$に含まれる。

(iii) Pの任意の面は単体である。

(iv) Pの任意の $n-1$ 次元の面の頂点集合は $\mathbb{Z}^n$の $\mathbb{Z}$ 基底を成す。

次の事実はトーリック Fano 多様体の研究において最も基本的かつ重要な事実の一つである。これを用いて、トーリック多様体の様々な幾何学的性質を具体的に調べる事ができる。

Fact 2.3 (i) n 次元トーリック Fano 多様体の同型類と n 次元 Fano 多面体の同型類とは一対一に対応する。この対応において、n 次元 Fano 多面体 Pに対応する n 次元トーリック Fano 多様体を X_Pで表すことにする。
(ii) Pの k次元の面δと X_Pの $n-k-1$ 次元の T_n軌道$O(\delta)$ が一対一に対応する。
(iii) $GL(n,\mathbb{Z})$ の元φ で$\varphi(P)=P$を満たすものは X_Pの T_n同変な正則自己同型φ_*と一対一に対応する。

特に二木不変量に対しては、次の満渕による結果がある。

Fact 2.4 ([6]) Pを Fano 多面体とする。トーリック Fano 多様体 X_P の二木不変量 F_{X_P}が恒等的に零であるための必要十分条件は、Pの極多面体 P^*の重心が原点にある事である。

3 対称トーリック Fano 多様体

Fact2.4により対称トーリック Fano 多様体と呼ばれる特別なトーリック Fano 多様体を考える事にする。このトーリック Fano 多様体は後で述べるが (Corollary3.3)、二木不変量は恒等的に零である。

Definition 3.1 ([13]) X_Pをトーリック Fano多様体とする。X_P上の対合$\iota : X_P \longrightarrow X_P$(すなわち$\iota^2 = \mathrm{id}_{X_P}$ を満たす X_Pの正則自己同型) で

$$\iota(tx) = t^{-1}\iota(x)$$

がすべての $t \in T_n$と $x \in X_P$に対して成り立つようなものが存在する時、X_Pを対称トーリック **Fano** 多様体と呼ぶ。またこれと同値な条件として

$$-P = P$$

が成り立つとしてもよい。この条件の成り立つ Pを対称 **Fano** 多面体という。

次は Pの対称性より明らかである。

Lemma 3.2 対称トーリック Fano多面体 Pの極多面体 P^* の重心は原点にある。

Corollary2.4と合わせると、系として次が得られる。

Corollary 3.3 対称トーリック Fano 多様体の二木不変量は恒等的に零である。

よって我々は Conjecture1.11 の特別な場合として、次のような予想を考える事にする。

Conjecture 3.4 対称トーリック Fano 多様体には Einstein-Kähler が存在する。

Voskresenskii と Klyachko による対称トーリック Fano 多様体の分類の結果を述べるために少し記号を準備する。

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \qquad : \mathbb{R}^n \text{の標準的基底},$$
$$e_0 := -\sum_{i=1}^{n} e_i = (-1, -1 \ldots, -1),$$
$$P_n := \{\pm e_0, \pm e_1, \ldots, \pm e_n\} \text{ の凸閉包}$$

この記号の下で Voskresenskii と Klyachko は以下を示した。

Fact 3.5 ([13]) (i) n が偶数 $n = 2m$ の時 P_{2m}は $2m$ 次元対称 Fano 多面体である。
この時対応するトーリック Fano 多様体を $X_{2m} := X_{P_{2m}}$ と表すことにする。
(ii) 任意の対称トーリック Fano 多様体は

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), X_2, X_4, \ldots, X_{2m}, \ldots,$$

達の直積に書ける。

よって Conjecture3.4を考える変わりに次を考えれば十分である。

Conjecture 3.6 任意の自然数 m に対して、X_{2m}には Einstein-Kähler 計量が存在する。

この予想については、$m = 1$ の時は Siu([11]) や Tian と Yau([12]) や Nadel([8]) により示されている。また $m = 2$ の時も最近示された ([9])。

ここで後で必要となる X_{2m}の幾何学的性質を述べるために幾つか記号を用意する。IとJを $\{0, 1, \ldots, 2m\}$ の部分集合で

$$(*) \qquad I \cap J = \emptyset, \quad 1 \leqq |I \cup J| \leqq 2m, \quad 0 \leqq |I|, |J| \leqq m$$

を満たすものとする。$I = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ と $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_q\}$ の様に表されているとする。このような Iと Jに対して

$$\sigma_{IJ} := \left\{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}, -e_{j_1}, -e_{j_2}, \ldots, -e_{j_q}\right\} \text{の凸閉包}$$

とする。この時

$$\{\sigma_{IJ}\,;\, |I| = |J| = m\} = \{P_{2m}\text{の } 2m-1 \text{ 次元の面}\}$$

となる。また $(|I|, |J|) = (p, q)$ または $(|I|, |J|) = (q, p)$ の時 (ただし $p \geqq q$ とする。) σ_{IJ}を **(p, q) 型の面**という

(p, q) 型の面σ_{IJ}は $p+q-1$ 次元なので Fact2.3により対応する X_{2m}の中の T_{2m}軌道$\boldsymbol{O}(\sigma_{IJ})$は $2m-p-q$次元になる。$\boldsymbol{O}(\sigma_{IJ})$ の X_{2m}の中での閉包を V_{IJ}で表すことにする。またこの V_{IJ}も **(p, q)** 型といいtype$(V_{IJ}) = (p, q)$ と表す。さらに

$$Y_{p,q} := \bigcup_{\text{type}(V_{IJ})=(p,q)} V_{IJ}$$

とおく。

次に X_{2m}の正則自己同型について考える。$2m+1$ 次対称群 $\mathfrak{S}_{2m+1}$は $\{e_0, e_1, \ldots, e_{2m}\}$ の置換と見て $GL(2m,\mathbb{Z})$ の有限部分群となる。G_1を $\mathfrak{S}_{2m+1}$と $\{\pm \mathrm{id}_{2m}\}$ により生成される $GL(2m,\mathbb{Z})$ の有限部分群とする。この時 $G_1 \cong \mathfrak{S}_{2m+1} \times \mathbb{Z}_2$となる。

Remark 3.7 G_1は集合 $\{\sigma_{IJ}\,;\, I, J \subsetneqq \{0, 1, \ldots, 2m\}$ は $(*)$ を満たす$\}$ に作用する。

Lemma 3.8 G_1の作用でσ_{IJ}は同じ型の$\sigma_{I'J'}$ に移る。逆に二つの同じ型の面σ_{IJ}と$\sigma_{I'J'}$に対して、σ_{IJ}を$\sigma_{I'J'}$に移す G_1の元が存在する。

Remark 3.9 G_1は $GL(2m,\mathbb{Z})$ の部分群であり P_{2m}を保つので Fact2.3により G_1は X_{2m}に T_{2m}同変正則自己同型として自然に作用する。これにより G_1をAut(X_{2m}) の部分群と見る。

$G_0 := (U(1))^{2m} \subset T_{2m}$をコンパクト・トーラスとし、$G$を G_0と G_1で生成されるAut(X_{2m}) のコンパクト部分群とする。さらに $G^{\mathbb{C}}$を G の複素化とする。この時次がわかる。

Lemma 3.10 X_{2m}の $G^{\mathbb{C}}$不変被約閉複素解析的部分空間は幾つかの $Y_{p,q}$達の和集合となる。

4 主要結果

さてここで本来の問題に戻ることにする。すなわち X_{2m}に Einstein-Kähler 計量が存在するかという問題を考える。トーリック Fano 多様体のように非常に対照性の高い Fano 多様体上の計量の存在問題を考える時に有効な手段として次の Nadel の結果がある。

Fact 4.1 ([8]) Fano 多様体 Xとその自己同型群Aut(X) のコンパクト部分群 G を考える。もし X上に Einstein-Kähler 計量が存在しないとすると、Xの $G^{\mathbb{C}}$不変な閉複素解析的部分空間 Zで

(i) Zの構造層係数のコホモロジー群は

$$\dim_{\mathbb{C}} H^q(Z, \mathcal{O}_Z) \cong \begin{cases} 1, & (q=0) \\ 0, & (q>0) \end{cases}$$

となる。

(ii) Zの補集合 $X \setminus Z$の対数的幾何種数は零である。

が成り立つようなものが存在する。この Zを **multiplier ideal subscheme** と呼ぶ。

この Nadel の結果を用いて X_{2m}上に Einstein-Kähler が存在する事を示したい。もし X_{2m}が Einstein-Kähler 計量を持たないとすると X_{2m}の mltiplier ideal subscheme Zが存在するはずだが、この様な Zは存在し得ない事を示せばよい。しかし現段階ではまだ出来ていない。そこで本稿ではこの Zが満たすべき条件 (Theorem4.3) を求める事にする。

一般の Fano 多様体 X に対して、X 上に Einstein-kähler 計量が存在しないとすると Fact4.1 により X の multiplier ideal subscheme Z が存在する。Z_{red} により Z の被約型を表す。この時

$$Z_{\text{red}} = \bigcup_{i=1}^{k} Y_i : \qquad \text{既約分解},$$

$$Z_1 := \bigcup_{i=1}^{l} Y_i, \qquad Z_2 := \bigcup_{j=l+1}^{k}, Y_j$$

$$r_1 := \dim_{\mathbf{C}} Z_1$$

とする。以上の記号の下で次が成り立つ。

Lemma 4.2 $H^{r_1}(Z_1, \mathcal{O}_{Z_1}) = \{0\}$

これを用いて次が得られる。

Theorem 4.3 X_{2m} 上に Einstein-Kähler 計量が存在しないとし、Z を X_{2m} の multiplier ideal subscheme とする。この時以下が成り立つ。

(i) Z_{red} は幾つかの $Y_{p,q}$ 達の和集合となる。

(ii) Z_{red} の幾つかの既約成分の和集合として $q \geqq 1$ の $Y_{m,q}$ は現れない。

Proof. (i) は Lemma3.10 より明らかである。(ii) について例えば $q = 1$ の時を考える。$Y_{m,1}$ が現れたとする。この時 $Y_{m,1}$ の幾つかの既約成分の和集合として

$$Z_1 := \bigcup_{i=0}^{m} V_{\{i\}\{m+1,m+2,\dots,2m\}}$$

が現れる。この Z_1 に Lemma4.2 を適用してやると、$\dim_{\mathbf{C}} Z_1 = m-1$ なので

$$H^{m-1}(Z_1, \mathcal{O}_{Z_1}) = \{0\}$$

となる。一方 Z_1 は m 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ の斉次座標で定義される $m+1$ 枚の超平面の和集合と同型なので

$$\dim_{\mathbf{C}}(H^{m-1}(Z_1, \mathcal{O}_{Z_1})) = 1$$

となり矛盾である。一般の場合もほぼ同様に示せる。 □

この Theorem4.3 により特に次が解る。

Corollary 4.4 Theorem4.3 と同じ条件の下で

$$2 \leqq \dim_{\mathbf{C}} Z \leqq 2m-2$$

が成り立つ。

Proof. もし $\dim_{\mathbf{C}} Z = 0$ とすると $Z_{\mathrm{red}} = Y_{m,m}$ となるが、これは Teorem4.3により起こり得ない。$\dim_{\mathbf{C}} Z = 1$ とすると $Z_{\mathrm{red}} = Y_{m,m-1}$ となるが、これもまた Teorem4.3に反する。一方 $\dim_{\mathbf{C}} Z = 2m-1$ とすると $X_{2m} \setminus Z = T_{2m}$ となる。T_{2m}の対数的幾何種数は零ではないので Fact4.1に反する。 □

Example 4.5 (i) Corollary4.4を $m = 1$ の時、すなわち X_2 に適用すると直ちに X_2に Einstein-Kähler 計量が存在する事が示される。これが Nadel([8]) による $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ を三点ブローイン・グアップして得られる曲面が Einstein-Kähler 計量を持つ事の証明である。
(ii) $m = 2$ の時、すなわち X_4に対しては、残された可能性は $\dim_{\mathbf{C}} Z = 2$ のみである。この場合に対しては、石田の判定法 ([5]) などを用いて起こり得ない事が示される。このようにして X_4にも Einstein-Kähler 計量が存在する事が示される ([9])。

参考文献

[1] E. Calabi, *Extremal Kähleur metrics*, in "Seminar on differential geometry," Annals of Math. Studies **102**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1982, pp. 259–290.

[2] A. Futaki, *An obstruction to the existence of Kähler Einstein metrics*, Invent. Math. **73** (1983), pp. 437–443.

[3] A. Futaki and T. Mabuchi, *Uniqueness and periodicity of extremal Kähler vector fields*, preprint.

[4] A. Hwang and T. Mabuchi, *A conjecture on the group of biholomorphisms of a non-singular Fano variety*, preprint.

[5] M.-N. Ishida, *Torus embedding and dualizing complexes*, Tohoku Math. J. **32** (1980), pp. 111–146.

[6] T. Mabuchi, *Einstein-Kähler forms, Futaki invariants and convex geometry on toric Fano varieties*, Osaka J. Math. **24** (1987), pp. 705–737

[7] Y. Matsushima, *Sur la structure du groupe d'homomorphismes analitique d'une certaine variété kählerienne*, Nagoya Math. J. **46** (1957), pp. 145–150

[8] A. M. Nadel, *Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature*, Ann. of Math. **132** (1990), pp. 549–596

[9] Y. Nakagawa, *Einstein-Kähler toric Fano fourfolds*, Tohoku Math. J. **45** (1993), pp. 297–310

[10] T. Oda, "Convex bodies and algebraic geometry : An introduction to the theory of toric varieties," Ergebnisse der Math. (3) 15, Springer-Verlag, Heidelberg, 1988.

[11] Y.-T. Siu, *The existence of Kähler-Einstein metrics on manifolds with positive anti-canonical line bundle and a suitable finite symmetry group*, Ann. of Math. **127** (1988) pp. 585–627.

[12] G. Tian and S.-T. Yau, *Kähler-Einstein metrics on complex surfaces with $C_1 > 0$*, Commun. Math. Phys. **112** (1987), pp. 175–203.

[13] V. E. Voskresenskii and A. A. Klyachko, *Toroidal Fano varieties and root systems*, Math. USSR-Izv. **24** (1985),221–244; Izv. Akad. Nauk SSSR **48** (1984), 237–263.