代数幾何学シンポジウム記録
1993年度　pp.16-26

偏極多様体の断面種数と不正則数について

福間 慶明

東京工業大学理学部

Introduction

X を、n 次元非特異射影多様体 、L を X 上の Cartier 因子とする。
この時、L が ample な因子ならば、(X,L) を偏極多様体とよび、L が nef かつ big な因子ならば、(X,L) を準偏極多様体とよぶ。
このような (X,L) に対してつぎのような式で断面種数 $g(L)$ を定義する。

$$g(L)=1+\frac{1}{2}(K_X+(n-1)L)L^{n-1}$$

ただし、K_X は、X の標準因子とする。
ここで $g(L)$ は整数であることに注意する。
そこで断面種数に関して知られている事実はつぎのとおりである。

(1) L が ample もしくは $\dim X\leq 3$ で L が nef かつ big ならば $g(L)\geq 0$ が成立する。([Ft1],[Ft5])
(2) (X,L) が偏極多様体で、$g(L)\leq 2$ のときは、藤田隆夫氏 ([Ft1],[Ft4]) によりほぼ完全に分類されている。
(3) (X,L) が偏極多様体で、$g(L)=3$ のときは、前田英敏氏 ([Ma]) や石原裕信氏 ([Is]) により研究がなされている。

(注意)
(1) について、L が ample のときは、X にある程度特異点を許してもよい。(例えば、rational Gorenstein など。) [Ft1],[Ft5] を見よ。

また、断面種数の下からの評価についてつぎのような予想がある。

予想 1.
(X,L) を準偏極多様体とする。このとき、$g(L)\geq q(X)$ が成立する。
ただし、$q(X)=h^1(\mathcal{O}_X)$ とする。(この $q(X)$ を不正則数とよぶ。)

この予想に関してわかっていることは
(1) L が ample で、固定点自由ならば、$g(L)\geq q(X)$ が成り立つ。
(2) L が ample で、$g(L)\leq 2$ ならば、$g(L)\geq q(X)$ が成り立つ。
などである。
しかし、今まで一般には、X が曲面で、L が ample の時でさえも上の予想が正しいかどうかわかっていなかった。また、高次元の場合ではなおのことほとんどのことがわかっていなかった。

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

福間 慶明

そこでこの予想についていろいろ調べてみることがここでの目的である。
以下 §1 で X が曲面の場合について扱う。この時は、小平次元 $\kappa(X)$ が 1 以下なら上の予想が正しいことを述べ、さらに $g(L)=q(X)$ が成り立つ (X,L) は、どのようなものかを調べる。
また、X が一般型曲面のときについても特別な場合について調べる。
§2 では、高次元の場合についていくつか調べる。

Notation
以下複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える。X を $\mathbb{C}$ 上の非特異射影多様体とすると、
$p_g(X)=h^0(K_X)$: X の幾何種数
$q(X)=h^1(\mathcal{O}_X)$: X の不正則数
$\sim$: 線形同値
$\equiv$: 数値的同値
$\chi(X)$:X の Euler-Poincaré 指標

§1. X が曲面の時

1-1: 小平次元 $\kappa(X)$ が 1 以下のとき。

定理 1.1. (X,L) を準偏極曲面で、$\kappa(X)\leq 1$ とする。
この時、$g(L)\geq q(X)$ が成立する。

証明.
(1) $\kappa(X)=-\infty$ の時
Riemann-Roch の定理と川又-Viehweg の消滅定理より、$h^0(K_X+L)=p_g(X)-q(X)+g(L)$ が成立する。ここでは、$p_g(X)=0$ より、$h^0(K_X+L)=g(L)-q(X)$ がいえるので、主張を得る。
(2) $\kappa(X)=0$ の時。
この時、分類理論より $q(X)\leq 2$ がいえる。もし、$g(L)\leq 1$ なら、$\kappa(X)=-\infty$ となり矛盾。よって $g(L)\geq 2\geq q(X)$。
(3) $\kappa(X)=1$ の時。
このときは、X が elliptic fibration をもつことに注目する。つまり、$f:X\to C$ が全射で連結なファイバーをもち、f の一般ファイバー F が楕円曲線である。ただし、C は非特異射影曲線とする。
さらに次の 2 つの事実を用いる。
(標準束公式)$f:X\to C$ を相対的極小楕円ファイバー空間とすると、

$$K_X=f^*D+\sum_i(m_i-1)F_i$$

が成立する。ただし、D は C 上の因子で、$\deg D=2g(C)-2+\chi(X)$ をみたし、m_iF_i は、f の重複ファイバーで $\sum_i$ は、このような重複ファイバーのすべての和をとる。
また、f が相対的極小とは、f のファイバー方向に (-1)- 曲線がない時をいう。
(不正則数に関する不等式)

$$g(C)\leq q(X)\leq g(C)+1$$

(3-1) X が極小の時。
標準束公式を用いて、

$$2g(L)-3 \geq K_X L=(2g(C)-2+\chi(X))F.L+\sum_i (m_i-1)F_iL$$

がいえる。ただし、F は f の一般ファイバーとする。
もし、$g(C)=0$ なら、$q(X)=0$ もしくは $q(X)=1$ より、$g(L)\geq q(X)$ は成り立つので $g(C)\geq 1$ とする。すると、$LF\geq 1$, $\sum_i (m_i-1)F_iL\geq 0$, $\chi(X)\geq 0$ より、$g(L)\geq g(C)+1\geq q(X)$ が証明される。

X が極小でない場合もほぼ同様に証明される。 □

そこで、$\kappa(X)\leq 1$ については、予想がいえたので、次に等号が成立する時、つまり $g(L)=q(X)$ となる (X,L) について分類をしよう。
その前に、分類をやりやすくするために、1つの概念を定義する。

定義 1.2. (X,L) を準偏極曲面とする。この時、(X,L) が、L- 極小とは、X 上の任意の *(-1)-* 曲線 E に対して $LE>0$ となるときをいう。

(注意) 任意の準偏極曲面 (X,L) に対して、ある準偏極曲面 (X',L') と双有理正則写像 $\mu: X\to X'$ があり、$(1)L=\mu^*L'$, $(2)(X',L')$ は L'- 極小、となるものが存在する。特に $g(L)=g(L')$, $q(X)=q(X')$ である。
これは、X 上のある (-1)- 曲線 E_0 で、$LE_0=0$ となるものがあれば、そのような E_0 をブローダウンしてやる。それを、$\mu_0: X\to X_1$ として、L_1 をサイクルの意味で L を X_1 におとしたものとする。すると (X_1,L_1) は準偏極曲面となる。もし (X_1,L_1) が L_1- 極小ならこれでよい。もしそうでなければ、(X_1,L_1) にたいして上の操作を繰り返す。このようにしてつくられる。
すると、この概念を定義することにより、(X,L) が L- 極小の時について $g(L)=q(X)$ の成立するものを調べれば、(X,L) が L- 極小でない時で $g(L)=q(X)$ を満たすものは、(X,μ^*L') の形のみとなる。ただし、(X',L') は L'- 極小な準偏極曲面、$\mu: X\to X'$ は双有理正則写像。
よって、(X,L) を L- 極小として考えることにする。

定理 1.3.
(X,L) を L- 極小な準偏極曲面で $\kappa(X)\leq 1$ とする。もし $g(L)=q(X)$ をみたすなら (X,L) は次の通りとなる。
(1-1) $(X,L)=(\mathbb{P}^2,\mathcal{O}(r))$, $r=1,2$
(1-2) X は、非特異曲線上の $\mathbb{P}^1$ 束で、$L|_{fiber}=\mathcal{O}(1)$.
(2-1) $(X,L)=(J(C),L)$ ただし、$J(C)$ は、種数 2 の非特異曲線 C の Jacobian 多様体で、L はテータ因子の平行移動類。
(2-2) $(X,L)=(C_1\times C_2,F_1+F_2)$ ただし、C_i は楕円曲線で、F_i は $C_1\times C_2\to C_i$ のファイバーをあらわす。 $(i=1,2)$
(2-1)' (X,L) は *(2-1)* の一点ブローアップで、その *(-1)-* 曲線を E とすると $LE=1$ が成り立つ。
(2-2)' (X,L) は *(2-2)* の一点ブローアップで、その *(-1)-* 曲線を E とすると $LE=1$ が成り立つ。

(3) $(X, L) = (F \times C, L)$ ただし、F は楕円曲線で、C は種数が 2 以上の非特異曲線、$L \equiv F + C$。
(3)' (X, L) は *(3)* の一点ブローアップで、その *(-1)*- 曲線を E とすると $LE = 1$ が成り立つ。

証明. (詳しくは、[Fk1] をみよ)
(1)$\kappa(X) = -\infty$ の時。
この時、$K_X + L$ は、nef でないことがいえる。すると、ある extremal rational curve l で、$(K_X + L)l < 0$ となるものが存在する。すると、これより X, l は次のようなものに限られる。
(a)$X = \mathbb{P}^2$, l:X 上の直線
(b)X は非特異曲線上の $\mathbb{P}^1$ 束で、l はそのファイバー.
(c)l は、(-1)- 曲線

(a) から (1-1),(b) から (1-2) が得られる。(c) は L- 極小の仮定からありえないことがわかる。

(2) $\kappa(X) = 0$ の時。
この時は、$g(L) = q(X) \leq 2$ より、$\kappa(X) = 0$ であることを考えると、$g(L) = q(X) = 2$ のみありうる。よって、$(L^2, LK_X) = (2, 0), (1, 1)$ の 2 通りが考えられる。

(2-a) $(L^2, LK_X) = (2, 0)$ の時。
実はこの時、X は極小となることがわかり、よって X は Abel 曲面である。すると L は ample であることがいえるので、前に述べたように $g(L) = q(X) = 2$ の分類は、わかっている。それをもちいると、(2-1) (2-2) がでる。

(2-b) $(L^2, LK_X) = (1, 1)$ の時。
この時は、X は極小ではなく、計算することにより (2-1) , (2-2) の一点ブローアップであることがわかる。

(3) $\kappa(X) = 1$ の時。
この時も、楕円ファイバー空間 $f : X \to C$ があることに注目して調べる。その際、やはり標準束公式を用いるのであるが、さらに次の Beauville 氏の結果 ([B]) をもちいる。

(Beauville)X を非特異曲面、C を非特異曲線とし、$f : X \to C$ を全射で連結なファイバーをもつとする。この時、$q(X) \leq g(F) + g(C)$ が成り立つ。ただし、F は f の一般ファイバーとする。さらに、$q(X) = g(F) + g(C)$ ならば、X は $F \times C$ と双有理同値である。

すると、$q(X) = g(C)$ と $q(X) = g(C) + 1$ に場合わけして考えると、$g(L) = g(C)$ の時は実は、ありえないことがわかる。よって、$g(L) = g(C) + 1$ の時を考えるのである。
X が極小の時、Beauville 氏の結果を用いると $X \cong F \times C$ である。ただし、F は f のファイバーで楕円曲線であり、C は種数が 2 以上の非特異曲線。
すると、標準束公式を用いると、

$$2g(L) - 2 = (2g(L) - 4)LF + L^2$$

を得る。
この時、$LF \geq 2$ は、ありえないことが証明できるので、$LF = 1$, $L^2 = 2$ がいえる。
ここで、F_t を $t \in C$ 上の f によるファイバーとすると、F_t は楕円曲線で $LF_t = 1$ である。
よって、$h^0(L|_{F_t}) = 1$ がいえるので、$L|_{F_t} \sim P_t$ 、ただし P_t は、F_t 上の点である。
(y, t) を $F \times C$ 上の点とし、$(y(P_t), t)$ で点 P_t を表すとする。この時、射 $h : F \times C \to F \times C$ を次のように定義する。

$$h(y, t) = (y - y(P_t), t)$$

すると、h は同型写像になる。したがって、

$$L = h^*(\{0\} \times C) + f^*D$$

ただし、D は C 上の因子。
他方、$L^2 = 2$ より、$\deg D = 1$ が得られ、したがって、$L \equiv F + C$ となる。よって (3) が得られる。
X が極小でない場合も同様に調べれば、$(3)'$ が得られる。 □

以上より、$\kappa(X) \leq 1$ のときは、ほとんど問題は解決している。

(注意)
上であげたタイプは、各々実際に存在することがわかっている。
特に、$(2\text{-}1)'$ の例は、Lanteri 氏 [L] により得られている。
それはどのようなものかを簡単にのべると、
C を種数 2 の非特異射影曲線、Y を C の 2 次対称積とする。この時、自然な写像 $\varphi : C \times C \to Y$ と、$C' = C \times \{y\}$ (ただし、y は C 上の点。) に対して、$H = \varphi(C')$ とおく。すると、H は、Y 上の種数 2 の非特異曲線となり、かつ Y 上 ample となる。
この (Y, H) が、$(2\text{-}1)'$ の例である。

ここで、X に特異点がある場合を考えておく。
一般に、X を正規射影多様体、L を nef かつ big な Cartier 因子とする。
この時、$\mu : \tilde{X} \to X$ を X の特異点解消とする。ただし、$\tilde{X}$ は非特異射影多様体。ここで、$\tilde{L} = \mu^*L$ とおいた時、$\tilde{L}$ は nef かつ big な Cartier 因子である。
実は、つぎのことがいえる。

補題 ([Ft5]). $g(\tilde{L}) = g(L)$.

この補題をもちいれば、一般につぎのことがいえる。
任意の準偏極多様体 (特に X は非特異) (X, L) に対して、$g(L) \geq q(X)$ がいえれば、X が一般に正規の時でも、$g(L) \geq q(X)$ はいえる。ただし、X が正規のときは、X のある特異点解消 $\mu : \tilde{X} \to X$ に対して、$q(X) = h^1(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ と定義する。(この時、$q(X)$ は X の特異点解消のとり方によらないことに注意。)
したがって、上の結果よりつぎもいえていることになる。

定理 1.1$'$. *X を $\kappa(X) \leq 1$ の正規射影曲面、L を nef かつ big な Cartier 因子とする。この時、$g(L) \geq q(X)$ が成り立つ。* □

1-2: $\kappa(X) = 2$ の場合。

X が一般型曲面の場合、じつは完全に問題が解決しているわけではない。さらに、この時、どのように考えるべきかも問題になるのですが、$\kappa(X) = 1$ の場合にファイバー空間と考えることによってうまくいったので、これをヒントにして、X が fibration をもつと考えてやるのがよさそうである。(この考えは、高次元の場合を考える上でも重要な見方である。)
そこで、以下 $f : X \to C$ 全射で連結なファイバーをもつ場合を考える。

定義 1.4. (f, X, C, L) が準偏極ファイバー空間とは、$f: X \to C$ が上のようなもので、L が *nef* かつ *big* の時をいう。

まず、次のような一般的な事実がいえる。

定理 1.5. (f, X, C, L) が準偏極ファイバー空間で、$\kappa(X) = 2$ とする。
この時、$g(L) \geq g(C) + 1$ が成立する。

証明. この証明の1つのポイントは、$g(L)$ を次のようにうまく変形することである。

$$g(L) = g(C) + \frac{1}{2}(K_{X/C} + L)L + (LF - 1)(g(C) - 1)$$

ただし、$K_{X/C} = K_X - f^*K_C$: 相対的標準因子。
もう1つのポイントは、次の Arakelov の定理を用いることである。

(Arakelov)([B]) (f, X, C, L) を、相対的極小ファイバー空間で、$g(F) \geq 2$ とする。
この時、$K_{X/C}$ は nef である。

この Arakelov の定理を用いると次がいえる。

補題 1.6. (f, X, C, L) を準偏極ファイバー空間で、$\kappa(X) = 2$ とする。
この時、$K_{X/C}L \geq 0$ が成立する。 □

そこで、定理 1.5 の証明をのべると、
(1) $g(C) = 0$ の時、$g(L) \geq 2 > 1 = g(C) + 1$.
(2) $g(C) \geq 1$ の時、$(LF - 1)(g(C) - 1) \geq 0$ かつ $K_{X/C}L \geq 0$ なので、$g(L)$ が整数値をとることを考えると、$g(L) \geq g(C) + 1$ がいえる。 □

系 1.7. (X, L) を、準偏極曲面で $\kappa(X) = 2$ とする。もし X の *Albanese* 写像の像の次元が 1 ならば、$g(L) \geq q(X) + 1$ が成立する。

では、$f: X \to C$ の一般ファイバー F の種数に制限をくわえた場合、予想1がどの程度いえるのであろうか？それに対して今のところわかっているのは下の結果である。

定理 1.8. (f, X, C, L) を準偏極ファイバー空間で、$\kappa(X) = 2$ とする。
もし $g(F)$ が 2 もしくは 3 ならば、$g(L) \geq q(X)$ が成り立つ。

証明. この証明は、定理 1.5 の中で述べた $g(L)$ のうまい変形と、定理 1.3 の中でもちいた Beauville 氏の結果を用いて調べていくのである。
例えば $g(F) = 2$ の時の証明をのべる。この時は、$q(X) \leq g(C) + g(F) = g(C) + 2$ である。もし $q(X) = g(C) + 2$ なら、Beauville 氏の結果より X は $F \times C$ と双有理同値であるが、じつはこの時は、$g(L) \geq q(X)$ は証明できる。つぎに $q(X) \leq g(C) + 1$ とすると、このときは、上の定理 1.5 より $g(L) \geq g(C) + 1 \geq q(X)$ となるので正しい。
$g(F) = 3$ の時の証明は、多少複雑になる。（詳しくは、[Fk1] をみよ。） □

偏極多様体の断面種数と不正則数について

§2. $\dim X \geq 3$ の場合

ここでの主結果は、つぎの定理である。

定理 2.1 ([Fk2]) .
(X, L) を準偏極多様体で $\dim X = n \geq 3$, $\kappa(X) = 0$ もしくは $\kappa(X) = 1$ とする。
もし $L^n \geq 2$ なら、$g(L) \geq q(X)$ が成立する。

($\kappa(X) = 0$ の時の証明)
この時、川又氏の定理 ([Ka1]) より、$q(X) \leq n$ である。
よって、仮定を用いると

$$\begin{aligned} g(L) &= 1 + \frac{1}{2}(K_X + (n-1)L)L^{n-1} \\ &\geq 1 + (n-1) \\ &\geq q(X) \end{aligned}$$

□

したがって、$\kappa(X) = 1$ の時が問題となる。
そこで、この場合を考えるための1つのステップとして、次の予想を考える。

予想 2. X, Y を非特異射影多様体で、$\dim X > \dim Y \geq 1$ を満たし、$f : X \to Y$ は全射で連結なファイバーをもつものとする。そして、L を X 上の *nef* かつ *big* な因子とする。
この時、$g(L) \geq q(Y)$ が成立する。

(注意)
(1) 予想 1 が正しいなら、予想 2 も正しい。
(2)$\dim X = 2$ の時、予想 2 は正しい。(定理 1.1 と 定理 1.5)

まず、この予想 2 についていくつかの結果を述べる。
ここで述べる結果は、$\dim Y = 1$ の時である。以下 Y を C と書くことにする。

定理 2.2. (f, X, C, L) を偏極ファイバー空間で、$\dim C = 1$, $\dim X = n \geq 3$ とする。
この時、$g(L) \geq g(C)$ が成立する。ただし、$g(C)$ は C の種数。

証明. まず、つぎの補題を示す。

補題 2.3. (f, X, C, L) を定理 *2.2* と同様とする。
この時、$K_{X/C} + (n-1)L$ は、(f, X, C, L) が *scroll* でなければ、*nef* である。

ここで、(f, X, C, L) が scroll であるとは、$f : X \to C$ の任意のファイバー F に対し $(F, L_F) = (\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}(1))$ となるときをいう。

補題 2.3 の証明の概略. もし $K_{X/C} + (n-1)L$ が f-nef とする。
このとき、実は $K_{X/C} + (n-1)L$ は nef となる。それはつぎのようにして示される。

$K_{X/C}+(n-1)L-K_X$ は、f-ample より固定点自由化定理 ([KMM]) から、十分大きい自然数 m に対して、

$$f^*f_*\mathcal{O}(m(K_{X/C}+(n-1)L)) \to \mathcal{O}(m(K_{X/C}+(n-1)L)) \tag{2.3.1}$$

は、全射である。
一方、Viehweg 氏の論文 [V] の Theorem III の証明と同様にして、つぎのことが証明できる。

補題 2.4. X, Y を、非特異射影的多様体、A を X 上の *semiample* な因子、$f: X \to Y$ を全射とする。この時、任意の自然数 m に対して、$f_*\mathcal{O}(m(K_{X/Y}+A))$ は *weakly positive* である。
ただし、*weakly positive* などの言葉の定義は、[V] を見よ。

特に、ここでは $\dim Y = 1$ であるので、この補題を用いれば、$f_*\mathcal{O}(m(K_{X/C}+(n-1)L))$ は、semipositive であることがわかる。すると、上の (2.3.1) の全射性より、$K_{X/C}+(n-1)L$ は nef であることがわかる。
つぎに、$K_{X/C}+(n-1)L$ は、f-nef でないとする。
この時、ある extremal rational curve l で $f(l)$ は一点 、$(K_{X/C}+(n-1)L).l < 0$ となるものが存在する。$\phi: X \to Z$ を、l の contraction morphism とすると、ある morphism $\mu: Z \to C$ があって、$f = \mu \circ \phi$ となるものが存在する。
この時、藤田氏の結果 ([Ft1]) を用いると、$\dim Z = 1$ であり、かつ (ϕ, X, Z, L) は scroll となることがいえる。
一方、f は連結なファイバーをもつので、μ は同型写像となり、(f, X, C, L) は、scroll となる。(補題 2.3 の証明終り。)

(定理 2.2 の証明)
$g(L)$ を次のように、うまく変形する。

$$g(L) = g(C) + \frac{1}{2}(K_{X/C}+(n-1)L)L^{n-1} + (L^{n-1}F-1)(g(C)-1) \tag{2.2.1}$$

ただし、F は f の一般ファイバーとする。
$g(C)=0$ のときは、$g(L) \geq 0 = g(C)$ より正しい。(Introduction をみよ。)
$g(C) \geq 1$ の時は、まず、$(L^{n-1}F-1)(g(C)-1) \geq 0$ はいえる。
もし、$K_{X/C}+(n-1)L$ が nef なら、上の式より $g(L) \geq g(C)$ は成り立つ。
よって、$K_{X/C}+(n-1)L$ が nef でないとすると、上の補題 2.3 より (f, X, C, L) は、scroll となる。ところが、この時は、$g(L)$ が計算できて、$g(L) = g(C)$ となるので、いずれにしても $g(L) \geq g(C)$ がいえる。 □

(注意)
補題 2.3 の証明と同様にして次のこともいえる。
(f, X, C, L) を定理 2.2 と同様とする。このとき、$K_{X/C}+nL$ は、nef である。

次に、一般ファイバー F の小平次元に制限をつけると、さらによい評価が得られる。

定理 2.5. (f, X, C, L) を準偏極ファイバー空間で、$\dim X \geq 3$, $\dim C = 1$ とする。もし、$\kappa(F) \geq 0$ かつ $g(C) \geq 1$ なら、

$$g(L) \geq g(C) + \lceil \frac{n-1}{2} L^n \rceil$$

が成立する。ただし、$\lceil \ \rceil$ は、切り上げを表す。

証明. $\kappa(F) \geq 0$ より、十分大きい自然数 m に対して、$f_*\mathcal{O}(mK_{X/C}) \neq 0$。
従って、自然な写像

$$f^*f_*\mathcal{O}(mK_{X/C}) \to \mathcal{O}(mK_{X/C})$$

が存在する。
このとき、

$$\mathrm{Im}(f^*f_*\mathcal{O}(mK_{X/C}) \to \mathcal{O}(mK_{X/C}))^{**} = \mathcal{O}(mK_{X/C} - Z)$$

とする。ただし、** は double dual を表し、Z は X 上の effective divisor。
もし必要なら、ある双有理射 $\mu : X' \to X$ をとり、

$$\mu^*f^*f_*\mathcal{O}(mK_{X/C}) \to \mu^*\mathcal{O}(mK_{X/C} - Z) \otimes \mathcal{O}(-E)$$

は全射となる。ただし、E は、μ-exceptional な effective divisor。
すると、川又氏の定理 ([Ka2]) より、$f_*\mathcal{O}(mK_{X/C})$ は semipositive。
よって、$\mu^*(mK_{X/C} - Z) - E$ は、nef であることがいえる。
μ^*L は nef に注意すると、

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\mu^*L)^{n-1}(\mu^*(mK_{X/C} - Z) - E) \\ &= L^{n-1}(mK_{X/C} - Z) \end{aligned}$$

よって、$K_{X/C}L^{n-1} \geq 0$ がいえる。
したがって、定理 2.2 の証明内の式 (2.2.1) を使えば、

$$g(L) \geq g(C) + \lceil \frac{n-1}{2} L^n \rceil$$

がいえる。 □

そこで、定理 2.1 の $\kappa(X) = 1$ の場合の証明をしたいのだが、それは定理 2.5 からでるのである。

(定理 2.1 の $\kappa(X) = 1$ の場合の証明)
この時、飯高理論 ([I1],[I2]) により、次のようなファイバーが存在する。つまり、
ある非特異射影多様体 X' と、ある非特異射影曲線 C と、ある双有理射 $\mu : X' \to X$ と、全射で連結なファイバーをもつ射 $f : X' \to C$ で一般ファイバー F の小平次元が 0 なるものが存在する。
ここで、注意すべきことは、$L' = \mu^*L$ とおくと、(X', L') は準偏極多様体となり、
$(L')^n = L^n$, $g(L) = g(L')$ をみたし、(f, X', C, L') は準偏極ファイバー空間となることである。

(1) $g(C)=0$ の時
まず、仮定より、

$$\begin{aligned} g(L) &= 1+\frac{1}{2}(K_X+(n-1)L)L^{n-1} \\ &\geq 1+(n-1) \end{aligned}$$

がいえる。
ところが、$\dim C=1$ より、次のような不正則数の間の不等式がいえる。

$$q(X') \leq q(F)+g(C)$$

ただし、F は f の一般ファイバー。
また、$\kappa(F)=0$ より、川又氏の定理 ([Ka1]) より、$q(F) \leq \dim F = n-1$ がいえるので、

$$\begin{aligned} g(L) &\geq 1+(n-1) \\ &> g(C)+q(F) \\ &\geq q(X') \\ &= q(X) \end{aligned}$$

(2) $g(C) \geq 1$ の時
定理 2.5 をもちいて、

$$g(L)=g(L') \geq g(C)+\lceil \frac{n-1}{2}(L')^n \rceil = g(C)+\lceil \frac{n-1}{2}L^n \rceil$$

が成立する。一方仮定と上で述べた不正則数の間の不等式を用いれば、

$$\begin{aligned} g(L) &\geq g(C)+(n-1) \\ &\geq g(C)+q(F) \\ &\geq q(X') \\ &= q(X) \end{aligned}$$

を得る。 □

以上の議論よりわかるように、予想 1 を考える時、X が fibration の構造をもつものとして考えるのが自然である。

References

[B] A.Beauville, *L'inégalité $p_g \geq 2q-4$ pour les surfaces de type général*, Bull.Soc.Math.Fr **110** (1982), 343–346.

[BLP] M.Beltrametti,A.Lanteri,and M.Palleschi, *Algebraic surfaces containing an ample divisor of arithmetic genus two*, Arkiv.för mat **25** (1987), 189–210.

[D] O.Debarre, *Inégalités numériques pour les surfaces de type général*, Bull.Soc.Math.Fr **110** (1982), 319–346; *Addendam*, Bull.Soc.Math.Fr **111** (1983), 301–302.

[Ft1] T.Fujita, *On polarized manifolds whose adjoint bundles are not semipositive*, Advanced Studies in Pure Math **10** (1987), 167–178.

[Ft2] ______, *Classification Theories of Polarized Varieties*, London Math.Soc.Lecture Note Series **155** (1990), Cambridge.

[Ft3] ______, *On Kähler fiber spaces over curves*, J.Math.Soc.Japan **30** (1978), 779–794.

[Ft4] ______, *Classification of Polarized manifolds of sectional genus* 2, in Algebraic Geometry and Commutative Algebra , in Honor of Masayoshi Nagata (1987), 73–98.

[Ft5] ______, *Remarks on quasi-polarized varieties*, Nagoya Math.J **15** (1989), 105–123.

[Fk1] Y.Fukuma, *A lower bound for sectional genus of quasi-polarized surfaces*, preprint.

[Fk2] ______, *A lower bound for sectional genus of quasi-polarized manifolds*, preprint.

[H] R.Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math **52** (1977), Springer.

[I1] S.Iitaka, *On D-dimension of algebraic varietis*, J.Math.Soc.Japan **23** (1971), 356–373.

[I2] ______, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math **76** (1982), Springer.

[Is] H.Ishihara, *On polarized manifolds of sectional genus three*, preprint.

[KMM] Y.Kawamata K.Matsuda and K.Matsuki, *Introduction to the minimal model problem*, Advanced Studies in Pure Math **10** (1987), 283–360.

[Ka1] Y.Kawamata, *Characterization of Abelian varieties*, Composit.Math **43** (1981), 253–276.

[Ka2] ______, *Kodaira dimension of algebraic fiber spaces over curves*, Invent.Math **66** (1982), 59–71.

[L] A.Lanteri, *Algebraic surfaces containing a smooth curve of genus $q(S)$ as an ample divisor*, Geometriae Dedicata **17** (1984), 189–197.

[LP] A.Lanteri and M.Palleschi, *About the adjunction process for polarized algebraic surfaces*, J.reine. angew.Math **352** (1984), 15–23.

[Ma] H.Maeda, *On polarized surfaces of sectional genus three*, Sci.Pap.Col.of Arts and Sci.Univ of Tokyo **37** (1987), 103–112.

[V] E.Viehweg, *Weak positivity and the additivity of the Kodaira dimension for certain fiber spaces*, Advanced Studies in Pure Math **1** (1983), 329–353.

152 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京工業大学理学部数学教室

E-mail: fukuma@math.titech.ac.jp