代数幾何学シンポジウム記録
1994年度 pp.120-123

SIGNATURE DEFECTS OF DEGENERATE ABELIAN VARIETIES *

尾形庄悦
東北大学理学部

平成６年１２月２０日

1 ` signature defect の定義

$4k$ 次元 C^∞ 多様体 M に対し $H^{2k}(M,\partial M;\mathbf{R})$ 上の線形対称二次形式 b_M をカップ積 $H^{2k}(M,\partial M;\mathbf{R})\times H^{2k}(M;\mathbf{R})\to H^{4k}(M,\partial M;\mathbf{R})$ の後 $(M,\partial M)$ の基本類で値をとったものと定める。b_M を $H^{2k}(M,\partial M)/\mathrm{Ker}[H^{2k}(M,\partial M)\to H^{2k}(M)]$ 上の二次形式と考えると非退化である。

定義 1 $\mathrm{sgn}(M,\partial M)(=\mathrm{sgn}(M)):=b_M$ の符号数.

もし M に境界 ∂M がなければ、Hirzebruch の指数定理により等式

$$\mathrm{sgn}(M)=L_k(p_1,\ldots,p_k)[M],$$

が成り立つ。ここに、$p_j\in H^{4j}(M;\mathbf{Z})$ は Pontrijagin 類で、L_k は Hirzebruch の L 多項式である。

定義 2 (Hirzebruch[4]) もし境界が空でなく接束の境界への制限 $TM|_{\partial M}$ が自明ならば、*Pontrijagin* 類 $p_j\in H^{4j}(M,\partial M;\mathbf{Z})$ が存在するから *signature defect* を

$$\delta(M,\partial M):=L_k(p_1,\ldots,p_k)[M,\partial M]-\mathrm{sgn}(M,\partial M)$$

で定める。

次に、M が複素多様体の場合を考える。$2k$ 次元複素多様体 X の Pontrijagin 類 $p_j\in H^{4j}(X;\mathbf{Z})$ は Chern 類を使って表せるから、$L_k(p_1,\ldots,p_k)=\bar{L}_k(c_1,\ldots,c_{2k})$ を満たす多項式 $\bar{L}_k$ が存在する。もし境界 ∂X が空でなく、Chern 類 $c_j\in H^{2j}(X;\mathbf{Z})$ の $H^{2j}(\partial X;\mathbf{Q})$ での像が消えれば原像 $\tilde{c}_j\in H^{2j}(X,\partial X;\mathbf{Q})$ がある。

*京都大学理学部の斉藤政彦氏との共同研究

定義 3 (Hirzebruch[4]) 上の状況の下で *signature defect* を

$$\varphi(X, \partial X) := \tilde{L}_k(\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_{2k})[X, \partial X] - \mathrm{sgn}(X, \partial X)$$

で定める。ここで $\tilde{c}_{2k}[X, \partial X]$ は X のオイラー数 $e(X)$ で置き換える。

2　アーベル多様体の退化

$2k$ 次元非特異多様体 X から単位閉円板 $\bar{\Delta} := \{t \in \mathbf{C}; |t| \leq 1\}$ への固有全射 $f : X \to \bar{\Delta}$ で $X_0 := f^{-1}(0)$ の外では smooth かつ一般ファイバー $X_t := f^{-1}(t)$ $(t \neq 0)$ がアーベル多様体と同型であるものを考える。この境界 $\partial X = f^{-1}(\partial\bar{\Delta})$ は定義 2 または定義 3 の条件を満たす。我々は不変量 $\delta(X, \partial X)$ や $\varphi(X, \partial X)$ を求めたい。我々は f が section を持つと仮定する。∂X は S^1 上の $(S^1)^{4k-2}$ 束であり、その構造は $H_1(X_1; \mathbf{Z})$ へ作用するモノドロミー T により定まる。Hodge 構造の退化の理論から

$$(T^l - \mathrm{Id})^m = 0, \quad m = 2$$

がわかる。我々は典型的な二つの場合

1.(有限モノドロミー)	$T^l = \mathrm{Id}$
2.(巾単モノドロミー)	$T \neq \mathrm{Id}, (T - \mathrm{Id})^2 = 0$

を扱う。

3　巾単モノドロミーの場合

この場合、∂X は定義 2 の仮定を満たす。従って、$\delta = \varphi$ である。我々は、Atiyah と Patodi, Singer の境界付き多様体に対する指数定理を使う。

Theorem 1 (Atiyah-Patodi-Singer[2]) *Let X be a Riemannian manifold isometric to product $\partial X \times [0, 1)$ near the boundary ∂X. Then we have*

$$\int_X L_k(p_1(\Omega), \ldots, p_k(\Omega)) - \mathrm{sgn}(X, \partial X) = \eta_B(0),$$

where $p_j(\Omega)$ is the Pontrijagin form defined from the curvature form and

$$\eta_B(s) := \sum_{\lambda \neq 0} \frac{\mathrm{sign}\lambda}{|\lambda|^s} \quad \text{for} \quad \mathrm{Re}\ s >> 0,$$

the summation is taken over all eigenvalues of the first order selfadjoint elliptic differential operator B on $A^{ev}(\partial X) := \oplus_{p \geq 0} A^{2p}(\partial X)$ defined by $B\phi = (-1)^{k+p+1}(*d - d*)\phi$ for $\phi \in A^{2p}(\partial X)$.

$L := H_1(X_1;\mathbf{Z})$ とおけば、L は階数 2n (n=2k-1) の自由アーベル群である。$N := T - \mathrm{Id} \in \mathrm{End}(L)$ とおくと、$N \neq 0, N^2 = 0$ である。$r := \mathrm{rank}(\mathrm{Ker}N)$ とおくと、$r \geq n = 2k-1$ である。$n = 1$ の場合、

$$N = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (b > 0)$$

である。

Theorem 2 *When $r > n$ we have $\delta = 0$. When $n = 1$ we have $\delta = \frac{b}{3} - 1$. When $r = n > 1$ we see that δ is an integer.*

Theorem 3 *If*

$$N = \begin{pmatrix} O & C \\ O & O \end{pmatrix}$$

and if C is the diagonal matrix $\mathrm{diag}(f_1, \ldots, f_n)$ with $f_i > 0$, then we have $\delta = \mathrm{sgn} B_0$. Here B_0 is the linear operator on the real vector space H generating by symbols ω_I for all subsets $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ with $|I| = k$, and B_0 operates as

$$B_0 \omega_I = \sum_{i \in I} (-1)^i f_i \omega_{I^c \cup \{i\}}.$$

4 有限モノドロミーの場合

我々は、Atiyah と Patodi, Singer の定理の G 同変への一般化 [3] を使う。

有限群 G が Y 上へ等長的に作用し、境界 ∂Y 上へ自由に作用していると仮定する。このとき任意の元 $g \in G$ に対し、

$$\eta_B(s, g) = \sum_{\lambda \neq 0} \frac{\mathrm{sign}\lambda \ \mathrm{Tr}(g|_{H_\lambda})}{|\lambda|^s} \quad \mathrm{Re} s >> 0$$

が成り立つ。ここに H_λ は固有値 λ に対応する B の固有空間である。更に、商空間 $\partial Y/G$ 上の B に対応する微分作用素 B^G のエータ級数を $\eta(s, \partial Y/G)$ と表せば、

$$\eta(s, \partial Y/G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \eta_B(s, g)$$

が成り立つ。

我々の場合、$n = 2k - 1$ 次元アーベル多様体 A が存在して、$Y = A \times S^1$ であり、$T^l = \mathrm{Id}$ だから群 $G = < g > \cong \mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$ が Y 上自由に作用し、$\partial X = Y/G$ である。

Theorem 4 *Assume that g acts on A as a diagonal form*

$$(e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}a_1}{l}}, e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}a_2}{l}}, \ldots, e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}a_n}{l}}).$$

Then we have

$$\eta_B(s,g^j) = (2\pi)^{-s}(-1)^k 2^{n+1}\prod_{i=1}^{n}\sin(\frac{2\pi j a_i}{l})\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{2\pi m j}{l})}{m^s}.$$

In particular, we have

$$\eta(0,\partial X) = (-1)^{k+1}2^n\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{l}\prod_{i=1}^{n}\sin(\frac{2\pi j a_i}{l})\cot(\frac{\pi j}{l}).$$

参考文献

[1] M. F. Atiyah, H. Donnelly and I. M. Singer. *Eta invariants, signature defects of cusps, and values of L-functions*, Ann. of Math. **118** (1983), 131–177.

[2] M. F. Atiyah, V. K. Patodi. *Spectral asymmetry and Riemannian geometry I*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **77**(1975), 43–69.

[3] H. Donnelly. *Eta invariants for G-spaces*, Indiana Univ. Math. J. **27** (1978), 889–918.

[4] F. Hirzebruch. *Hilbert modular surfaces*, Enseign. Math. **19** (1974), 183–281.