代数幾何学シンポジウム記録
1994年度 pp.77-94

On fibered Calabi-Yau threefolds of Type II$_0$

お茶の水女子大学理学部　小木曽 啓示

この小論では，城崎シンポジウムでの講演内容とその後の発展について要約したいと思います。出発点になるのは定理(1.2)で，主結果は，シンポジウムでも述べた定理(2.4)と，その後得られた定理(3.3)です。証明には，あまりふれません。証明に興味のある方は原論文を参照して下さい。

§1. 序 — Rough Classification of fibered Calabi-Yau 3-folds

定義(1.1)

(1) $\mathcal{O}_X(K_X) \simeq \mathcal{O}_X$ & $\pi_1(X) = \{1\}$ をみたす minimal projective 3-fold $X/\mathbb{C}$ を（ここでは）Calabi-Yau 3-fold と呼ぶ。

(2) Calabi-Yau 3-fold X からの surjective morphism $\varphi: X \to W$ が，(i) W は normal & projective (ii) φ の fibers は connected の 2 条件をみたすとき，$\varphi: X \to W$ を X 上の fiber space structure といい，fiber space structure 付きの Calabi-Yau 3-fold を fibered Calabi-Yau 3-fold と呼ぶ。 □

$\varphi: X \to W$ を fibered Calabi-Yau 3-fold とする。このとき，

H を W 上の very ample (effective) divisor とすると，φ は，$\varphi=\Phi_{|\varphi^*H|}$ によって，X 上の nef & effective divisor φ^*H から復元される。

次の定理は，fibered Calabi-Yau 3-fold を考える上での1つの出発点となるものである：

<u>定理(1.2)</u> ([O1],[SW],[OP]) (<u>Rough classification theorem of fibered Calabi-Yau 3-folds via numerical invariants</u>)

(1) $D\neq 0$ を Calabi-Yau 3-fold X 上の nef & effective divisor とすると，D は semi-ample：ある正の整数 m があって，$|mD|$ は free で，$\Phi:=\Phi_{|mD|}: X\to W\ (:=\mathrm{Im}\,\Phi)\subset\mathbb{P}^{\dim|mD|}$ は，fibered Calabi-Yau 3-fold となる。また，$\Phi: X\to W$ は，このような m のとり方によらず，D のみによって定まる。

(2) (1) の $\Phi: X\to W$ は，D に付随する2つの numerical invariants $\nu(X,D)$ と $D.c_2(X)$ の値で以下の様に分類，特徴付けされる。

ここで，

$\nu(X,D):=\max\{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\mid D^n\not\equiv 0\}$ (numerical Iitaka dimension)；

$c_2(X)$ は，$\mathrm{Sing}\,X$ (有限集合) の resolution $\nu:\tilde{X}\to X$ を用いて，$c_2(X).D:=c_2(\tilde{X}).\nu^*D$ で定まる $\mathrm{Pic}\,X$ 上の linear form。

Type	$\nu(X,D)$	$D.c_2(X)$	Structure of $\Phi: X\to W$
I_0	1	0	$\Phi: X\to\mathbb{P}^1$, general fiberは,（原点を指定しない）Abelian surface
I_+	1	+	$\Phi: X\to\mathbb{P}^1$, general fiberは K3 surface
II_0	2	0	Wは高々 log terminal singularities のみをもつ rational surface で. $\mathcal{O}_W(12K_W)\cong\mathcal{O}_W$. 一般ファイバーは,（原点を指定しない）elliptic curve.
II_+	2	+	$(W, {}^{\exists}\Delta)$（$\Delta>0$は$\mathbb{Q}$-divisor）は log terminal singularities で. Wは rational surface かつ $\mathcal{O}_W(12(K_W+\Delta))\cong\mathcal{O}_W$. 一般ファイバーは,（原点を指定しない）elliptic curve.
III_0	3	0	$\Phi: X\to W$は birational morphism で. Wは ${}^{\exists}$abelian 3-fold A の Gorenstein かつ codim $\geqq 2$ で free に作用する有限群 G による商：$W=A/G$.
III_+	3	+	$\Phi: X\to W$は birational morphism で. Wは III_0 中にあらわれたもの以外の canonical Calabi-Yau 3-fold.

逆に. structure で述べられた性質は各 Type を特徴付ける。

□

注意

(1) $c_2(X)$は ν のとり方によらず定まり，D が nef ならば，$c_2(X).D\geqq 0$ である。（[Mi]）

(2) 定理(1)は，abundance theorem for minimal 3-folds（[Ka4]）の modification。今では，定理(1)は，log abundance theorem for 3-folds（[KeMaMa]）の系でもある。

(3) [O1]では，仮定 $\pi_1^{\text{alg.}}(X - \mathrm{Sing}\,X) = \{1\}$ の下で論じているが，$\mathcal{O}_X(K_X) \cong \mathcal{O}_X$ より，$\pi_1(X) = \{1\} \Leftrightarrow \pi_1(X - \mathrm{Sing}\,X) = \{1\}$ が，[Ka3] より従うので，[O1] の議論はそのまま適用できる。しかも，この仮定から，$h^1(\mathcal{O}_X) = 0$ も従うことが，[Ka2] からわかる。

(4) [O1]には，Type II_0, II_+ 中の式 $\mathcal{O}_W(12K_W) \cong \mathcal{O}_W$，$\mathcal{O}_W(12(K_W + \Delta)) \cong \mathcal{O}_W$ の記述はない。[Ka1], [N] にもとづく，sheaf theoretic な証明は [OP] に書いてある。

(5) 表中 Type II_0 と II_+ の違いはそれ程顕著にあらわれていないが，特異ファイバーの様子には大きな違いがある。W の general hyperplane H をとり，$\Phi: X \to W$ を H に base change して得られる極小楕円曲面 $\Phi|_S: S \to H$ について，Type II_0 のときは smooth fibration になるが，Type II_+ の時には，有理曲線（いくつか）からなる特異ファイバーを必ずもつ。（いずれの場合も multiple fiber はもたないが。）([O1])．従って，Type II_0 と Type II_+ は区別して扱われるべきものと思われる。

(6) Type II_0 の base surface はかなり特殊な有理曲面である。Zhang 氏はこの様に $K_W \equiv 0$ となる（高々商特異点のみ

をもつ)有理曲面を log Enriques 曲面と呼んでいる。([Z])

(7) [O1] には，Type III₀ と Type III₊ は区別されていない。ここに書いた，Type III₀ の特徴付けは，Shepherd-Barron と Wilson ([SW]) による。

(8) 各 Type の存在は，[O1，O2，O4] に示されている。□

ところで，この分類表を見る限り，Type II₀ と Type III₀ はかなり特殊な fiber space structure に思われる。分類理論での基本的考え方：『特殊なものは完全に分類し，一般的なものは family を記述(考察)する。』に従えば，Type II₀ 及び Type III₀ の fibered Calabi-Yau 3-folds は完全な分類が期待される対象である。この小論の目的は，§2で，(城崎で話した) Type II₀ の1つの自然な subclass である Type II₀A について，§3で，(その後でてきた) Type III₀ について，それぞれ完全に分類した結果を述べることである。いずれの場合も得られる Calabi-Yau 3-folds はすべて rigid になる。本当に"特殊"なのである。

<u>注意</u> 一般的なものについては，family を考察すると述べた。この立場からは，M. Gross ([G]) による次の深い

結果が知られている。

<u>定理 (M. Gross)</u>

Elliptic fibered Calabi-Yau 3-folds は up to birational equivalence で bounded family をなす。 □

<u>§2. Complete Classification of fibered C.Y. 3-folds of Type II_0A</u>

$\Phi : X \to W$ を fibered Calabi-Yau 3-fold of Type II_0 とする。このとき, $I := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{O}_W(nK_W) \cong \mathcal{O}_W\}$ (= the global canonical index) とおくと, 定理(1.2)より $n \mid 12$ である。

$\Phi : X \to W$ は, W の global canonical cover

$\pi : \widetilde{W} := \mathrm{Spec}_{\mathcal{O}_W}\left(\bigoplus_{i=0}^{I-1} \mathcal{O}_W(-iK_W)\right) \to W$ によって, 次の2つの場合に分かれる:

Type II_0A : $\widetilde{W}$ は abelian surface ;

Type II_0K : $\widetilde{W}$ は高々 Du Val singularities のみをもつ K3 surface.

この節では, fibered Calabi-Yau 3-folds of Type II_0A を完全に分類する。(Type II_0K についてはできていない。)

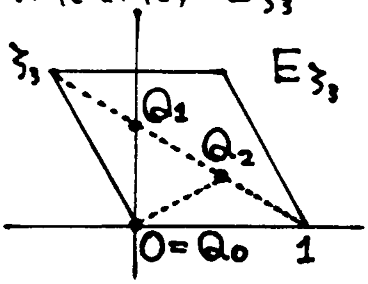
出発点は, Ueno-Beauville による次の例である。

<u>例(2.1) ([B])</u>

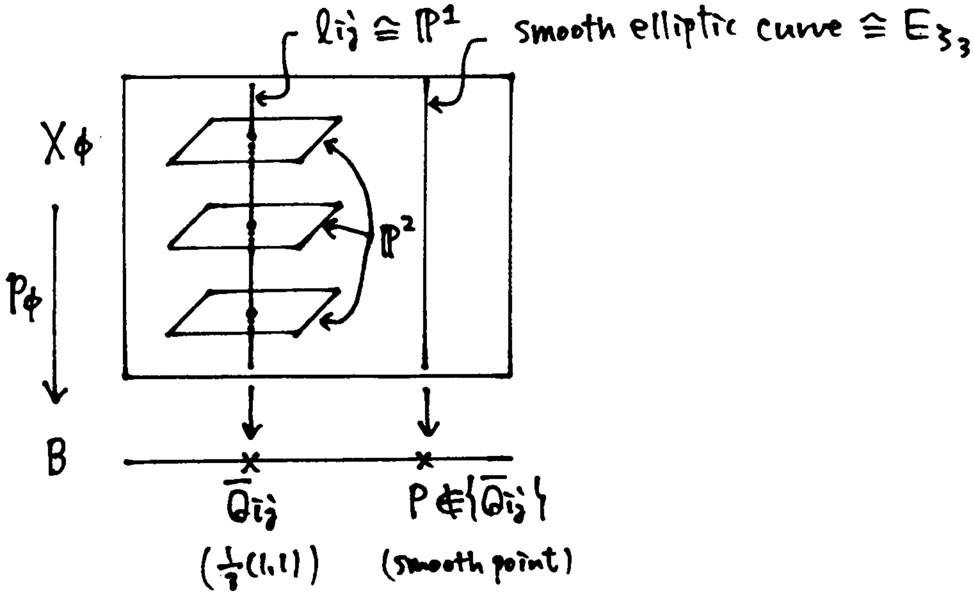
$\zeta_3 = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}\right)$ とし, period が ζ_3 の elliptic curve

$E_{\zeta_3} := \mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\zeta_3$ を考える。すると，abelian n-fold $E_{\zeta_3}^n$ はζ_3倍する自己同型 $g_n : E_{\zeta_3}^n \to E_{\zeta_3}^n$ $(x_i)\mapsto(\zeta_3 x_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ をもつ。特に，$E_{\zeta_3}^3/\langle g_3\rangle$ は27個の $\frac{1}{3}(1,1,1)$型特異点をもち，その toric resolution $X_\phi \xrightarrow{\nu} E_{\zeta_3}^3/\langle g_3\rangle$ は，smooth Calabi-Yau 3-fold となり，ν と自然な射影 $p_{12} : E_{\zeta_3}^3/\langle g_3\rangle \to E_{\zeta_3}^2/\langle g_2\rangle$ ($:= B$ とおく。) の合成写像 $p_\phi : X_\phi \to B$ は fibered Calabi-Yau 3-fold of Type II_0A となる。 □

以下の記述のために，$E_{\zeta_3}^{\langle g_1\rangle}$ の3点に次の様に名前を付ける：

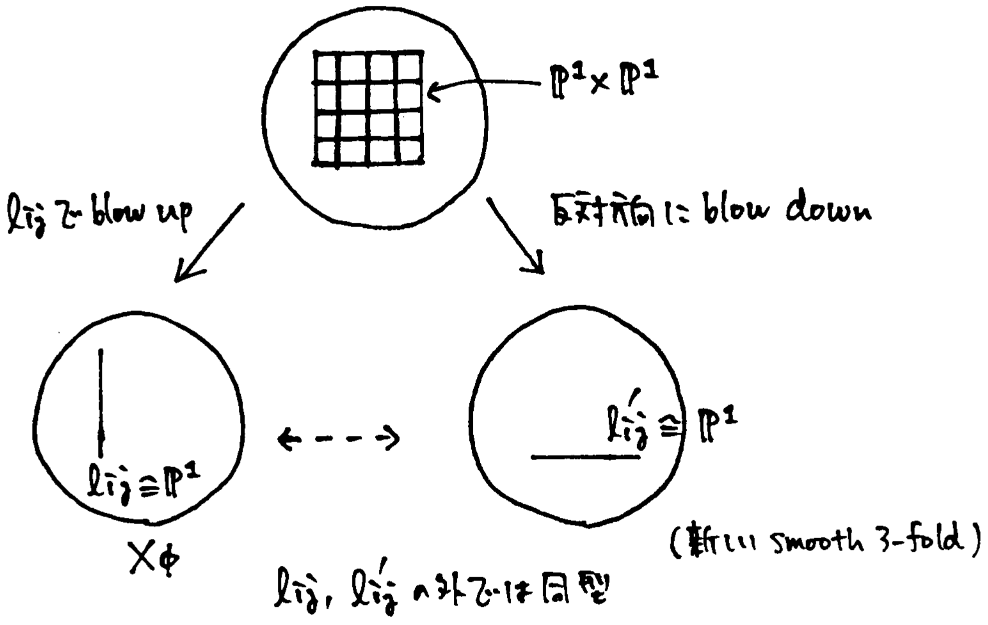


すると，B は，自然な射影 $E_{\zeta_3}^2 \to B$ での，$Q_{ij}=(Q_i,Q_j)$ の像 $\overline{Q_{ij}}$ に $\frac{1}{3}(1,1)$型特異点をもち，$p_\phi : X_\phi \to B$ は，$\overline{Q_{ij}}$ 上にのみ特異ファイバーをもつ。その形は，次の様になる。



□

実は，$N_{X_\phi|l_{ij}} \cong \mathcal{O}_{l_{ij}}(-1)^{\oplus 2}$ であることがcheckできるので，l_{ij} に沿った elementary transformation を行って，$p_\phi : X_\phi \to B$ から，B との別の fiber space を作ることができる：



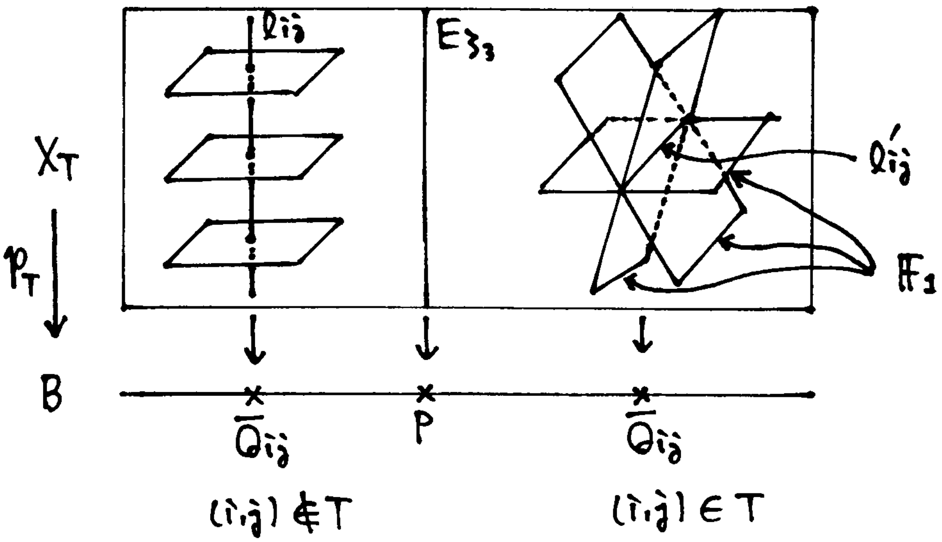
(l_{ij} に沿った elementary transformation)

どの ℓ_{ij} 達に沿って elementary transformation を行うかによって、次の 2^9 個の新しい多様体ができる。

<u>例(2.2)</u> (<u>Modified Beauville's examples</u>)

$\Delta^2=\{(i,j)\mid i=0,1,2;\ j=0,1,2\}$ とおき、T を Δ^2 の部分集合とする。(このとき、$\#\{T\}=2^9$ に注意。) $(i,j)\in T$ なる ℓ_{ij} にのみ沿う elementary transformation を (X_Φ に) 行って得られる多様体を X_T、p_Φ から induce される自然な射影を $p_T: X_T\to B$ とすると、X_T は再び smooth Calabi-Yau 3-fold となり、$p_T: X_T\to B$ は fibered Calabi-Yau 3-fold of Type II_0A となる。

特異ファイバーの様子は次の通り:



□

<u>注意</u> 一般に、elementary transformation は projectivity を保たないので、X_T が再び projective になることのみ証明を

要ある。(あとは自明であろう。) これは、X_ϕ内にたくさん因子があることを用いて示される。(ここでは、逆に、Calabi-Yau であるが、elementary transformation の後、projectivityがくずれる1つの印象的な例をあげておく:

(反例) ([O2]) Yを$\mathbb{P}^5$内のgeneralな(2,4) complete intersection とする。このとき、Yは smooth Calabi-Yau 3-fold で $N_{Y|C} \cong \mathcal{O}_C(-1)^{\oplus 2}$ となる smooth conic C を含む。Cに沿っての elementary transformation を行って得られる "Calabi-Yau 3-fold" をZとすると、$H^2(Z,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Pic}\,Z \cong \mathbb{Z}L$, $L^3=0$ となる。従って、このZは projective variety と homeo ですらない。) □

少し横にそれてしまったが、fibered Calabi-Yau 3-folds of Type $\mathrm{II}_0\mathrm{A}$ は 例2.2 の modified Beauville's examples に限るというのが主結果である。

よりくわしく述べるためにΔ^2の部分集合からなる次の集合を導入しておく。

<u>定義(2.3)</u>

$\Delta^2=\{(i,j) \mid i=0,1,2;\ j=0,1,2\}$ として、次の、Δ^2の14個の部分集合からなる集合を考える:

$\Omega_{\mathrm{II}_0 A} := \{\ \phi,\ \Lambda^2,\ \{(0,0)\},\ \{(0,0)\}^c,\ \{(0,0),(0,1)\},\ \{(0,0),(0,1)\}^c,$

$\{(0,0),(1,0),(2,0)\},\ \{(0,0),(1,0),(0,1)\},$

$\{(0,0),(1,0),(2,0)\}^c,\ \{(0,0),(1,0),(0,1)\}^c,$

$\{(0,0),(1,0),(0,1),(2,0)\},\ \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\},$

$\{(0,0),(1,0),(0,1),(2,0)\}^c,\ \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}^c\ \}.$

($\{*\}^c$ は $\{*\}$ の Λ^2 での補集合。) □

<u>定理(2.4)</u> ([O3]) (<u>Complete classification of fibered Calabi-Yau 3-folds of Type II_0A</u>)

$\Phi: X \to W$ を fibered Calabi-Yau 3-fold of Type II_0A とする。このとき，$\Phi: X \to W$ に対して，$T \in \Omega_{\mathrm{II}_0 A}$ が一意的に存在して，$\Phi: X \to W$ は $p_T: X_T \to B$ と fiber spaces として同型になる：

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{\exists}{\cong} & X_T \\ \Phi\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow p_T \\ W & \underset{\exists}{\cong} & B \end{array}.$$

特に，fibered Calabi-Yau 3-fold of Type II_0A は fiber spaces としての同型を除いてちょうど14個で，すべて rigid となる。

□

<u>注意</u> 証明の要点は，$W = E^2_{\zeta_3}/\langle g_2\rangle$ となることと，

次の図式を示すことにある：

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dashed, "\text{birat.}"'] \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E^3_{\zeta_3}/\langle g_3\rangle \arrow[d, "p_{12}"] & X_\phi \arrow[l] \arrow[dl, "p_\phi"] \\
W \arrow[r, phantom, "="] & E^2_{\zeta_3}/\langle g_2\rangle\ (=B) &
\end{tikzcd}
$$
.

これが言えると，$\Phi: X \to W$ は，$p_\phi: X_\phi \to B(=E^2_{\zeta_3}/\langle g_2\rangle)$ と（Bとの）flop でうつり合うことになる。([Ka3, Ko]) ところが，p_ϕ の fiber 内にある動かない有理曲線は ℓ_{ij}達だけなので，$\Phi: X \to W$ は Modified Beauville's examples のどれかになることが従う。あとは Modified Beauville's examples 達を fiber spaces の同型で分類して結論を得る。 □

§3. Complete classification of fibered Calabi-Yau 3-folds of Type III$_0$

この節では，fibered Calabi-Yau 3-folds of Type III$_0$ を完全に分類する。先と同様，例からはじめる。

例(3.1) ([B]) (Beauville's example, again)

§2 の例(2.1)で作った Calabi-Yau 3-fold X_ϕ をここでは，X_3 と書くことにする。このとき，自然な射影 $\nu_3 := \nu : X_3 \to E^3_{\zeta_3}/\langle g_3\rangle$ は fibered Calabi-Yau 3-fold of Type III$_0$ となる。($E^3_{\zeta_3}/\langle g_3\rangle$ は，type $\frac{1}{3}(1,1,1)$ の特異点を27個もつ。X_3 は各特異点を $\mathbb{P}^2$ におきかえて得られる smooth Calabi-Yau 3-fold である。) □

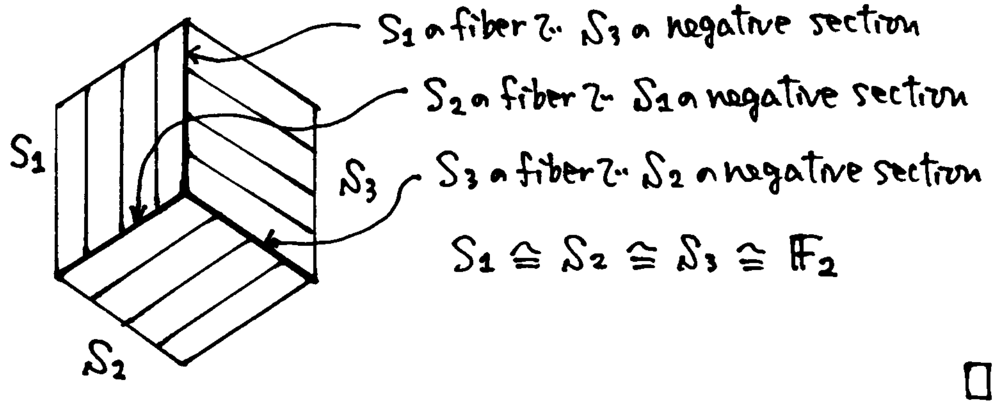
次の例は，［RY］にある例をわかりやすい形に書き直したものである。

例(3.2)（［RY］）（Roan-Yau's example）

$C := \{x_0x_1^3 + x_1x_2^3 + x_2x_0^3 = 0\} \subset \mathbb{P}^2$ を Klein の4次曲線（C は genus 3 の非特異曲線）として，A_7 を C の Jacobian variety とする：　$A_7 = H^0(C, \Omega_C^1)^* / H_1(C, \mathbb{Z})$．　A_7 は abelian 3-fold である。

また，$[x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_0 : \zeta_7 x_1 : \zeta_7^3 x_2]$　（ただし，$\zeta_7 = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{7}\right)$）で定まる C の自己同型の induce する A_7 の自己同型を g_7 とする。このとき，A_7 の（universal cover の）適当な座標 (z_1, z_2, z_3) を用いると，$g_7 : (z_1, z_2, z_3) \mapsto (\zeta_7 z_1, \zeta_7^2 z_2, \zeta_7^4 z_3)$　と書ける。特に g_7 は A_7　の位数7の Gorenstein（即ち 3-form を invariant にする）自己同型である。商多様体 $A_7/\langle g_7 \rangle$ は type $\frac{1}{7}(1,2,4)$ の特異点を丁度7個もつ。

$A_7/\langle g_7 \rangle$（の特異点）の toric resolution を $\nu_7 : X_7 \to A_7/\langle g_7 \rangle$ とおくと，X_7 は smooth かつ rigid な Calabi-Yau 3-fold で，$\nu_7 : X_7 \longrightarrow A_7/\langle g_7 \rangle$　は fibered Calabi-Yau 3-fold of Type III$_0$ となる。具体的には，X_7　は $A_7/\langle g_7 \rangle$　の各特異点を次の交わりをもつ3枚の $\mathbb{F}_2$ でおきかえたものである：



$S_1 \cong S_2 \cong S_3 \cong \mathbb{F}_2$

□

逆に、fibered Calabi-Yau 3-folds of Type III_0 はこの2つに限るというのが、§3の主結果である：

<u>定理(3.3)</u>（[O4]）（<u>Complete classification of fibered Calabi-Yau 3-folds of Type III_0</u>）

$\Phi : X \to W$ を fibered Calabi-Yau 3-fold of Type III_0 とする。このとき、$\Phi : X \to W$ は、$\varphi_3 : X_3 \to E^3_{\zeta_3}/\langle g_3 \rangle$ 又は $\varphi_7 : X_7 \to A_7/\langle g_7 \rangle$ のいずれか一方に（のみ）fiber space として同型になる。特に、fibered Calabi-Yau 3-folds of Type III_0 は、同型を除いてちょうど2個で、いずれも rigid となる。 □

<u>注意</u>

(1) $h^{1,1}(X_3) = 36$, $h^{1,1}(X_7) = 24$ なので $X_3 \not\cong X_7$ である。

(2) 例(3.1), (3.2)で構成した2つの crepant resolutions

$\nu_3: X_3 \to E^3_{\zeta_3}/\langle g_3\rangle$, $\nu_7: X_7 \to A_7/\langle g_7\rangle$ はいずれも exceptional set 内に isolated rational curves を有しない。従って, flop theorem ([Ka3, Ko]) により, $E^3_{\zeta_3}/\langle g_3\rangle$ 又は $A_7/\langle g_7\rangle$ を base space にもつ fibered Calabi-Yau 3-fold of Type III_0 は上記2つのもの以外にはないことがわかる。定理(3.3)の証明の要点は, (一番に) fibered Calabi-Yau 3-folds of Type III_0 の base が上記の $E^3_{\zeta_3}/\langle g_3\rangle$ 又は $A_7/\langle g_7\rangle$ のいずれかに限ることを示す部分にある。 □

References

[B] A. Beauville, Some remarks on Kähler manifolds with $c_1=0$, In classification of algebraic and analytic manifolds, (K. Ueno editor) Progress Math. 39 (1983) 1-26

[G] M. Gross, A finiteness theorem for elliptic Calabi-Yau threefolds, Duke Math. J. 74 (1994) 271-299

[Ka1] Y. Kawamata, Kodaira dimension of certain algebraic fiber spaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA 30, (1983) 1-24

[Ka2] Y. Kawamata, Minimal models and the Kodaira dimension of algebraic fiber spaces, Crelle's J. 363 (1985) 1–46

[Ka3] Y. Kawamata, The crepant blowing-ups of 3-dimensional canonical singularities and its application to degeneration of surfaces. Ann. of Math. 127 (1988) 93–163

[Ka4] Y. Kawamata, Abundance theorem for minimal threefolds, Invent. math. 108 (1992) 229–246

[KeMaMa] S. Keel, K. Matsuki & J. Mckernan, Log abundance theorem for threefolds, Duke Math. J. 75, (1994) 99–118

[Ko] J. Kollár, Flops, Nagoya math. J. 113 (1989) 15-36

[Mi] Y. Miyaoka, The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety, Adv. St. Pure math. 10 (1987) 449–476

[N] N. Nakayama, On Weierstrass models, in algebraic geometry & commutative algebra in honor of M. Nagata, vol II, Kinokuniya (1987) 405–431

[O1] K. Oguiso, On algebraic fiber space structures on a Calabi-Yau 3-fold, Intern. math. 4 (1993) 439-465

[O2] K. Oguiso, Two remarks on Calabi-Yau Moishezon threefolds, Crelle's J. (1994) 153-161

[O3] K. Oguiso, On certain rigid fibered Calabi-Yau threefolds, to appear Math. Z.

[O4] K. Oguiso, On the complete classification of Calabi-Yau threefolds of Type III_0, 1994, preprint

[OP] K. Oguiso & T. Peternell, An observation on the nef cone of Calabi-Yau threefolds of general type, 1994, preprint

[R] S. Roan, On the generalization of Kummer surfaces, J. Diff. Geom. 30 (1989) 523-537

[RY] S. Roan & S. Yau, On Ricci flat 3-folds, Acta math. Sinica, 3 (1987) 256-288

[SW] N.I. Shepherd-Barron & P.M.H. Wilson, Singular threefolds with numerically trivial first and second Chern classes, J. Alg. Geom. 3 (1994)

[W1] P.M.H. Wilson, Calabi-Yau manifolds with large Picard number, Invent. math. 98 (1989) 139-155

[W2] P.M.H. Wilson, The role of c_2 in Calabi-Yau classification - a preliminary survey, preprint, 1994.

[Z] De-Qi Zhang, Logarithmic Enriques surfaces, J. Math. Kyoto Univ. 31 (1991) 419-466.

(文献表は必ずしも完備ではありません。定理(1.2),(2.4),(3.3)の証明に必要な文献は必要に応じて上記文献からまごびもして下さい。)