代数幾何学シンポジウム記録
1994年度　pp.47-61

不正則数１のある種の一般型代数曲面とその標準写像

一関高専　　高橋知邦

序文

S を複素数体 $\mathbf{C}$ 上定義されたコンパクトかつ非特異な代数曲面とする. S が標準曲面であるとは, S の標準因子 K_S の定める有理写像$\Phi_{|K_S|}: S \cdots \to \mathbf{P}^n$, $(n := p_g(S) - 1)$ が像の上への双有理写像になることである. $p_g(S)$ を S の幾何種数としたとき, 次の不等式が成り立つ.

定理 0.1 (cf. [4], [7]) S が標準曲面であれば

$$K_S^2 \geq 3p_g(S) - 7.$$

$K_S^2 = 3p_g(S) - 7$ をみたす標準曲面を Castelnuovo 曲面という. このような曲面は常にその不正則数 $q(S)$ が 0 になり, そのほとんどが射影直線 $\mathbf{P}^1$ 上の $\mathbf{P}^2$ 束の高々有理二重点のみを持つ相対 4 次超曲面の特異点極小解消として得られる.

C を種数 b の非特異完備代数曲線とする. S を C 上のある $\mathbf{P}^2$ 束の高々有理二重点のみを持つ相対 4 次超曲面の特異点極小解消とすると, ほとんどの場合 S は次を満たす.

$$K_S^2 = 3p_g(S) + 7(b-1), \qquad q(S) = b.$$

さらに, $p_g(S)$ が十分大きければ, S は標準曲面になる.

逆に, この等式を満たす標準曲面が上記の方法で得られるか, という問題が考えられる. $b = 1$ の場合, 今野 [9] により正しいことが証明されている. 即ち, S が $K_S^2 = 3p_g(S)$ かつ, $q(S) = 1$ をみたせば, S はある楕円曲線上のある $\mathbf{P}^2$ 束の高々有理二重点のみを持つ相対 4 次超曲面の特異点極小解消になる.

より正確に言うと次のようになる. S のアルバネーゼ写像 $f: S \to C := \mathrm{Alb}(S)$ は楕円曲線 C 上の一般ファイバーが種数 3 の非超楕円曲線からなるファイバー空間を与える. 従って, $\omega_{S/C} := \omega_S \otimes f^*\omega_C^{-1}$ とおくと, $f_*\omega_{S/C}$ は C 上の階数 3 の局所自由層になる. $\pi: W := \mathbf{P}(f_*\omega_{S/C}) \to C$ を対応する $\mathbf{P}^2$ 束とすると, 相対標準写像 [illegible]$: S \cdots \to W$ を得る. 与えられた仮定の下で [illegible] は正則射であり, S' は高々有理二重点のみを持つ. さらに, T を $\pi_*\mathcal{O}_W(T) \cong f_*\omega_{S/C}$ となるトートロジカル因子とすると,

$$\mathcal{O}_W(S') \cong \mathcal{O}_W(4T) \otimes \pi^* \det E^\vee$$

となる.

[13] では, 楕円曲線 C 上の階数 3 の局所自由層 E に対して, それに対応する $\mathbf{P}^2$ 束 $\pi : W := \mathbf{P}(E) \to C$ 上の可逆層 $\mathcal{O}_W(4T) \otimes \pi^* \det E^\vee$ (T は $\pi_* \mathcal{O}_W(T) \cong E$ となるトートロジカル因子,) の完備線形系が高々有理二重点のみを持つメンバーを含むための E についての条件を求めることにより, まず存在を示した.

存在が示されても, それらのすべてが標準曲面になるとは限らない. 例えば, $p_g(S) \leq 3$ となる場合は明らかに S は標準曲面にはなり得ない. そこで, [13] では, 標準曲面であるということにこだわらず, 従って, $p_g(S) \leq 3$ となる場合も含めて存在について考え, 存在の示されたものについてその標準写像を調べた. しかし, $p_g(S)$ の値の小さいところで標準写像がどうなるか未解決の部分が残っている. 特に, $p_g(S) = 4$ となるものについては現時点で全くわかっていない. 本文の終の方でそのことについて触れておく.

また, Castelnuovo, 足利, 今野による $K_S^2 = 3p_g(S) - 7$ のケースでは見られなかった現象も幾つか見られたので, それらについても述べる.

1 準備

定理 1.1 (cf. [14, Theorem 4.1], [9, Proposition2.6]) 非特異完備代数曲面 S から種数 b の非特異完備代数曲線 C への正則全射写像 $f; S \to C$ の一般ファイバーが非特異な種数 $g \geq 2$ の代数曲線であるとする. さらに, f は局所的に自明でなくかつ, 相対的に極小であるとする. このとき $\lambda(f) := K_{S/C}^2 / \deg f_* \omega_{S/C}$ とおくと次の不等式が成り立つ.

$$\frac{4(g-1)}{g} \leq \lambda(f) \leq 12.$$

ここに, $K_{S/C} := K_S - f^* K_C$ とする.

また, f の一般ファイバーが非超楕円曲線であるとき,

$$\frac{4(g-1)}{g} < \lambda(f)$$

となる.

この定理から直ちに次が得られる.

系 1.2 $K_S^2 = 3p_g(S)$ かつ $q(S) = 1$ をみたす標準曲面 S のアルバネーゼ写像を $f : S \to C := \mathrm{Alb}(S)$ とする. このとき f は楕円曲線 C 上の一般ファイバーが種数 3 の非超楕円曲線となるようなファイバー空間を与える.

定理 1.3 (cf. [9, Lemma 3.1 and Theorem 3.2]) 非特異完備代数曲面 S から非特異代数曲線 C への正則全射写像 $f : S \to C$ は一般ファイバーが既約かつ非特異な種数 3 の非超楕円曲線であり, さらに, 相対的に極小であるとする. $A \in \mathrm{Div}(C)$ を十分アンプルな因子とし, $E' :=$

$f_*\omega_{S/C}\otimes\mathcal{O}_C(A)$, $L:=\omega_{S/C}\otimes f^*\mathcal{O}_C(A)$ とおく. さらに, C 上の階数 3 の局所自由層 E' が決める $\mathbf{P}^2$ 束を $\pi:W\to C$, $\pi_*\mathcal{O}_W(T)\cong f_*\omega_{S/C}$ となるトートロジカル因子を T, 自然な層の準同型 $f^*E'\to L$ により与えられる C 上の有理写像を $\psi:S\cdots\to W$ と, それぞれおく. そのとき次の不等式が成り立つ.

$$K_S^2\geq 3\chi(\mathcal{O}_S)+10(b-1).$$

等号が成り立つとき, ψ は正則写像であり, ψ の像 $S':=\psi(S)$ は特異点として高々有理二重点のみを持つ. さらに, S' を W 上の因子と見なしたとき,

$$\mathcal{O}_W(S')\cong\mathcal{O}_W(4T)\otimes\pi^*\det(f_*\omega_{S/C})^\vee$$

が成り立つ. ここで, $(f_*\omega_{S/C})^\vee$ は $f_*\omega_{S/C}$ の双対 $\mathcal{O}_C$ 加群層である.

注意. (1) 定理 1.3 の前半の主張の不等式は, 堀川 [8], Reid [12] もそれぞれの方法により証明している. また, 今野自身も別証を与えている [10].

(2) $f_*\omega_{S/C}$ に $\mathcal{O}_C(A)$ をテンソルしている理由は, 定理 1.3 の証明がそのことに大きく依存しているからである. 例えば, A が十分アンプルであれば, L の完備線形系の固定成分の各成分はそれぞれ f のあるファイバーに含まれる. しかし, 結果が A の取り方に依らないことに注意されたい.

命題 1.4 C を種数 b の非特異完備曲線, E を C 上の階数 3 の局所自由層とする. また, $\pi:W:=\mathbf{P}(E)\to C$ を E の定める $\mathbf{P}^2$ 束, T を $\pi_*\mathcal{O}_W(T)\cong E$ となるトートロジカル因子, $D\in\mathrm{Div}(C)$ を $\mathcal{O}_C(D)\cong\det E$ となる因子とする. もし, W 上の完備線形系 $|4T-\pi^*D|$ が高々有理二重点のみをもつようなメンバー S' を含めば, その特異点極小解消 S は次を満たす.

$$\begin{aligned}K_S^2&=3\deg E+16(b-1),\\ p_g(S)&=\deg E+3(b-1)+\dim H^0(C,\,E^\vee),\\ q(S)&=b+\dim H^0(C,\,E^\vee).\end{aligned}$$

証明は随伴公式と層の完全列 $0\to\omega_W\to\mathcal{O}_W(T)\to\omega_{S'}\to 0$ から容易にできる.

定理 1.5 (cf. Atiyah [3, Theorem 5, Theorem 7 and Corollary, Theorem 9], Oda [11, Theorem 1.2]) $\mathcal{E}(r,\,d)$, $(r,\,d\in\mathbf{Z},\,r>0)$ を楕円曲線 C 上の階数 r, 次数 d の直既約な局所自由層の同型類全体の集合とする.

(1) $(r,\,d)=1$ であれば, 次数 r の同種写像 $\varphi:\tilde{C}\to C$ を任意に与えれば, 次の全単射が存在する.

$$\{\,L_0\in\mathrm{Pic}(\tilde{C})\mid\deg L_0=d\,\}\ni L_0\longmapsto\varphi_*L_0\in\mathcal{E}_C(r,\,d).$$

$G:=\ker\varphi$ とおくと, 次の同型を得る.

$$\varphi^*\varphi_* L_0 \cong \bigoplus_{\sigma\in G} T_\sigma^* L_0.$$

ここで, $T_\sigma : \tilde{C} \to \tilde{C}$ は $\tilde{C}$ 上の $\sigma \in G$ による平行移動であるとする.

(2) 任意の $r \in \mathbf{N}$ に対して, $H^0(C,\ F_r) \neq 0$ となる $F_r \in \mathcal{E}_C(r,\ 0)$ が唯 1 つ存在する. F_r は $\mathcal{O}_C$ の *successive extension* であり, $S^{r-1}F_2 \cong F_r$, $\dim H^0(C,\ F_r) = \dim H^1(C,\ F_r) = 1$ が成り立つ. さらに, $m \in \mathbf{Z}$ に対し,

$$\{\ L_0 \in \mathrm{Pic}(C) \mid \deg L_0 = m\ \} \ni L_0 \longmapsto F_r \otimes_{\mathcal{O}_C} L_0 \in \mathcal{E}_C(r,\ rm)$$

は全単射である.

2 存在

系 1.2 と定理 1.3 より, $K_S^2 = 3p_g(S)$ かつ $q(S) = 1$ をみたす標準曲面を分類するためには, 楕円曲線 C 上の階数 3 の局所自由層 E の定める $\mathbf{P}^2$ 束 $W := \mathbf{P}(E)$ 上の完備線形系 $|4T - \pi^*D|$ が高々有理二重点のみを持つようなメンバーを含むための必要十分条件をまず求めなければならない. ここで, $T \in \mathrm{Div}(W)$ は $\pi_*\mathcal{O}_W(T) \cong E$ となるトートロジカル因子, $D \in \mathrm{Div}(C)$ は $\mathcal{O}_C(D) \cong \det E$ となる因子とする. 序文で述べたように, このことに関し, $p_g(S) \leq 3$ となる場合もこめて考えることにする. (ただし, $p_g(S) = 1$ となる場合は, Catanese, Ciliberto [5] により分類されているので, $p_g(S) \geq 2$ を仮定する.)

楕円曲線 C 上の階数 3 の局所自由層は順序を除いて直既約な局所自由層の直和として一意に記述できる (cf. [3]) ので, 我々は次の 3 つのケースを考えなければならない:

(1) E が 3 つの可逆層の直和と同型である場合.

(2) E が可逆層と直既約な階数 2 の局所自由層との直和と同型であるとき.

(3) E が直既約であるとき.

以上の各場合について得られた結果と証明の概略を述べる.

2.1 E が 3 つの可逆層の直和と同型であるとき

$L_0,\ L_1,\ L_2$ を $E \cong L_0 \oplus L_1 \oplus L_2$ となる C 上の可逆層とし, $d_i := \deg L_i$ $(i = 0,\ 1,\ 2)$ とおく. 必要なら番号を取り替えることにより, $d_0 \leq d_1 \leq d_2$ と仮定してよい. さらに, 例えば $d_0 = d_1$ が成り立つとき, 状況に応じて L_0 と L_1 とを取り替えてもよい.

定理 2.1 上記の E の定める $\mathbf{P}^2$ 束 $\pi : W := \mathbf{P}(E) \to C$ のトートロジカル因子を T とし, $D \in \mathrm{Div}(C)$ を $\det E \cong \mathcal{O}_C(D)$ となる因子とする. いま, $(d_0,\ d_1,\ d_2) \neq (0,\ 0,\ 0)$ と仮定する.

このとき, W 上の完備線形系 $|4T - \pi^* D|$ が高々有理二重点のみをもつようなメンバーを含むための必要十分条件は次の (1), (2), (3), (4) が成り立つことである.

(1) $d_0 > 0$

(2) 次の (i), (ii), (iii) のいずれか 1 つが成り立つ.

(i) $d_0 + d_2 < 3d_1$,

(ii) $L_0 \otimes L_2 \cong L_1^{\otimes 3}$,

(iii) $2d_0 = 2d_1 = d_2$ かつ, $L_0^{\otimes 3} \otimes L_1^{-1}$, $L_0^{\otimes 2}$, $L_0 \otimes L_1$, $L_1^{\otimes 2}$ の少なくとも 1 つが L_2 と同型である.

(3) 次の (i), (ii), (iii) のいずれか 1 つが成り立つ.

(i) $d_1 < 2d_0$,

(ii) $L_1 \cong L_0^{\otimes 2}$,

(iii) $2d_0 = d_1 = d_2$ かつ, $L_2 \cong L_0^{\otimes 2}$.

(4) $d_0 = d_1 = d_2 = 1$ のとき, L_0, L_1, L_2 の少なくとも 1 つは他と同型でない.

従って, この場合は $N \geq 3$ となるすべての $N \in \mathbf{Z}$ に対して $K_S^2 = 3p_g(S)$, $q(s) = 1$ かつ $p_g(S) = N$ となる曲面が構成できる.

証明の概略を述べる. 証明の方針は, まず, 完備線形系 $|4T - \pi^* D|$ が基点を持つかどうかを調べ, 持つ場合にそこでの一般メンバーの特異点重複度を調べることである. 基点を持たなければもちろん Bertini の定理より一般メンバーは非特異である.

$X_i \in H^0(W, \mathcal{O}_W(T) \otimes \pi^* \det E^\vee)$ $(i = 0, 1, 2)$ を π の各ファイバーの斉次座標を与えるようにとる.

$$
\begin{aligned}
H^0(W, \mathcal{O}_W(4T) \otimes \pi^* \det E^\vee) &\cong H^0(C, S^4 E \otimes \det E^\vee) \\
&\cong \bigoplus_{\substack{i,\, j \geq 0 \\ i+j \leq 4}} H^0(C, L_0^{\otimes(3-i-j)} \otimes L_1^{\otimes(i-1)} \otimes L_2^{\otimes(j-1)}),
\end{aligned}
$$

となるから, 任意の $\Psi \in H^0(W, \mathcal{O}_W(4T) \otimes \pi^* \det E^\vee)$ は,

$$
\Psi = \sum_{\substack{i,\, j \geq 0 \\ i+j \leq 4}} \psi_{ij} X_0^{4-i-j} X_1^i X_2^j, \qquad \psi_{ij} \in H^0(C, L_0^{\otimes(3-i-j)} \otimes L_1^{\otimes(i-1)} \otimes L_2^{\otimes(j-1)})
$$

と書ける.

もし, 定理の (2) が成り立たなければ, $H^0(C, L_0^{\otimes(3-i)} \otimes L_1^{\otimes(i-1)} \otimes L_2^{-1}) = 0$ $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ となるので, Ψ の X_2 を含まない全ての項の係数が 0 となり, 従って, Ψ が X_2 で割り切れてしまう.

定理の (3) が成り立たなければ, $H^0(C,\ L_0^{\otimes 3}\otimes L_1^{-1}\otimes L_2^{-1})$, $H^0(C,\ L_0^{\otimes 2}\otimes L_1^{-1})$, $H^0(C,\ L_0^{\otimes 2}\otimes L_2^{-1})=0$ となるから, Ψ の X_0^4, $X_0^3X_1$, $X_0^3X_2$ の係数が全て 0 となる. $C_0\in W$ を $X_1=X_2=0$ で定まる曲線とすると, $|4T-\pi^*D|$ の全てのメンバーは C_0 を特異曲線として含む.

定理の (4) が成り立たない, 即ち, $d_0=d_1=d_2=1$ かつ $L_0\cong L_1\cong L_2$ が成り立つとする. このとき, 全ての $i,\ j\geq 0\ (i+j\leq 4)$ に対して $L_0^{\otimes(3-i-j)}\otimes L_1^{\otimes(i-1)}\otimes L_2^{\otimes(j-1)}$ は次数が 1 であり, しかも互いに同型である. 従って, Ψ の方程式の形を見ることにより, π のあるファイバーが $|4T-\pi^*D|$ の固定成分となることが容易にわかる.

定理の (2), (3) が成り立つとしたとき, d_0, d_1, d_2 はいずれも 0 になることはなく, もし, 定理の (1) が成り立たない, 即ち $d_0<0$ となるとすると, $H^0(C,\ L_0^{\otimes(3-i-j)}\otimes L_1^{\otimes(i-1)}\otimes L_2^{\otimes(j-1)})=0$, $(i,\ j\geq 0,\ i+j\leq 4)$ となり, 従って, $|4T-\pi^*D|=\emptyset$ となる.

(1), (2), (3), (4) が全て成り立てば, ほとんどの場合 $\mathrm{Bs}\,|4T-\pi^*D|=\emptyset$ となる. しかし, 実際にはそうはならないケースもある. 例えば, $d_0=1$ となるとき, 孤立基点が存在する. この場合は一般メンバーはその基点において非特異になる. また, $3d_0<d_1+d_2$ となる場合は, $H^0(C,\ L_0^{\otimes 3}\otimes L_1^{-1}\otimes L_2^{-1})=0$ となるから, Ψ の X_0^4 の係数が 0 になり, 従って, $X_1=X_2=0$ により定まる曲線 $C_0\in W$ が基点集合に含まれる. この場合は, $d_2<2d_0$ であれば, $H^0(C,\ L_0^{\otimes 2}\otimes L_2^{-1})\neq 0$ となるから Ψ の $X_0^3X_1$ の係数は消えず, 従って, 一般メンバーは C_0 においても非特異である. $d_2>2d_0$ であれば, このコホモロジー群が 0 になるので, $X_0^3X_1$ の係数が消えてしまい, その結果, 一般メンバーは C_0 上に有限個の孤立特異点を持つ. そのまわりでの方程式を見ることにより, それが A 型の有理二重点であることがわかる. ほとんどの場合, それは A_1 型であるが, L_0, L_1, L_2 のとり方によっては, A_2 型になることもある.

2.2 E が可逆層と直既約な階数 2 の局所自由層との直和と同型である場合

E_0, L を $E\cong E_0\oplus L$ となるそれぞれ C 上の階数 2 の直既約な局所自由層, および, 可逆層とし, $e:=\deg E_0$, $d:=\deg L$ とおく. 前節と同様に $\pi:W\to C$ を E の定める $\mathbf{P}^2$ 束とする.

定理の主張を述べる前に, 証明に必要なある事柄について述べておく. $\rho:X\to W$ を $C_1:=\mathbf{P}(E/E_0)=\mathbf{P}(L)$ でのブローアップとすると, $\mathbf{P}^1$ 束 $\sigma:X\to Y:=\mathbf{P}(E_0)$ が存在する. $\mu:Y\to C$ を Y 上の $\mathbf{P}^1$ 束とし, $Y_1:=\rho^*T$, $Y_\infty:=\rho^{-1}(C_1)$ とおく. $C_0\subset Y$ を $\mu_*\mathcal{O}_Y(C_0)\cong E_0$ となる μ の断面とすると, $Y_1\sim Y_\infty+\sigma^*C_0$ および, $\sigma_*\mathcal{O}_X(Y_1)\cong\mathcal{O}_Y(C_0)\oplus\mu^*L$ が成り立つ. 即ち, $X\cong\mathbf{P}(\mathcal{O}_Y(C_0)\oplus\mu^*L)$ となる. $Y_0\in\mathrm{Div}(X)$ を $\mathcal{O}_X(Y_0)\cong\mathcal{O}_X(Y_1)\oplus\sigma^*\mu^*L^{-1}$ となる既約な因子とする. このとき, $(Z_0)=Y_0$, $(Z_\infty)=Y_\infty$ となる大域的断面 Z_0 と Z_∞ は σ の各ファイバーの斉次座標を与える.

X 上の可逆層 $\mathcal{O}_X(4Y_1)\otimes\sigma^*\mu^*\det E^\vee\cong\rho^*\left(\mathcal{O}_W(4T)\otimes\pi^*\det E^\vee\right)$ のコホモロジー群は次を満たす.

$$
\begin{aligned}
&H^0(X,\ \mathcal{O}_X(4Y_1)\otimes\sigma^*\mu^*\det E^\vee)\\
&\quad\cong H^0(Y,\ S^4(\mathcal{O}_Y(C_0)\oplus\mu^*L)\otimes\mu^*\det E^\vee)
\end{aligned}
$$

$$\cong \bigoplus_{j=0}^{4} H^0(Y,\ \mathcal{O}_Y(jC_0)\otimes\mu^*(L^{\otimes(4-j)}\otimes\det E^\vee)).$$

従って, 任意の $\Psi \in H^0(X,\ \mathcal{O}_X(4Y_1)\otimes\sigma^*\mu^*\det E^\vee)$ は,

$$\Psi = \sum_{j=0}^{4}\psi_j Z_0^{4-j}Z_\infty^j, \qquad \psi_j \in H^0(Y,\ \mathcal{O}_Y(jC_0)\otimes\mu^*(L^{\otimes(4-j)}\otimes\det E^\vee)),\ (j=0,\ \cdots,\ 4)$$

とかける. $\psi_0 Z_0^4$, $\psi_\infty Z_\infty^4$ の形の元を考えることにより, $|4Y_1-\sigma^*\mu^*D|$ の基点は次の 2 通りしかないことがわかる.

(1) C 上の可逆層 $L^{\otimes 4}\otimes\det E^\vee$ の基点の$\mu\circ\sigma$ による逆像と Y_∞ との交点.

(2) Y 上の可逆層 $\mathcal{O}_Y(4C_0)\otimes\mu^*\det E^\vee$ の基点のσ による逆像と Y_0 との交点.

従って, $|4Y_1-\sigma^*\mu^*D|$ の一般メンバーの特異点もこの上にしかないことがいえる.

以下, 定理とその証明の概略についてのべるが, この場合は e が偶数の場合と奇数の場合とに分けなければならない. しかしながら, 証明の方法はほぼ同様なので, e が奇数の場合は結果とその証明に必要な補題を述べるにとどめる.

2.2.1 e が偶数のとき

$e =: 2e_0$ とおく. $F_2 \in \mathcal{E}_C(2,\ 0)$ を $H^0(C,\ F_2)\cong \mathbf{C}$ となる局所自由層とすると, 可逆層 $L_0\in\mathcal{E}_C(1,\ e_0)$, $L_1\in\mathcal{E}_C(1,\ d-e_0)$ が存在して, $E_0\cong F_2\otimes L_0$, $L\cong L_0\otimes L_1$ となり, 従って, $E\cong L_0\otimes(F_2\oplus L_1)$ となる.

定理 2.2 上の記号, および, 仮定の下で, W の完備線形系 $|4T-\pi^*D|$ が高々有理二重点のみを持つようなメンバーを含むための必要十分条件は, 次の (1), (2), (3) のいずれか 1 つが成り立つことである.

(1) $e=d$ かつ $L_0\cong L_1$,

(2) $d<e<4d$,

(3) $e=4d$ かつ $L_0\otimes L_1^{\otimes 2}\cong\mathcal{O}_C$.

証明の概略を述べる前に, 次ぎの層及び, コホモロジー群の同型について触れておく. $S^j(F_2)\cong F_{j+1}$ であるから,

$$S^j(E_0)\otimes L^{\otimes(4-j)}\otimes\det E^\vee\cong F_{j+1}\otimes L_0\otimes L_1^{\otimes(3-j)}, \qquad (j=0,\ \cdots 4),$$

となる. さらに, $\det F_2\cong\mathcal{O}_C$ であるから, $\det E\cong L_0^{\otimes 3}\otimes L_1$ となり, 従って,

$$H^0(Y,\ \mathcal{O}_Y(jC_0)\otimes\mu^*(L^{\otimes(4-j)}\otimes\det E^\vee))\cong H^0(C,\ F_{j+1}\otimes L_0\otimes L_1^{\otimes(3-j)})$$

を得る.

以下場合分けをして考える.

(i) ($e=d$ かつ $L_0 \not\cong L_1$) または, ($e<d$) のとき.

$$H^0(Y,\ \mathcal{O}_Y(4C_0)\otimes\mu^*\det E^\vee)\cong H^0(C,\ F_5\otimes L_0\otimes L_1^{-1})=0$$

となるので, Ψ の Z_∞^4 の係数 ψ_4 は 0 となり, 因子 (Ψ) は Y_0 を成分として持つ. 従って, (Ψ) の ρ による W 内での像は可約である.

(ii) ($e=d$ かつ $L_0\cong L_1$) または, ($e<d<3d$) または, ($e=3d$ かつ $L_0\otimes L_1^{\otimes 3}\cong\mathcal{O}_C$) のとき.

ほとんどの場合 $\mathrm{Bs}\,|4Y_1-\sigma^*\mu^*D|=\emptyset$ となる. $\mathrm{Bs}\,|4Y_1-\sigma^*\mu^*D|\neq\emptyset$ となる場合について述べる.

(I) $3d-e=1$ のとき.

$\deg(L^{\otimes 4}\otimes\det E^\vee)=3d-e=1$ なので, 点 $q\in C$ が存在して, $L^{\otimes 4}\otimes\det E^\vee\cong\mathcal{O}_C(q)$ となる. 従って, q が $L^{\otimes 4}\otimes\det E^\vee$ の唯一の基点であり, $\Gamma:=Y_\infty\cap(\mu\circ\sigma)^{-1}(q)$ が $|4Y_1-\sigma^*\mu^*D|$ の基点集合に含まれる. $|4Y_1-\sigma^*\mu^*D|$ の一般メンバーは Γ に沿って非特異である.

(II) $e-d=1$ のとき.

$\mathcal{O}_Y(C')\cong\mathcal{O}_Y(C_0)\otimes\mu^*L_0^{-1}$ となる μ の断面 C' が唯 1 つ存在する. $q\in C$ を $L_0\otimes L_1^{-1}\cong\mathcal{O}_C(q)$ となる点とし, $\Gamma_0:=\mu^{-1}(q)$ とおくと, $\mathcal{O}_Y(4C_0)\otimes\mu^*\det E^\vee\cong\mathcal{O}_Y(4C'+\Gamma_0)$ となる. このとき $p:=C'\cdot\Gamma_0$ が $\mathcal{O}_Y(4C_0)\otimes\mu^*\det E^\vee$ の唯 1 つの基点となるが, $|4Y_1-\sigma^*\mu^*D|$ の一般メンバーが $\sigma^{-1}(p)\cap Y_0$ 上非特異であることが Ψ の方程式の形から容易に示せる.

(III) $e-d=0$ のとき.

C' を (II) と同様にとると, このとき仮定より $L_0\cong L_1$ だから, $\mathcal{O}_Y(4C_0)\otimes\mu^*\det E^\vee\cong\mathcal{O}_Y(4C')$ となる. 従って, $C'':=\sigma^{-1}(C')\cap Y_0$ が $|4Y_1-\sigma^*\mu^*D|$ の基点集合に含まれる. 一方, $\mathcal{O}_Y(3C_0)\otimes\mu^*(L\otimes\det E^\vee)\cong\mathcal{O}_Y(3C')\otimes\mu^*L_0$ であるから, 一般の $\Psi\in H^0(X,\ \mathcal{O}_X(4Y_1)\otimes\sigma^*\mu^*\det E^\vee)$ の $Z_0Z_\infty^3$ の係数$\psi_3\in H^0(Y,\ \mathcal{O}_Y(3C_0)\otimes\mu^*(L\otimes\det E^\vee))$ の定める Y 上の因子 (ψ_3) は C' と e_0 個の点で横断的に交わる. p をその交点の 1 つ, $t,\ u$ をそれぞれ C', (ψ_3) の p のまわりでの局所方程式とし, さらに, $z_0:=Z_0/Z_\infty$ とおくと, Ψ は p のまわりで次のように書ける.

$$\Psi=\psi_0z_0^4+\psi_1z_0^3+\psi_2z_0^2+\psi_3z_0+\psi_4=z_0(\psi_0z_0^3+\psi_1z_0^2+\psi_2z_0+u)+t^4.$$

これは A_3 型の有理二重点を与える方程式である.

あと示さなければならないのは, 一般の $(\Psi)\in|4Y_1-\sigma^*\mu^*D|$ の ρ による W 内での像が高々有理二重点しか持たないということであるが, それについては (Ψ) と Y_∞ との共通部分がどうなるかを見ればよい. Ψ の方程式を見ることにより, それは $Y_\infty\cong Y\to C$ の $3d-e$ 個のファイバー, 従って, $3d-e$ 個の互いに交わらない有理直線の和集合になる. 各有理直線の (Ψ) の上での自己交点数が -1 であることが容易に示されるので, (Ψ) の W 内での像は新たな特異点は持たない.

(iii) ($e = 3d$ かつ $L_0 \otimes L_1^{\otimes 3} \not\cong \mathcal{O}_C$) または, ($3d < e < 4d$) または, ($e = 4d$ かつ $L_0 \otimes L_1^{\otimes 2} \cong \mathcal{O}_C$) のとき.

$$H^0(Y,\ \mu^*(L^{\otimes 4} \otimes \det E^\vee)) \ \cong\ H^0(C,\ L_0 \otimes L_1^{\otimes 3}) \ =\ 0,$$

$$H^0(Y,\ \mathcal{O}_Y(C_0) \otimes \mu^*(L^{\otimes 3} \otimes \det E^\vee)) \ \cong\ H^0(C,\ F_2 \otimes L_0 \otimes L_1^{\otimes 2}) \ \neq\ 0,$$

となるので, 一般メンバー $\Psi \in H^0(X,\ \mathcal{O}_X(4Y_1) \otimes \sigma^*\mu^* \det E^\vee)$ の Z_0^4 の係数 ψ_0 は 0 になるが, $Z_0^3 Z_\infty$ の係数 ψ_1 は 0 にならない. 即ち, 因子 (Ψ) は Z_∞ を成分としてもつ. 従って, (Ψ) の W 内での像は C_1 を含む. $Y_\infty \sim Y_1 - \sigma^* C_0$ だったから, この場合は X 上の可逆層 $\mathcal{O}_X(3Y_1) \otimes \sigma^*(\mathcal{O}_Y(C_0) \otimes \mu^* L)$ の完備線形系を調べればよい. (ii) の場合と同様に, ほとんどのケースで基点は存在しない. 存在する場合でも, そこで一般メンバーが非特異であることが示される. (証明の方法は (ii) とほとんど同様なので省略する.)

また, 一般メンバーは Y_∞ ($\cong Y$) と $\sigma^{-1}(C_0)$ でのみ交わるので, W 内での像は非特異になる.

(iv) ($e = 4d$ かつ $L_0 \otimes L_1^{\otimes 2} \not\cong \mathcal{O}_C$) または, ($4d < e$) のとき.

$$H^0(Y,\ \mu^*(L^{\otimes 4} \otimes \det E^\vee)) \ =\ 0,$$

$$H^0(Y,\ \mathcal{O}_Y(C_0) \otimes \mu^*(L^{\otimes 3} \otimes \det E^\vee)) \ =\ 0,$$

となるので, Ψ の Z_0^4, $Z_0^3 Z_\infty$ の係数 ψ_0, ψ_1 はいずれも 0 となり, 従って, 因子 (Ψ) は $2Y_\infty$ を成分としてもつ. 従って, (Ψ) の W 内での像は C_1 を特異曲線として含む.

2.2.2 e が奇数のとき

$e =: 2e_0 + 1$ とおき, $E_{2,1} \in \mathcal{E}_C(2,\ 1)$ を 1 つとり固定する. このとき可逆層 $L_0 \in \mathcal{E}_C(1,\ e_0)$, $L_1 \in \mathcal{E}_C(1,\ d - e_0)$ が存在して, $E_0 \cong L_0 \otimes E_{2,1}$, $L \cong L_0 \otimes L_1$, 従って, $E \cong L_0 \otimes (E_{2,1} \oplus L_1)$ となる.

定理 2.3 上の記号, および, 仮定の下で, W の完備線形系 $|4T - \pi^* D|$ が高々有理二重点のみを持つようなメンバーを含むための必要十分条件は, 次の (1), (2) のいずれか 1 つが成り立つことでる.

(1) $e = d$ かつ $\det F_{2,1} \otimes L_0 \otimes L_1^{-1}$ が $\mathcal{O}_C$, $\mathcal{L}_k$, ($k = 1,\ 2,\ 3$) のいずれか 1 と同型.

(2) $d < e < 4d$.

定理の証明には次の足利 [1] による補題を用いる.

補題 2.4 上の記号の下で 0 以上の整数 m に対して次が成り立つ.

$$(1)\quad S^{4m}(E_{2,1}) \cong (\mathcal{O}_C^{\oplus(m+1)} \oplus (\bigoplus_{k=1}^{3} \mathcal{L}_k)^{\oplus m}) \otimes (\det E_{2,1})^{\otimes 2m},$$

$$(2)\quad S^{4m+2}(E_{2,1}) \cong (\mathcal{O}_C^{\oplus m} \oplus (\bigoplus_{k=1}^{3} \mathcal{L}_k)^{\oplus(m+1)} \otimes (\det E_{2,1})^{\otimes(2m+1)}.$$

以上から, E が直既約な階数 2 の局所自由層 $E_0 \in \mathcal{E}_C(2,\, e)$ と, 可逆層 $L \in \mathcal{E}_C(1,\, d)$ との直和であるときは, $N \geq 2$ である全ての整数 N に対して $K_S^2 = 3p_g(S)$, $q(S) = 1$ かつ $p_g(S) = e+d = N$ となる曲面が構成できる.

2.3 E が直既約である場合

この場合は一部未解決であるので, できたところまでを定理として述べる.

定理 2.5 E を C 上の直既約な階数 3, 次数 d の局所自由層とする.

(1) $d = 2$ または, $d \geq 4$ であるとき, W の完備線形系 $|4T - \pi^* D|$ は基点を持たず, 従って, その一般メンバーは既約かつ非特異である.

(2) $d < 0$ のとき, $|4T - \pi^* D| = \emptyset$ である.

注意. (i) $d = 1$ の場合は Catanese-Ciliberto [5] により存在が確かめられている.

(ii) $d = 3$ の場合は現時点でまだ未解決である.

(iii) $d = 0$ の場合もまだ未解決だが, この場合は存在したとしても一般型にはならない.

(iv) この定理より, E 自身が直既約である場合は $N \geq 1$, $N \neq 3$ となる全ての整数 N に対して $K_S^2 = 3p_g(S)$, $q(S) = 1$ かつ $p_g(S) = d = N$ となる曲面が構成できることがわかる. ($p_g(S) = 3$ の場合も多分存在する.)

定理の (1) を示すには, 次の補題が示されればよい. ただし, $d = 2$ の場合は除く.

補題 2.6 $d \geq 4$ とする. F を π の任意のファイバーとしたとき, 次の制限写像は全射である.

$$H^0(W,\, \mathcal{O}_W(4T) \otimes \pi^* \det E^\vee) \to H^0(F,\, \mathcal{O}_F(4T)) \left(\cong H^0(\mathbf{P}^2,\, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(4))\right)$$

以下概略を述べるが, $d := \deg E$ が 3 の倍数の場合とそうでない場合とに分けて考える.

2.3.1 $d \equiv 0 \pmod 3$ となるとき

まず, 定理 2.5 の (1), 即ち補題 2.6 の証明について述べる. 補題が示されるには,

$$H^1(W,\, \mathcal{O}_W(4T - F) \otimes \pi^* \det E^\vee) = 0$$

となることがいえれば十分である. $d=3d_0$ とおくと, 可逆層 $L\in\mathcal{E}(1,\ d_0)$ が存在して $E\cong L\otimes F_3$ となる. 定理 1.5 の (2) より $F_3\cong S^2F_2$ であるから, [6, p.156] より, $S^4F_3\cong F_9\oplus F_5\oplus\mathcal{O}_C$ となる. 従って, $p:=\pi(F)$ とおくと,

$$\begin{aligned}&H^1(W,\ \mathcal{O}_W(4T-F)\otimes\pi^*\det E^\vee)\\&\quad\cong H^1(C,\ F_9\otimes L\otimes\mathcal{O}_C(-p))\oplus H^1(C,\ F_5\otimes L\otimes\mathcal{O}_C(-p))\oplus H^1(C,\ L\otimes\mathcal{O}_C(-p))\end{aligned}$$

となる. $d\geq 4$ だから $d_0\geq 2$ であり, このコホモロジー群は 0 になる.

(2) については, $d<0$ であるから上と同様に,

$$\begin{aligned}&H^0(W,\ \mathcal{O}_W(4T)\otimes\pi^*\det E^\vee)\\&\quad\cong H^0(C,\ F_9\otimes L)\oplus H^0(C,\ F_5\otimes L)\oplus H^0(C,\ L)=0\end{aligned}$$

となることから主張を得る.

2.3.2 $d\not\equiv 0\pmod 3$ となるとき

まず, $d\neq 2$ の場合について述べる.

前節と同様に (1), (2) それぞれについて

$$(1)\quad H^1(W,\ \mathcal{O}_W(4T-F)\otimes\pi^*\det E^\vee)=0,$$

$$(2)\quad H^0(W,\ \mathcal{O}_W(4T)\otimes\pi^*\det E^\vee)=0$$

となることがいえればよい.

$\varphi:\tilde{C}\to C$ を C 上の次数 3 の同種写像とする. (任意にとり固定する.) このとき, 定理 1.5 より, $\tilde{C}$ 上の次数 d の可逆層 L_0 が存在して $\varphi_*L_0\cong E$ となる. さらに, $G:=\ker\varphi=\{0,\ \sigma,\ 2\sigma\}$, ($\sigma\in\tilde{C}$, $\sigma\neq 0$, $3\sigma=0$) とおき, $T_{i\sigma}$, $(i=1,\ 2)$ を $i\sigma$ による $\tilde{C}$ 上の平行移動とすると,

$$\varphi^*E\cong L_0\oplus L_1\oplus L_2,\quad (L_i:=T_{i\sigma}^*L_0,\ i=1,\ 2)$$

となる. $\tilde{E}:=\varphi^*E$ とおき, $\tilde{\pi}:\tilde{W}\to\tilde{C}$ を $\tilde{E}$ の定める $\mathbf{P}^2$ 束とすると次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccc}\tilde{W} & \xrightarrow{\Phi} & W\\ \tilde{\pi}\downarrow & & \downarrow\pi\\ \tilde{C} & \xrightarrow[\varphi]{} & C\end{array}$$

$\tilde{T}$ を $\tilde{\pi}_*\mathcal{O}_{\tilde{W}}(\tilde{T})\cong\tilde{E}$ となるトートロジカル因子とすると, $\Phi^*T\sim\tilde{T}$ となるから,

$$\Phi^*\left(\mathcal{O}_W(4T)\otimes\pi^*\det E^\vee\right)\cong\mathcal{O}_{\tilde{W}}(4\tilde{T})\otimes\tilde{\pi}^*\det\tilde{E}^\vee$$

となる．

$\varphi^*: \mathrm{Pic}^0 C \to \mathrm{Pic}^0 \tilde{C}$ を φ に対応する同種写像とすると，$\deg\varphi^* = 3$ である．$\ker\varphi^* = \{\mathcal{O}_C,\ \mathcal{M},\ \mathcal{M}^{\otimes 2}\}$，$(\mathcal{M} \not\cong \mathcal{O}_C,\ \mathcal{M}^{\otimes 3} \cong \mathcal{O}_C)$ とおくと，$\varphi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}} \cong \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\otimes 2}$ となるから，次の同型を得る．ただし，$\mathcal{L} := \mathcal{O}_W(4T) \otimes \pi^* \det E^\vee$ である．

$$H^0(\tilde{W},\ \mathcal{O}_{\tilde{W}}(4\tilde{T}) \otimes \tilde{\pi}^* \det \tilde{E}^\vee) \cong H^0(W,\ \mathcal{L}) \oplus H^0(W,\ \mathcal{L} \otimes \pi^*\mathcal{M}) \oplus H^0(W,\ \mathcal{L} \otimes \pi^*\mathcal{M}^{\otimes 2}).$$

一方，

$$H^0(\tilde{W},\ \mathcal{O}_{\tilde{W}}(4\tilde{T}) \otimes \tilde{\pi}^* \det \tilde{E}^\vee) \cong \bigoplus_{\substack{i,\, j \geq 0 \\ i+j \leq 4}} H^0(\tilde{C},\ L_0^{\otimes(3-i-j)} \otimes L_1^{\otimes(i-1)} \otimes L_2^{\otimes(j-1)})$$

でもあり，$\deg\left(L_0^{\otimes(3-i-j)} \otimes L_1^{\otimes(i-1)} \otimes L_2^{\otimes(j-1)}\right) = d$ となるので，$d < 0$ のときこのコホモロジー群は 0 となる．従って，$H^0(W,\ \mathcal{L}) = 0$ となり (2) が示される．

同様の方法で $d \geq 4$ のとき，任意の点 $p \in C$ に対し，

$$0 = H^1(\tilde{W},\ \Phi^*(\mathcal{L} \otimes \pi^*\mathcal{O}_C(-p))) \cong \bigoplus_{k=0}^{2} H^1(W,\ \mathcal{L} \otimes \pi^*(\mathcal{M}^{\otimes k}\mathcal{O}_C(-p)))$$

となり，$H^1(W,\ \mathcal{L} \otimes \pi^*\mathcal{O}_C(-p)) = 0$ が得られる．これにより，補題 2.6，従って，定理 2.5 の (1) が示される．

$d = 2$ のときは上のコホモロジー群が 0 にならないので，他の方法を考えなければならない．

$G = \ker\varphi$ は $H^0(\tilde{W},\ \Phi^*\mathcal{L})$ に作用するが，同型

$$H^0(\tilde{W},\ \Phi^*\mathcal{L}) \cong H^0(W,\ \mathcal{L}) \oplus H^0(W,\ \mathcal{L} \otimes \pi^*\mathcal{M}) \oplus H^0(W,\ \mathcal{L} \otimes \pi^*\mathcal{M}^{\otimes 2})$$

において，$H^0(W,\ \mathcal{L})$ に対応する $H^0(\tilde{W},\ \Phi^*\mathcal{L})$ の部分空間は G の作用で不変な元全体からなる．即ち，$\tilde{W}$ の完備線形系 $|4\tilde{T} - \tilde{\pi}^*\tilde{D}|$，$(\tilde{D} := \varphi^*D)$ の $H^0(W,\ \mathcal{L})$ に対応する部分空間 Λ は，W の完備線形系 $|4T - \pi^*D|$ のメンバーを Φ により引き戻したもの全体からなる．この Λ が基点を持たないことを示すことにより $d = 2$ の場合が示される．その計算過程については [13, §4.3.3] を参照のこと．

3 The canonical mapping

再び E を楕円曲線 C 上の階数 3 の局所自由層，$\pi: W \to C$ を E の定める $\mathbf{P}^2$ 束，T を $\pi_*\mathcal{O}(T) \cong E$ となるトートロジカル因子，$D \in \mathrm{Div}(C)$ を $\mathcal{O}_C(D) \cong \det E$ となる因子とする．今 W 上の完備線形系 $|4T - \pi^*D|$ が既約かつ高々有理二重点のみを持つメンバー S' を含むと仮定する．$\psi: S \to S' \hookrightarrow W$ を S' の特異点極小解消と S' の W への埋め込みとの合成とすると，$\psi^*\omega_{S'} \cong \omega_S$ となる．さらに，$\omega_{S'} \cong \mathcal{O}_W(T) \otimes_{\mathcal{O}_W} \mathcal{O}_{S'}$ となるから，$\Phi_{|K_S|} = \Phi_{|T|}|_{S'} \circ \psi$ となる．従って，$\Phi_{|T|}$ が像の上への双有理写像でありかつ，S' が $\Phi_{|T|}$ によりつぶされなければ，S は標準

曲面になる．しかし，W が $\Phi_{|T|}(W)$ と双有理でない場合は $\Phi_{|T|}$ の S' への制限をくわしく見なければならない．

標準曲面となる場合は以下のとおりである．

定理 3.1 $E \cong L_0 \oplus L_1 \oplus L_2$ (L_i は C 上の次数 d_i の可逆層, $i = 0,\ 1,\ 2$) は定理 2.1 の (1), (2), (3), (4) をみたすものとする．$\pi : W \to C,\ T,\ D$ を上記のものと同じものであるとするとしたとき，高々有理二重点のみを持つようなメンバー $S' \in |4T - \pi^*D|$ の特異点極小解消 S は次の場合を除いて標準曲面になる．

(i) $L_0 \cong L_1 \cong L_2, \quad \deg L_i = 2,\ (i = 0,\ 1,\ 2)$

(ii) $\deg L_0 = 1$ かつ $L_1 \cong L_2 \cong L_0^{\otimes 2}$

(iii) $\deg L_0 = \deg L_1 = 1$ かつ $\deg L_2 = 2$

(iv) $\deg L_i = 1, \quad (i = 0,\ 1,\ 2)$

定理 3.2 $E \cong E_0 \oplus L,\ (E_0 \in \mathcal{E}_C(2,\ e),\ L \in \mathcal{E}_C(1,\ d))$ は e が偶数のとき定理 2.2 の (1), (2), (3) のいずれか 1 つ，e が奇数のとき定理 2.3 の (1), (2) のいずれか 1 つをみたすとする．$\pi : W \to C,\ T,\ D$ を上記のものと同じものであるとしたとき，高々有理二重点のみをもつメンバー $S' \in |4T - \pi^*D|$ の特異点極小解消 S は $e + d \geq 5$ であれば標準曲面である．

定理 3.3 $E \in \mathcal{E}_C(3,\ d),\ (d \geq 5)$ であるとし，$\pi : W \to C,\ T,\ D$ を上記のものと同じものであるとする．このとき，高々有理二重点のみをもつメンバー $S' \in |4T - \pi^*D|$ の特異点極小解消 S は標準曲面である．

上記の定理 3.1, 3.2, 3.3 から次が言える．

E が 3 つの可逆層の直和のときは，$p_g(S) \geq 7$ であれば常に標準曲面である．E が直既約な階数 2 の局所自由層と可逆層との直和のとき，および，E 自身が直既約であるときは，$p_g(S) \geq 5$ であれば常に標準曲面である．E が 3 つの可逆層の直和のとき $p_g(S) = 5,\ 6$ で標準曲面となるものもある．

次に，標準曲面とはならない場合について簡単に述べる．

(I) 定理 3.1 の (i) の場合，$\Phi_{|T|}$ は W から $\mathbf{P}^1$ 上の $\mathbf{P}^2$ 束 $\mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1))$ の上への二重被覆を与える．このとき非特異なメンバー $S \in |4T - \pi^*D|$ に対して $\deg \Phi_{|K_S|} = \deg\left(\Phi_{|T|}|_S\right) = 2$ となる．

ちなみに，このような曲面は次のようにしても構成できる．

$B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4$ を $\mathbf{P}^2$ 上の 16 個の点で横断的に交わる非特異な 4 次曲線とし，$\nu : X \to \mathbf{P}^2$ をその 16 個の点でのブローアップとする．このとき基点をもたないペンシル $X \to \mathbf{P}^1$ が存在する．(もちろん，その一般ファイバーは種数 3 の非超楕円曲線である．) $p_i \in \mathbf{P}^1,\ (i = 1, 2,\ 3,\ 4)$ を B_i の X の中での固有変換の像とし，$C \to \mathbf{P}^1$ を $\{p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4\}$ で分岐する二重被覆とすると，$S := X \times_{\mathbf{P}^1} C$ は，$K_S^2 = 18,\ p_g(S) = 6,\ q(S) = 1$ かつ，$\deg \Phi_{|K_S|} = 2$ をみたす．

(II) 定理 3.1 の (iv) の場合は $p_g(S)=3$ となるから, 標準曲面にならないことは明らかである. このときは $\Phi_{|K_S|}$ は $\mathbf{P}^2$ の上への分岐被覆を与えるのだが, その次数は L_0, L_1, L_2 のとりかたによって 6, 8 または 9 と変わる. 類似の現象が $E \cong E_0 \oplus L$, ($E_0 \in \mathcal{E}_C(2,\ 2)$, $L \in \mathcal{E}_C(1,\ 1)$) の場合にも見られる.

(III) $E \cong E_0 \oplus L$, ($E_0 \in \mathcal{E}_C(2,\ 1)$, $L \in \mathcal{E}_C(1,\ 1)$) のとき, および, $E \in \mathcal{E}_C(3,\ 2)$ のとき, $p_g(S)=2$ となるのだが, $|K_S|$ は 6 個の孤立基点をもつ線形ペンシルとなり, その一般メンバーは種数が 7 の非特異曲線である.

最後に未解決の部分について述べる.

前述のとおり $\Phi_{|T|}$ が像の上への双有理写像とならない場合, $\Phi_{|T|}$ の $S' \in |4T - \pi^* D|$ への制限の様子を見なければならないが, そこのところがむずかしく, 現時点で解けているのは上記の (I), (II), (III) のみである.

以下, $\Phi_{|T|}$ が像の上への双有理写像とはならない場合で, $\Phi_{|K_S|}$ がどうなるかわかっていないような C 上の局所自由層を列挙する. (ついでに $\deg \Phi_{|T|}$ と, そのときの $p_g(S)$ の値も書いておく.)

(1) $E \cong L_0 \oplus L_1 \oplus L_1$, $\quad L_0 \in \mathcal{E}_C(1,\ 1)$, $L_1 \cong L_0^{\otimes 2}$, $\qquad \deg \Phi_{|T|} = 2$, $p_g(S) = 5$.

(2) $E \cong L_0 \oplus L_1 \oplus L_2$, $\quad L_0$, $L_1 \in \mathcal{E}_C(1,\ 1)$, $L_2 \in \mathcal{E}_C(1,\ 2)$, $\qquad \deg \Phi_{|T|} = 2$, $p_g(S) = 4$.

(3) $E \cong E_0 \oplus L$, $\quad E_0 \in \mathcal{E}_C(2,\ 3)$, $L \in \mathcal{E}_C(1,\ 1)$, $\qquad \deg \Phi_{|T|} = 3$, $p_g(S) = 4$.

(4) $E \cong E_0 \oplus L$, $\quad E_0 \in \mathcal{E}_C(2,\ 2)$, $L \in \mathcal{E}_C(1,\ 2)$, $\qquad \deg \Phi_{|T|} = ??$, $p_g(S) = 4$.

(5) $E \in \mathcal{E}_C(3,\ 4)$, $\qquad \deg \Phi_{|T|} = 4$, $p_g(S) = 4$.

参考文献

[1] T. Ashikaga, A remark on lower semi-continuity of Kodaira dimention, Master's thesis, Tohoku Univ., 1978 (in Japanese).

[2] T. Ashikaga and K. Konno, Algebraic surfaces of general type with $c_1^2 = 3p_g - 7$, Tohoku Math. J. 42 (1990), 63–76.

[3] M. F. Atiyah, Vector bundles over an elliptic curve, Proc. London Math. Soc. (3) 7 (1957), 414–452.

[4] A. Beauville, L'application canonique pour les surfaces de type general, Invent. Math. 55 (1979), 121–140.

[5] F. Catanese and C. Ciliberto, Symmetric products of elliptic curves and surfaces of general type with $p_g = q = 1$, J. Algebraic Geometry 2 (1993), 389–411.

[6] W. Fulton and J. Harris, Representation theory, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-London-Paris-Tokyo-Hong kong-Barcelona-Budapest, 1991.

[7] E. Horikawa, Algebraic surfaces of general type with small c_1^2, II, Invent. Math. 37 (1976), 121–155.

[8] E. Horikawa, Notes on canonical surfaces, Tohoku Math. J. 43 (1991), 141–148.

[9] K. Konno, On non-hyperelliptic fibrations of small genus and certain irregular canonical surfaces, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat. (4) 20 (1993), 575–595.

[10] K. Konno, A note on surfaces with pencils of non-hyperelliptic curves of genus 3, Osaka J. Math. 28 (1991), 737–745.

[11] T. Oda, Vector bundles on an elliptic curve, Nagoya Math. J. 43 (1971), 41–72.

[12] M. Reid, Probrems on pencils of small genus, preprint.

[13] T. Takahashi, Certain irregular algebraic surfaces and their canonical mapping, in preparation.

[14] G. Xiao, Fibered algebraic surfaces with low slope, Math. Ann. 276 (1987), 449–466.