代数幾何学シンポジウム記録
1994年度　pp.38-46

On $\mathbb{F}_1$

東京工大・黒川信重
(Nobushige Kurokawa)
Dept of Math., Tokyo Institute of Tech.

[1] 動機 (Motivation)

「リーマン予想をゼータ関数の零点と極のテンソル積構造を用いて証明せよ。」(Prove the Riemann hypothesis using the (absolute) tensor product structure of zeros and poles of zeta functions.)

ここでテンソル積構造とは

「$\zeta(s_1, M_1) = 0, \infty$ かつ $\zeta(s_2, M_2) = 0, \infty \Rightarrow \zeta(s_1 + s_2, M_1 \otimes M_2) = 0, \infty$」

を指す。考えを固定するためには，M_1, M_2 は $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ 上の有限型スキームとし，ゼータ関数はハッセ・ヴェイユのゼータ関数とする：

$$\zeta(s, M) = \prod_{\substack{m \in |M| \\ \text{閉点}}} (1 - N(m)^{-s})^{-1},$$

$N(m) = \#(\text{剰余体})$。

たとえば，

$\zeta(s, \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}) = \zeta(s) = \prod_{p:\text{素数}} (1 - p^{-s})^{-1}$ はリーマンのゼータ関数。

グロタンディークによって発見された $\mathbb{F}_p$ 上の相対テンソル積構造はドリーニュによるヴェイユ予想（$\mathbb{F}_p$ 上のリーマン予想）の証明に使われた。

グロタンディークの積構造は

$$\zeta(s, M_1 \underset{\mathbb{F}_p}{\otimes} M_2) = \prod_{m=0}^{2\dim(M_1 \underset{\mathbb{F}_p}{\otimes} M_2)} \det\left(1 - \mathrm{Frob}(p)p^{-s} \middle| H^m(M_1 \underset{\mathbb{F}_p}{\otimes} M_2)\right)^{(-1)^{m+1}}$$

$$= \prod_{m_1, m_2} \det\left(1 - \mathrm{Frob}(p)p^{-s} \middle| H^{m_1}(M_1) \otimes H^{m_2}(M_2)\right)^{(-1)^{m_1+m_2+1}}$$

である。(コホモロジーはエタールコホモロジーやクリスタルコホモロジーなど。)

ドリーニュによる証明は

「$\zeta(s, M) = 0, \infty$ が $\frac{m-1}{2} \leqq \mathrm{Re}(s) \leqq \frac{m+1}{2}$ に対して成り立っているとき(あるいは s が m 次元コホモロジーの固有値から来ているとき) $\mathrm{Re}(s) = \frac{m}{2}$ 」を示すことに帰着する。

テンソル積構造を用いると $\zeta(ns, M^{\otimes n}) = 0, \infty$ $(n=1, 2, \cdots)$ であり (ns は mn 次元コホモロジーの固有値から来ており)

$$\frac{mn-1}{2} \leqq \mathrm{Re}(ns) \leqq \frac{mn+1}{2} \quad (n=1, 2, \cdots)$$

が示される。これから

$$\frac{m}{2} - \frac{1}{2n} \leqq \mathrm{Re}(s) \leqq \frac{m}{2} + \frac{1}{2n} \quad (n=1, 2, \cdots)$$

が成立し、

$$\mathrm{Re}(s) = \frac{m}{2}$$

を得る。

この方法をリーマン・ゼータ関数 $\zeta(s)=\zeta(s,\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z})$ に適用しようとすると，通常のテンソル積では

$$\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}\otimes\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}=\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$$

となってしまい，うまくいかない。"$\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}\otimes\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$" が2次元となるような "テンソル積" が必要になる。これが，ここで考えようとする "最小体"（"1元体"…）$\mathbb{F}_1$（"零体" とも呼ばれる）上のテンソル積（絶対テンソル積）の起源である。

解析的には

$$Z_1(s)=\prod_{\rho}(\rho-s)^{m_1(\rho)},$$

$$Z_2(s)=\prod_{\rho}(\rho-s)^{m_2(\rho)}$$

に対して（積は正規化積）

$$Z_1(s)\otimes Z_2(s)=\prod_{\rho_1,\rho_2}(\rho_1+\rho_2-s)^{m_1(\rho_1)m_2(\rho_2)\mathrm{sgn}(\rho_1,\rho_2)}$$

と構成される（[2][3]…）。ここで，

$$\mathrm{sgn}(\rho_1,\rho_2)=\begin{cases}1 & \cdots\ \mathrm{Im}\,\rho_1,\ \mathrm{Im}\,\rho_2\geqq 0\\ -1 & \cdots\ \mathrm{Im}\,\rho_1,\ \mathrm{Im}\,\rho_2<0\\ 0 & \cdots\ \text{その他}\end{cases}。$$

これは $\zeta(s,\mathbb{F}_{q_1})=(1-q_1^{-s})^{-1}$, $\zeta(s,\mathbb{F}_{q_2})=(1-q_2^{-s})^{-1}$ から構成される $\zeta(s,\mathbb{F}_{q_1})\otimes\zeta(s,\mathbb{F}_{q_2})$ の場合でも非自明な位数2の二重双曲サイン(正弦)関数となる。（[3]－[9]）

2 $\mathbb{F}_1$ とは？

Professor Manin [1] introduced the one element field $\mathbb{F}_1$ in 1991/92 as the constant field of $\mathbb{Z}$. He introduced the category of $\mathbb{F}_1$-motives (= absolute motives) also. If we believe in $\mathbb{F}_1$, then we can (or "should") prove the Riemann hypothesis, Langlands conjectures, and the Fermat conjecture.

定義 1. $\mathbb{F}_1 = \{1\}$. （1元体）

定義 2. $\mathbb{F}_1 = \lim_{q \to 1} \mathbb{F}_q$.

（$\mathbb{F}_q$ を「量子体」と思うと，準古典極限）
semi-classical limit

定義 3. $\mathrm{Mod}(\mathbb{F}_1) = \underline{\mathrm{Set}}$.

$$\begin{array}{ccc} ([\mathbb{F}_1\text{加群の圏}] & = & [\text{集合の圏}]) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathbb{F}_1^{(X)} & \longleftarrow & X \end{array}$$

ゼータ関数は圏の言葉でうまく扱える。$\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ 上有限型のスキーム M のハッセ・ヴェイユ・ゼータ関数は連接層の圏 $\mathrm{Coh}(M)$ のゼータと見ることが自然であり，

$$\zeta(s, \mathrm{Coh}(M)) = \prod_{P \in \mathrm{Simple}(\mathrm{Coh}(M))} (1 - N(P)^{-s})^{-1}$$

が $\zeta(s, M)$ となる。ここで $\mathrm{Simple}(\mathrm{Coh}(M))$ は単純対象の同値類全体であり，$N(P) = \# \mathrm{End}(P)$. たとえば

$\zeta(s) = \zeta(s, \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}) = \zeta(s, \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})) = \zeta(s, \underline{\mathrm{Ab}})$。

（今の場合，有限型条件は重要でない。）

この解釈によって，ゼータ関数の特殊値に関するリヒテンバウムやベイリンソンの予想はK群が圏のK群として自然に出てくることから

$$\zeta(s, \mathcal{C}) = {}^{\#}K_s(\mathcal{C})$$

という圏$\mathcal{C}$に関する等式の形の予想と考えることができる。

この観点からすると定義3は自然に思える。さらに，

$$\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}) = \underline{\mathrm{Ab}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Set}} = \mathrm{Mod}(\mathbb{F}_1)$$

という忘却関手によって$\mathbb{Z}$は$\mathbb{F}_1$ー代数のように思うことができる。したがって，$\mathbb{Z}$の"定数体"とも思うことができよう。

3 いくつかの性質

(1) $\boxed{GL_n(\mathbb{F}_1) = S_n}$

(証) $GL_n(\mathbb{F}_1) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{Mod}(\mathbb{F}_1)}(\mathbb{F}_1^n)$

$$= \mathrm{Aut}_{\underline{\mathrm{Set}}}(\{1, \dots, n\})$$

$$= S_n .$$

さらに一般に

$$GL(\mathbb{F}_1^{(X)}) \cong S(X) \quad (\text{対称群}).$$

(2) $\boxed{{}^{\#}\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_1) = n.}$

さらに一般に ${}^{\#}\{\mathbb{F}_1^n \text{の} i \text{次元部分空間}\} = \binom{n}{i}$。

(証) $\#\{\mathbb{F}_1^n$ の i次元部分空間$\}$

$= \#\{\ \{1,\cdots,n\}$ の i元部分集合$\}$

$= \binom{n}{i}$。

(註) 定義2 からの証明は

$\#\{\mathbb{F}_q^n$ の i次元部分空間$\} = \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q = \dfrac{[n]_q!}{[i]_q!\,[n-i]_q!}$

(ガウスの2項係数)

(ただし $[n]_q! = [1]_q [2]_q \cdots [n]_q$ で、

$[x]_q = \dfrac{q^x-1}{q-1}$ は q類似)

から $q \to 1$ とすればよい。

(3) $\boxed{\#\mathbb{F}_1 = 1+\dfrac{\log\infty}{\infty}}$.

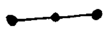
(証) $\#\mathbb{F}_1 = \left(\#M_n(\mathbb{F}_1)\right)^{\frac{1}{n^2}}$

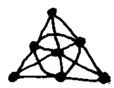
$= \left(\#\mathrm{End}_{\mathrm{Mod}(\mathbb{F}_1)}(\mathbb{F}_1^n)\right)^{\frac{1}{n^2}}$

$= \left(\#\mathrm{End}_{\underline{\mathrm{Set}}}\{1,\cdots,n\}\right)^{\frac{1}{n^2}}$

$= n^{\frac{1}{n}} \sim 1+\dfrac{\log\infty}{\infty}$.

(4) $\boxed{\text{射影空間}}$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_1)$  ($\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2)$ )

$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_1)$  ($\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ )

$\vdots$

(5) 微分

$$\mathrm{Der}(\mathbb{Z}/\mathbb{F}_1) \cong \mathbb{Z}^{\mathbb{P}}$$ 直積 ($\mathbb{P}=\{2,3,5,\cdots\}$ 素数全体).

$$\Omega^1(\mathbb{Z}/\mathbb{F}_1) \cong \mathbb{Z}^{(\mathbb{P})}$$ 直和.

(証) $\mathbb{F}_1$-線型性は自動的に満たされる。

注意1　$\mathrm{Der}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_1)=0$, $\Omega^1(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_1)=0$.

注意2　伊原先生([2])による数の微分：

$a \in \mathbb{Z}-\{0,\pm1\}$ に対して

$$d(a) = (d(a)_p)_{p\in\mathbb{P}},$$

$$d(a)_p = \left[\frac{a-a^p}{p} \text{ in } \mathbb{F}_p\right],$$

は，ここでの微分にうまく合っているように思われる。

さらに，予想

$$\#\{p \le x \mid d(a)_p = 0\} \sim \log\log x$$

を仮定すれば $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ を $\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_1$ 上の曲線とみたときの種数は $\log\log\infty$ ということになると思われる。

(6) 代数閉包

$\overline{\mathbb{F}}_1$ はどう考えればよいであろうか？　たとえば

$$\mathrm{Mod}(\overline{\mathbb{F}}_1) = \{X_1 \to X_2 \to \cdots \mid X_i : \text{集合}\}$$

として，自然な射（可換写像の列）をとったものはどうであろうか？　一方，$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_1/\mathbb{F}_1)$ は

$\lim_{q\to1} \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ と考えれば $\hat{\mathbb{Z}}$ (とくに $\overline{\mathbb{F}}_1 \supsetneq \mathbb{F}_1$)

であろうが、 $n>1$ に対して

$\#\{\mathbb{F}_1[X]$ の n 次の既約モニック多項式$\}$ を

$$\lim_{q\to 1} \#\{\mathbb{F}_q[X] \text{ の } n \text{ 次の既約モニック多項式}\}$$

$$= \lim_{q\to 1} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) q^d$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$= 0$$

と考えると $\overline{\mathbb{F}_1} = \mathbb{F}_1$ とも思われるかも知れない。

(7) $\boxed{\mathbb{F}_1\text{－スキーム}}$

代数の圏と加群の圏については次の図が考えられる。

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Alg}(\mathbb{Z})=\underline{\mathrm{Ring}}\ni(R,+,\times) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dl, bend right, mapsto] \arrow[dr, bend left, mapsto] & \\
(R,+)\in\underline{\mathrm{Ab}}=\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}) \arrow[dr] \arrow[dr, bend right, mapsto] & & \mathrm{Alg}(\mathbb{F}_1)=\underline{\mathrm{Monoid}}\ni(R,\times) \arrow[dl] \arrow[dl, bend left, mapsto] \\
 & \underline{\mathrm{Set}}=\mathrm{Mod}(\mathbb{F}_1)\ni R &
\end{tikzcd}$$

これから、$\mathbb{F}_1$－スキームはモノイドのスキームを意味すると思われ、トーラス多様体や対数スキームの話に結びつくと考えられる。

文献

[1] Yu. I. Manin "Lectures on zeta functions and motives" 1991-1992 (Max-Planck-Institute preprint 1992) [Astérisque]

[2] 伊原康隆「Fermat商と「数の微分」について」『数理解析研究所講究録 810』p. 324-341, 1992年。

[3] N. Kurokawa "On some Euler products (I)" Proc. Japan Acad. 1984

[4] ——: "Multiple zeta functions: an example" Proc. Zeta Functions in Geometry 1990 August (Tokyo Inst. of Technology) [Adv. Studies in Pure Math. 21]

[5] N. Kurokawa "Multiple sine functions and Selberg zeta functions" Proc. Japan Acad. 1991.

[6] N. Kurokawa "Gamma factors and Plancherel measures" Proc. Japan Acad. 1992

[7] 黒川信重 "Lectures on multiple sine functions" (小山信也氏によるノート) 1991年4月-7月, 東京大学。

[8] 黒川信重「ゼータ関数の行列式表示とテンソル積」『数理解析研究所講究録 810』p. 305-317, 1992年。

[9] 黒川信重「ゼータは生きている——類体論から霊体論へ——」『あぶない数学』(朝日ワンテーママガジン) 朝日新聞社, 1995年1月刊。