代数幾何学シンポジウム記録
1995年度 pp.129-148

亜群による商空間の構成

森重文

京都大学数理解析研究所

§1 主定理の説明

このノートでは筆者と S. Keel 氏との共同論文 [KeelMori95] の解説をおこなう。言葉の定義は後回しにして、先ず主要結果を次に述べる。

1.1 定理. $R \rightrightarrows X$ *(*即ち $j: R \to X \times X$*)* を平坦な亜群でその固定群 $j^{-1}(\Delta_X) \to X$ が有限射であるものとする。この時、一様幾何的 *(uniform geometric)* かつ一様圏的 *(uniform categorical)* 商空間であるような代数空間が存在する。もし j が有限ならこの商空間は分離的である。

このノートでは対象としては局所ネーター的な底空間上有限型の代数空間しか考えない。

応用上、(1.1) は次の場合が最も基本的である。

1.2 系. 空間 X が平坦な群概型 G の固有作用を持つとする。この時、X/G の一様幾何的商空間かつ一様圏的商空間が存在し、それは分離的代数空間である。

(1.2) は[Kollár95]の主結果の仮定を弱めた命題となっている。(1.2)の応用については同論文を参照されたい。例えば、以前は標数0でしか知られていなかった多くのモジュライ空間の存在がより一般的な設定で証明されている。

[KeelMori95] の証明は[Kollár95]とは全く異なっている。その方針は亜群の作用が群作用よりもずっと柔軟であることに基づいており、それによって初等的で簡単な議論で証明が得られる。

(1.1)から直ちに得られる結果として次の系がある。

[KeelMori95] は Annals of Math. に出版予定.
このノートは Annals of Math. の許可を得て作成した.

1.3 系. *(1)* 分離的な *algebraic stack* [FaltingsChai80, 4.9] は粗モジュライ空間を持ち、しかもそれは分離的な代数空間である。

(2) アルティン [Artin74, 5.1, 6.1] の意味での *algebraic stack* については、もし固定群が有限射 *(2.7)* なら *GC* 商空間を代数空間としてもつ。もし *stack* が分離的なら *GC* 商空間も同様である。

(1.3.1) は証明なしで結果だけが知られている。例えば、[FaltingsChai80, 4.10] においては証明なしで結果だけ述べられている。

後に §9 で見るように安定点集合のGIT 商空間については (1.1) の仮定は成立し、得られる商空間も同型である。

1.4 定義と記号. このノートで概型というときは必ずしも分離的とは仮定しない。層といえば qff (quasi-finite flat) トポロジーの意味での層のこととする。

底空間としては局所ネーター的な概型を固定し L-概型しか対象としない。従って積 $X \times Y$ というのは $X \times_L Y$ であるし、又分離的、有限型等の X の性質について述べる時は特にことわらない限り写像 $X \to L$ についてのべている。

幾何的点というのは L-概型であるような代数閉体のスペルトラムのこととする。(これは有限型とは限らない。)

1.5 定義. 関係とは任意の写像 $j : R \to X \times X$ のこととする。全ての概型 T に対して写像 $j(T) : R(T) \to X(T) \times X(T)$ の像がいつも (集合の) 同値関係になる時、Relation j は 前同値関係であるという。もし更に $j(T)$ がいつも単射であれば、j は 同値関係という。前同値関係に対して商層を X/R で表す。

このノートでは j は関係を表すこととし、各因子への射影を $p_i : R \to X$ で表す。

1.6 定義. 概型 U, V による有限型の同値関係 $j : V \to U \times U$ で各射影 $p_i : V \to U$ がエタールになるようなものの商層 $Q = U/V$ を L 上の 代数空間であるという。

更にU, V, j をうまく選び U が有限型 (resp. j が閉埋込)にできる時、代数空間 Q は有限型 (resp. 分離的) という。

さて [Knudson71, II.1.5] にある通り代数空間の圏ではファイバー積が常に存在することを注意しておこう。従って関係、前同値関係、同値関係等の概念は X, R が代数空間の時にも考えられる。以後、特に断らない限り X, R は代数空間としてする。

1.7 注意. もし $X/R \to Q$ が代数空間への写像で $Q' \to Q$ が代数空間の間の写像とすると、任意の関係 $j : R \to X \times X$ は $X' = X \times_Q Q'$ 上の関係 $R' = R \times_Q Q'$ に引き戻すことが出来る。（ただし、$p_{i,R'} = p_{i,R} \times_Q Q' : R' \to X'$。）もし R が前同値関係（または同値関係）なら R' も同様である。もう一つの引き戻し（制限と呼ぶ）は §2 で導入される。

1.8 定義. $j : R \to X \times X$ は前同値関係とし、$q : X/R \to Q$ を代数空間 Q への写像とする。次の性質を考えよう。

(G) $X(\xi)/R(\xi) \to Q(\xi)$ はどんな幾何的点 ξ に対しても全単射である。

(C) q は（必ずしも分離的とは限らない）代数空間への写像の中で最も一般的なものである。

(UC) $(X \times_Q Q')/(R \times_Q Q') \to Q'$ はどんな平坦写像 $Q' \to Q$ に対しても条件 (C) を満たす。

(US) q は普遍的沈め込み (universal submersion) である。

(F) エタール層の列

$$0 \to \mathcal{O}_Q \to q_*(\mathcal{O}_X) \overset{p_1^* - p_2^*}{\to} (q \circ p_i)_*(\mathcal{O}_R)$$

は完全 (つまり、Q 上の正則関数は X 上の R-不変な正則関数に他ならない).

商層の定義より (UC) が満たされれば (F) も自動的に満たされることを注意しておこう。

もし q が (C) を満たすなら q は 圏的商空間といい, もし (UC)を満たせば 一様圏的商空間という。もし (G) と (C) を同時に満たせば 粗モジュライ空間といい、もし (G), (US) と (F) を満たせば幾何的商空間という。**GC** 商空間 というのは商空間が上の全ての条件をみたすことである。

1.9 注意. (1.8.G) は定義により普遍的、つまり任意の引き戻し $Q' \to Q$により保たれる。従ってもし $U' \subset X' = X \times_Q Q'$ が R'-不変な集合 ($R' = R \times_Q Q'$) なら、集合として $U' = {q'}^{-1}(q'(U'))$ である。もし射影 p_i が普遍的開写像であり q が (1.8.G) and (1.8.US) を満たすなら、q は普遍的開写像である。

概型の圏では幾何的商空間は常に圏的商空間であり、特に唯一つしか存在しない。([MumfordFogarty82]の 0.1 を参照。) しかし代数空間についてはこれは成り立たない [Kollár95]。

では証明の大雑把なアイデアとこのノートのおおまかな構成を説明しよう。1.1 の証明の基本的アイデアは状況を「制限」という操作を繰り返す事により簡単にするということである。このアイデアは [MumfordFogarty82] の 218ページに解析的な場合の証明のスケッチに始まり、それはおおむね次のようなものである。

商空間の構成には同じ軌道上の点を同一視する必要がある。もし W が $x \in X$ を通る幾つかの十分一般な超曲面による切断で各軌道と(空でない)有限個の点で交わるようなものとする。すると W から各点 $w \in W$ を (X の同一軌道上にある) 有限個の同値な点と同一視することによって商空間が得られる。この同値関係はもはや群作用では記述出来るような関係ではない、しかしかなりの構造は残っている。これが §2 で定義される亜群の概念につながる。亜群による記述は大変柔軟であり、「制限」という操作をいろいろに使うことにより状況を簡素化することができる。(§3 参照。) 又、点 $x \in X$ のエタール近傍で議論をすることができる。切断 W を取ることにより射影 $p_1, p_2 : R \to X$ が擬有限 (quasi-finite) である場合に帰着できる。そして §4 で、関係 R が「分解」している、つまり有限平坦部分亜群 P とx に影響を及ぼさない部分とに分離させる分解定理 4.1 を述べる。§5 では既に知られている有限自由亜群の場合を述べるがそれは有限群作用の場合と非常によく似ている。§7 で商空間の構成を行う。先ず P で商を取り、次にエタール関係による商を取るが後者は既に代数空間になっている。

(1.1) の証明のアイデアを図式で示すと

$$
\begin{array}{c}
\text{有限自由亜群の場合、即ち}(5.1) \\
\downarrow \\
j : R \times X \text{ が有限の場合} \\
\downarrow \\
\text{一般の場合、即ち}(1.1)
\end{array}
$$

となるが、両方の矢印が 7.8 の靴ひも定理で、それは分解定理 4.1 を用いて一般の商の構成を有限自由亜群による商構成とエタール同値関係による商構成（代数空間の定義）との２段階に分けて実行できるというものである。

§2 亜群

先ず圏に関するごく簡単な注意から始めるが、結局それだけが重要であることがあとでわかるはずである。

第一に、小さな圏 C に対して $R = Hom(C)$ and $X = Obj(C)$ と書く。すると各写像 f に対してソースとターゲットを対応させる二つの自然な写像 $s, t : R \to X$ がある。また、合成は写像 $R \times_{(s,t)} R \xrightarrow{c} R$ を定め、恒等写像は s と t 両方に関する切断 $e : X \to R$ を与える。これらの写像の間には圏の公理から導かれる明らかな交換関係が成り立ち、小さな圏は集合の対 R, X で s, t, e, c がいろいろな交換関係を満たすものとしても同値に定義できる。

もし更に C の全ての写像が同型写像ならば、C は 亜群と呼ばれる。それは $R \rightrightarrows X$ と表される。又、写像にその逆写像を対応させる写像 $i : R \to R$ も存在する。もし C が亜群ならば、$j = (t, s) : R \to X \times X$ の像は同型なものを同値とする前同値関係になっていることに注意しておこう。

写像 s, t, e, c, R, X が圏 C を定義したとしよう。もし $A \to X$ が集合の写像とすると、ファイバー積は圏 $C|_A$ をつぎのように定義する。圏の物体はA の任意の元、写像は $R|_A = R \times_{X \times X} A \times A$ の元であり、A の２元 a, b の間の写像はそれらの X への像の間の写像にほかならない。写像の合成は X 上の写像の合成で得られる。もし C が亜群なら $C|_A$ も同様である。ここでは $R|_A$ を R の A への制限と呼ぶことにする。

$p: X \to Z$ は $p \circ s = p \circ t$ となるような写像とし $Z' \to Z$ を任意の写像とする。この時、$X' = X \times_Z Z', R' = R \times_Z Z'$ とおく。二つの写像 $s, t: R \to X$ は各々写像 $s', t': R' \to X'$ を定めるがこれらは亜群を定めることが直ちにわかる。

これは (1.7) と両立する。つまり自然な単射 $R' \hookrightarrow R|_{X'}$ がありこれにより (R', X') は $(R|_{X'}, X')$ の部分圏になる。ここでは R' を引き戻しと呼ぶ。

2.1 定義. 亜群空間 は上のような代数空間の間の有限型写像 s, t, c, e, i の五つ組のうちどんな T についても五つ組 $s(T), t(T), c(T), e(T), i(T)$ が亜群 $R(T) \rightrightarrows X(T)$ を関手的に定めるようなもののことである。

亜群空間 $s, t: R \rightrightarrows X$ に対してこのノートでは$j = (t, s), p_1 = t, p_2 = s$ という記法を使うことにする。

今から代数空間を取り扱おう。簡単のために記号の乱用で亜群空間を単に亜群と呼ぶ。そして圏のセットアップに戻りたいと思う時は集合の亜群と思うことにする。

平坦（又はエタール、$\cdots$）亜群とは亜群であって写像 s, t が平坦（又はエタール、$\cdots$）となるもののこととする。

圏に関する注意から明らかに亜群は前同値関係であり（集合の亜群の場合と同様に定義される）亜群の制限或いは引き戻しはやはり亜群である。

特に X が幾何的点の時には R は群概型なので、特に X の任意の幾何的点 x について $R|_x$ は x での固定群と呼ばれる群概型である。群概型 $S = j^{-1}(\Delta_X) \to X$ をやはり固定群と呼ぶ。

亜群の間の写像 $g: (R', X') \to (R, X)$ というのは2つの写像の組 $g: R' \to R$ と $g: X' \to X$ で対応する圏の間の写像 $(R'(T), X'(T)) \to (R(T), X(T))$ が任意の T について関手になるもののことである。

幾何的点 $x \in X$ が前同値関係により固定されるというのは x がその軌道 $t(s^{-1}(x))$ の唯一の幾何的点となっていることとする。

亜群の写像がいつ引き戻しになっているかわかるのは重要である。

2.2 定義. $g: (R', X') \to (R, X)$ を亜群の写像とする。

(1) 水平写像をともにソース写像或いはターゲット写像とした時に可換図式

$$\begin{array}{ccc} R' & \longrightarrow & X' \\ {\scriptstyle g}\big\downarrow & & {\scriptstyle g}\big\downarrow \\ R & \longrightarrow & X \end{array}$$

がファイバー積の図式であれば g は正方形であるという。

(2) 各幾何的点 $x' \in X'$ に対して固定群の間の写像 $S_{x'} \to S_{g(x')}$ が全単射である時 g は固定点を尊重する という。

2.3 注意. もし$X \to Z$ が R-不変であって、(R', X') が任意の写像 $Z' \to Z$による引き戻しとする。この時 $(R', X') \to (R, X)$ は正方形であり固定点を尊重する。

(2.2.1) において、もし図式がソース写像についてファイバー正方形であれば、$S_{x'} \to S_{g(x')}$ なのだからターゲット写像についても同様であることを注意しておこう。

2.4 定義. 亜群 $R \rightrightarrows X$ の GC 商空間 $X \to Q$ が与えられたとする。もし固定点を尊重するエタール正方形 $g : (R', X') \to (R, X)$ で X'/R' の GC 商空間が存在するような任意なものに対して誘導された写像 $Q' \to Q$ がエタールであり $Q' \to Q$ となる時に $X \to Q$ は降下条件 を満たすという。

2.5 注意. 亜群集合の写像 $g : (R', X') \to (R, X)$ が誘導された写像 $Q' \to Q$ から引き戻しで得られるための必要十分条件は g が正方形で固定点を尊重することである。すなわち降下条件は亜群集合については常に成り立つ。

2.6 注意. 任意の写像 $f : W \to X$ に対して、制限 $R|_W$ は次の図式で記述される。ただし各四角形は全てファイバー積である。

$$\begin{array}{ccccc} R|_W & \longrightarrow & R \times_{(p_2, f)} W & \longrightarrow & W \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & {\scriptstyle f}\big\downarrow \\ W \times_{(f, p_1)} R & \longrightarrow & R & \xrightarrow{p_2} & X \\ \big\downarrow & & {\scriptstyle p_1}\big\downarrow & & \\ W & \xrightarrow{f} & X & & \end{array}$$

次の命題によって分離性はあまり心配しなくて良いことがわかる。

2.7 補題-定義. $R \rightrightarrows X$ は亜群とし $j : R \to X \times X$ は誘導写像、S は X 上の固定群 $j^{-1}(\Delta_X) \to X$ とする。この時、j が分離的であるためには $S \to X$ が分離的であることが必要十分である。

この時、$R \rightrightarrows X$ は分離的固定群を持つという。

証明. $S \to X$ は j の$\Delta_X \to X \times X$ による底変換であるから必要条件であることは明らかである。

$S \to X$ が分離的であると仮定しよう。従って任意の切断、特に、単位切断 $e : X \to S$ は閉埋込である（[Knudson71, II.3.11]参照）。上辺が同型 $(r_1, r_2) \mapsto (r_1, i(r_1) \circ r_2)$ である可換図式

$$
\begin{tikzcd}
R \times_{X \times X} R \arrow[r, equal] & R \times_{(s,s)} S \\
R \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, equal] & R \times_{(s,s)} e(X) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

を見よう。$e(X) \to S$ は閉埋込だから垂直の写像も閉埋込になる。従って j は分離的になる。 □

2.8 系. もし $R \rightrightarrows X$ が分離的固定群を持てば、任意の写像 $g : W \to X$ による制限 $R|_W$ も分離的固定群を持つ。

以後、このノートで考える亜群は全て分離的固定群を持つと仮定する。

§3 商空間の構成の局所化

3.1 補題. R は前同値関係とせよ。$g : W \to X$ は集合として、$R|_W$ は *(2.6)* で定義された制限とする。この時、次が成り立つ。

*(1)*層の間の標準的な写像 $W/(R|_W) \to X/R$ は単射である。もし更に、合成写像

$$p : W \times_{(g,p_1)} R \to R \xrightarrow{p_2} X$$

が *qff* トポロジーで全射ならば、先に述べた単射は全単射である。

(2) (開写像) 射影 $p_1, p_2 : R \to X$ は普遍的開写像とし、上に述べた p は普遍的開写像としその像への写像としては qff トポロジーで全射とする。$X \to Z$ を GC 商空間とすると、合成写像 $W \to X \to Z$ の像 V は開集合で誘導写像 $W \to V$ は GC 商空間である。

(3) (全射) 射影 $p_1, p_2 : R \to X$ は普遍的開写像とし、上に述べた p はqff トポロジーで全射とする。$W/(R|_W) \to Z$ を GC 商空間とする。*(1)* により誘導写像 $X/R = W/(R|_W) \to Z$ が存在するが、それは GC 商空間である。

証明. q_X と q_W を各々 X と W に関する商空間への写像とする。写像 $Z' \to Z$ による W, X, R の Z' への底変換を W', X', R' と表すとファイバー積の図式が得られる。

(*)
$$
\begin{array}{ccccccc}
W' \times_{g', p_1'} R' & \longrightarrow & R' & \xrightarrow{p_2'} & X' & \longrightarrow & Z' \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
W \times_{g, p_1} R & \longrightarrow & R & \xrightarrow{p_2} & X & \longrightarrow & Z
\end{array}
$$

（ここでは記号 f' は f の引き戻しを表す。）

(1) は層の定義から得られる。

(2): V は開集合で q_X は (1.9) により普遍的開である。$*$ を用いる同様の注意により $q_X \circ g$ が普遍的開であることがわかる。

定義により、もし W が R-不変な開集合ならこの結果は成立する。だからX を U で置き換えても良い。この時、$W/(R|_W) = X/R$ であるから (1.8.G) と (1.8.C) は成立する。

$*$ により仮定は任意の平坦な底変換 $Z' \to Z$ で保たれる。従って (1.8.UC) は成立する。

(3): $*$ により仮定は任意の平坦な底変換 $Z' \to Z$ で保たれるので性質 (1.8.G)、(1.8.C)、(1.8.US) を証明すれば十分である。(1.8.G) と (1.8.C) は商層 $W/(R|_W) = X/R$ だけによる性質だから q_X について成立することと q_W について成立することは同値である。q_W が q_X を経由するので、q_W が沈め込みなら q_X も同様である。 □

3.2 補題. 射影 $p_1, p_2 : R \to X$ はいずれも普遍的開と仮定しよう。また $\{U_i\}$ を X の有限エタール被覆とする。もし全ての i について GC 商空間 $q_i : U_i/(R|_{U_i}) \to Q_i$ が存在するならば、全体の GC 商空間 $q : X \to Q$ は存在する。

証明. (3.1.3) と帰納法を用いると R-不変な 2 つのザリスキー開集合による被覆の場合を考えれば十分である。(3.1.2) により $(U_1 \cap U_2)/(R|_{U_1 \cap U_2})$ の GC 商空間はGC 商空間 $U_i/(R|_{U_i})$ 各々の開集合として存在する。圏的商空間は唯一だからこれらは貼り合う。 □

3.2.1 系. 写像 $q : X/R \to Q$ が与えられたとする。それが GC 商空間であることを証明するには、Q 上のエタールトポロジーの意味で局所的に示せばよい。

証明. もし Q がエタールトポロジーの意味で局所的に GC 商空間ならば、降下法によりq は (1.8.C) を満たすことがわかる。また (3.2) により X は GC 商空間を持つ。圏的商空間は唯一だから q は GC 商空間である。 □

3.3 補題. $s, t : R \to X$ は平坦で j は擬有限とする。任意の幾何的点$x \in X$ をとる。x のエタール近傍 U で、$U/(R|_U)$ の GC 商空間が存在するようなものがとれることを証明するには、R も X も分離的概型であり $s, t : R \to X$ は平坦擬有限であり更に x は固定されていると仮定して構わない。

GC 商空間が、(3.1.2) と (3.1.3) を満たすようなある性質を持つことを示したい場合、上と同様な仮定をつけることが出来る。

証明.

(3.1.2) により、X は分離的な概型としてよい。R は $X \times X$ 上分離的で擬有限だから R もやはり分離的概型である [Knudson71, II.6.16]。

主張 **1.** $F = s^{-1}(x)$ は $j^{-1}(x, x)$ の各点で *Cohen Macaulay* としてよい。

証明. j は擬有限だから幾何的閉点 $w \in F$ で F は $t^{-1}t(w)$ に沿って Cohen Macaulay となるようなものがとれる。ここで w を $e(t(w))$ に送るような同型 $F \xrightarrow{\circ i(w)} s^{-1}(t(w))$ があるので、x を $t(w)$ でおきかえれば主張は x のザリスキー近傍へ移行することにより得られる。 □

主張 **2.** s, t は平坦で擬有限として良い。

証明. $x \in W \subset X$ を $\dim_x F$ 個の m_x の元で定義された閉部分概型で $\overline{o_x} = \overline{t(s^{-1}(x))}$ との共通部分が x で 0-次元になるようなものとする。F は $j^{-1}(x,x)$ に沿って Cohen Macaulay だから [Matsumura80] により $s : R|_W \to W$ は x 上で平坦であり擬有限である。ザリスキー近傍へ移行しれば、これは全体で成り立つと思って良い。t についての主張は $t = s \circ i$ により成り立つ。3.1.3 により W に制限してもよい。 □

一旦 s, t が擬有限であることがわかれば、ザリスキー近傍へ移行してx は固定されているとして良い。 □

§4 分解定理

4.1 定義. 平坦亜群 $R \rightrightarrows X$ が開かつ閉な部分概型の分離和 $R = P \coprod R_2$ として表され P は有限平坦な部分亜群であり$j^{-1}(x,x) \subset P$ が成り立つ時、R は $x \in X$ 上 分解 しているという。

我々の証明の鍵となるのは次の結果である。

4.2 定理. $s, t : R \rightrightarrows X$を分離的概型からなる平坦擬有限な亜群とせよ。その時、各点 $x \in X$ はアファインなエタール近傍 (W, w) で $R|_W$ が w 上で分解するようにとれる。

証明は Hilbert 概型を用いるもので難しくはないが、[KeelMori95] を参照されたい。証明の過程で使われる次の結果は後で必要なので述べておく。

4.3 補題. $P \rightrightarrows X$ は有限平坦亜群、$x \in X$ は P の固定点。そして U は x を含む開集合とする。$V = s(t^{-1}(U^c))^c$ とおこう。この時、V は x の P-不変な開近傍であり、$V \subset U$ かつ

$$V = \{\eta \in X | \eta \text{ と同値な点は全て } U \text{ に属す}\}$$

が成り立つ。もし U がアファインなら V もアファインである。特に x は P-不変なアフィン開近傍からなる近傍の基礎を持つ。

§5 アファイン概型上の有限平坦亜群による商

アファイン概型上の有限自由亜群の場合の次の結果は [SGA3, V.4.1]で証明されている。

5.1 命題. A はネーター環、B は有限型の A-多元環とする。R は $\operatorname{Spec} B$ 上の有限自由なアファイン亜群とする。この時 B^R は有限型の A-多元環で、写像

$$q : X = \operatorname{Spec} B \to Q = \operatorname{Spec}(B^R)$$

は有限で X/R の GC 商空間である。

以後の節では、いろいろな簡略化の手順を経て一般の場合を (5.1) に帰着する。

§6 補助的な結果

$g : (R', X') \to (R, X)$ 亜群の写像とする。$T \to X$ を写像として、$T' = T \times_X X'$ とおく。この時、亜群の写像 $g_T : (R'|_{T'}, T') \to (R|_T, T)$ が定まる。

6.1 補題. もし g が正方形なら、g_T も同様である。

証明. Hom に移行することによって、集合の亜群を扱っていると思ってよい。自然な写像 $R'|_{T'} \xrightarrow{g_T \times s} R|_T \times_T T'$ を考えれば、それが全単射であることが確認できる。 □

6.2 注意. $f : X \to Y$ を代数空間の写像とする。この時

(1) $g : X \times_Y X \to X \times X$ は分離的である。

(2) もし X が分離的ならば、f も分離的である。

証明. $X \times_Y X$ の定義により、写像 g は層の単射である。従って g は分離的。X が分離的と仮定しよう。合成写像 $X \to X \times_Y X \to X \times X$ が閉埋め込みであるから、$X \to X \times_Y X$ も同様 [Knudson71, I.1.21]。 □

6.3 補題. $R \rightrightarrows X$ は有限平坦亜群とし、X は分離的とせよ。$q : X \to Q$ は GC 商空間とする。この時 q は有限な GC 商空間で降下条件 *(2.4)* を満たす。

証明. X は分離的だから q も同様 (6.2)。(3.2.1) により底変換を行うことによって Q はアファイン概型としてよい。q は分離的かつ擬有限 (1.8.G) だから、X と R は分離的概型である [Knudson71, I.I6.16]。

Q を縮めることにより q は擬射影的 (quasi-projective) としてよい [EGA, IV.18.12.12]: つまり q を $X \subset X' \xrightarrow{q'} Q$ と射影的な $X' \xrightarrow{q'} Q$ に開集合 $X \subset X'$ として埋め込むことが出来る。

$F \subset X$ は幾何的点 $p \in Q$ 上のファイバーとする。この時、$F \subset X'$ は閉集合である。$Z = X' \setminus X$ とし、$H \subset X'$ は Z を含む一般的超局面とする。従って $H \cap F = \emptyset$ であり、$F \subset H^c = U \subset X$ アファイン開集合である。4.3 により U は R-不変としてよいので、X はアファインと仮定できる。従って q は有限で普遍的沈め込みである。残りの性質は 5.1 から導かれる。

さて $g : (R', X') \to (R, X)$ を定義 2.4 のようにとる。降下条件は Q 上エタールトポロジーの意味で局所的に確認できる。従って $Q = (Q, z)$ は強ヘンゼルである。$x' \in X'$ は z 上の任意の点とする。この時 X は強ヘンゼル概型の分離和 (disjoint union) 。明らかに $X' = X \times_Q Q'$ は X の各連結成分一つずつについて示せばよい。もし W が X の連結成分とすると、$R|_W \rightrightarrows W$ はやはり有限である。

(3.2) によって X を連結成分 $\ni g(x')$ で置き換えても写像 $Q' \to Q$ に影響は及ぼさないし、(6.1) により仮定は保たれる。従って X は強ヘンゼルとしてよい。この時X' は、g により X に同型になる成分 X_i と $z \notin g(Y_1)$ となるような Y_1 の分離和 $\coprod X_i \coprod Y_1$ となる。$\{x'\} = g^{-1}(x) \cap X_i$ となるような i をとる。$R' \rightrightarrows X'$ は有限平坦だから、$t'(s'^{-1} X_i)$ は X' は開かつ閉な集合であり X 上有限になる。従って $t'(s'^{-1} X_i)$ 幾つかの X_j の合併になる。固定点を尊重するという条件 $S_x = S_{x'}$ は $g^{-1}(x) \cap t'(s'^{-1} X_i) = \{x'\}$ を意味する。かくして $t'(s'^{-1} X_i) = X_i$ であり X_i は R'-不変となる。従って $(R'|_{X_i}, X_i) \to (R, X)$ は正方形であり $X' = X_i$ と仮定してよい。この時 $(R', X') \simeq (R, X)$ が成り立つ。 □

6.4 補題. $s, t : R \to X$ は j が固有となるような亜群とする。もし $q : X \to Q$ が X/R の GC 商空間なら Q は分離的である。

証明. X はエタールアファイン被覆でとりかえてもよい(3.1.2)。[Kollár95] の (2.9) の証明は亜群に対してもそのまま適用できる。 □

6.5 精密商補題. 分離的概型からなる有限平坦亜群 $R \rightrightarrows X$ に対して $j : R \to X \times X$ が閉埋め込みとなっているとする。この時 X/R は qff トポロジーに関して有限平坦写像 $q : X \to Q$ で代表される。写像 q は平坦であり、この構成は任意の写像 $Q' \to Q$ による引き戻しと交換可能であり、q は GC 商空間である。

証明. $R \subset X \times X$ は X 上有限平坦だから、$t : R \to X$ は R-不変な写像 $q : X \to \mathrm{Hilb}_X$ を定義する。$i : Z \subset \mathrm{Hilb}_X \times X$ を普遍族とすると、$R = X \times_{\mathrm{Hilb}} Z$。$Z$ の普遍性より t の切断 e は $i \circ \gamma = (q, id)$ となる写像 $\gamma : X \to Z$ を定める。従って γ は閉埋め込みである。特に、$\pi : Z \to \mathrm{Hilb}_X$ であるから、$q = \pi \circ \gamma$ は有限である。$Q \subset \mathrm{Hilb}_X$ を q の概型論的像とする。記号の乱用であるが Z により $X \times Q$ への制限も表すことにすると、$Z \times_Q X = R \subset X \times X$ である。

$q : R \to Z$ を射影とする。

さて $\gamma : X \hookrightarrow Z$ が同型であることを示そう。γ が閉埋め込みであるから、$X \times_Q X \subset X \times X$ は次のように分解する。

$$X \times_Q X = X \times_Q Z \times_Z \gamma(X) = R \times_Z \gamma(X) \subset R \subset X \times X$$

q が R-不変であるから、$R \subset X \times_Q X$ が成り立つ。従って $R = R \times_Z \gamma(X)$。

q はアファインであるから概型論的像の定義より $\mathcal{O}_Q \to q_*(\mathcal{O}_X)$ は単射である。π は平坦だから $\mathcal{O}_Z \to q_*(\mathcal{O}_R)$ は単射。かくして $R = R \times_Z \gamma(X)$ より γ は同型写像となる。

従って q は平坦であり $R = X \times_Q X$。これら2つの性質は任意の写像 $Q' \to Q$ による引き戻しで保たれることに注意しよう。これから qff トポロジーの層として $Q = X/R$ であることがわかる。残りは簡単に証明できる。 □

§7 靴ひも定理

代数空間を扱う構成の時の説明のために圏に関する幾つかの注意から始める。更に、GC 商空間に関してはこれらの注意が任意の概型 T について T-点の記述を与えてもいる。

$s,t : R \to X$ は集合の亜群を定めるとする。

$S \subset R$ は自己同型部分亜群、$P \subset R$ は部分亜群とし、$S_P = S \cap P$ とおく。

7.1 定義. $(s,r) \to i(r) \circ s \circ r$ により定まる写像

$$S_P \times_{(s,t)} R \to S$$

が S_P を経由する時、P は 正規 という。

(7.2) P は R に前合成、後合成あるいは両合成により作用する。このように（集合の）亜群を得る。

(1) $P \rightrightarrows X$

(2) $P \times_{(s,t)} R \rightrightarrows R$

(3) $R \times_{(s,t)} P \rightrightarrows R$

(4) $P \times_{(s,t)} R \times_{(s,t)} P \rightrightarrows R$

(7.3) これらの商空間を各々 X', R^t, R^s, R'' で表す。自然な写像 $s : R^t \to X$、$t : R^s \to X$、$s'', t'' : R'' \to X'$と亜群

(1) $P \times_{(s,t)} R^s \rightrightarrows R^s$

(2) $R^t \times_{(s,t)} P \rightrightarrows R^t$

が存在することに注意しよう。R'' が 7.3.1 或いは 7.3.2 の商空間であることは容易にわかる。

次は容易に証明できる。

7.4 補題. s'', t'' が亜群を定義し写像 $(R, X) \to (R'', X')$が亜群の写像となるための必要十分条件は P が正規であることである。

前合成を第一因子に行い、逆元に後合成する操作を第二因子に行うことにより亜群

(7.5) $$M = P \times_{(t, sopr_1)} (R^t \times_{(s,t)} R^s) \rightrightarrows R^t \times_{(s,t)} R^s$$

がえられる。(直感的には作用は $(p, a, b) \to (a \circ p, i(p) \circ b)$ で与えられる)。亜群の写像

$$g : (R^t \times_{(s,t)} P, R^t) \to (P, X)$$
$$h : (M, R^t \times_{(s,t)} R^s) \to (R^t \times_{(s,t)} P, R^t)$$

が存在するが構成によりそれらは正方形である。

7.6 補題. もし P が正規ならば g と h は固定点を尊重する。

証明. $\beta \in R$ と $p \in P$ が与えられた時 $[\beta \circ p] = [\beta]$ in R^t となるには $\beta \circ p \circ i(\beta) \in P$ が必要十分であることに注意しよう。従ってもし P が正規ならば、$[\beta]$ の固定群は S_P の $s(\beta)$ 上のファイバーである。勿論同様の注意は R^s にもあてはまる。補題は容易に得られる。 □

$Z = R^t \times_{(s,t)} R^s/M$ とおく。自然な M-不変な全射

$$R^t \times_{(s,t)} R^s \to R'' \times_{(s'',t'')} R''$$

が存在し、従って全射 $p : Z \to R'' \times_{(s'',t'')} R''$ を得る。

7.7 補題. もし P が正規ならば p は同型である。もし$S \subset P$ ならば $R'' \to X' \times X'$ は単射である。

証明. これは 7.6 の証明の中で述べた固定群に関する注意から容易に得られる。 □

今からは分離的概型を扱う。

7.8 靴ひも定理. 上の記法に従う。$R \rightrightarrows X$ は分離的概型の擬有限平坦亜群とし $P \subset R$ は開かつ閉な部分亜群で X 上有限とする。*(7.2.1)*、*(7.2.4)*、*(7.3.1)*、*(7.3.2)* の全てについて GC 商空間が存在するとする。(*(7.2.2)* と *(7.2.3)* に関しては *(6.5)* より商が存在することに注意しておこう。)

(1) もし $S \subset P$ ならば、$R'' \rightrightarrows X'$ はエタール同値関係であり代数空間 X'/R'' は X/R の GC 商空間である。

(2) もし P が正規ならば、$R'' \rightrightarrows X'$ はエタール亜群である。更に X/R が GC 商空間を持つことと X'/R'' が GC 商空間を持つことは同値であり、両者が持つ場合、商空間は同型になる。即ち、X/R と X'/R'' は同値な GC 商問題を x の近傍で定める。

証明. 亜群 (7.2.2) と (7.2.3) は自由であり従って精密商空間は (6.5) により存在する。写像

$$R \times_{(s,t)} R \to R^t \times_{(s,t)} R^s$$

は精密商空間 $R \times R \to R^t \times R^s$ から引き戻しにより得られるので、やはり精密商空間である。特にこれらの商空間は平坦で任意の底変換と可換である。

次に $s : R^t \to X$ はエタールであることを示そう。$R \to R^t$ が平坦だから s も平坦である。P が R の連結成分であるから、e は s の切断 $\overline{e}$ を与え、$\overline{e}(X)$ は連結成分である。従って s は $\overline{e}$ に沿って不分岐となる。逆元によってずらすことはその点を $\overline{e}$ に移すようなファイバーの自己同型であるから s は不分岐であり従ってエタールである。

さて g と h はエタール正方形であり (7.6) により固定点を尊重する。

さて (6.3) により s'', t'', $\overline{h} : Z \to R''$ はエタールである。Z の普遍性より次の可換図式が得られる。

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p} & R'' \times_{(s'',t'')} R'' \\ {\scriptstyle \overline{h}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle pr_1} \\ R'' & =\!=\!=\!= & R''. \end{array}$$

p は (7.7) により幾何的点については全単射である。両側が R'' 上エタールなので、写像は同型である。写像

$$R \times_{(s,t)} R \to R^t \times_{(s,t)} R^s \to Z$$

の普遍性と R の合成則により図式

$$\begin{array}{ccc} R \times_{(s,t)} R & \xrightarrow{c} & R \\ \downarrow & & \downarrow \\ R'' \times_{(s'',t'')} R'' & \xrightarrow{c} & R'' \end{array}$$

が可換となるような写像 $c: R'' \times_{(s'',t'')} R'' \to R''$ が存在する。同様に次の可換図式も得られる。

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{i} & R \\ \downarrow & & \downarrow \\ R'' & \xrightarrow{i} & R'' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{e} & R \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{e} & R'' \end{array}$$

これらが亜群を定義することを証明するにはいろいろな図式が可換であることを示す必要がある。殆どの場合、それは (R, X) の対応する図式から普遍性で得られる。例えば

$$\begin{array}{ccc} R'' \times_{(s'',t'')} R'' & \xrightarrow{c} & R'' \\ {\scriptstyle pr_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t''} \\ R'' & \xrightarrow{t''} & X' \end{array}$$

の可換性を示すのに、これを可換図式

$$\begin{array}{ccc} R \times_{(s,t)} R & \xrightarrow{c} & R \\ {\scriptstyle pr_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ R & \xrightarrow{t} & X \end{array}$$

と比べ、写像

$$R \times_{(s,t)} R \to R'' \times_{(s'',t'')} R''$$
$$R \to R''$$
$$X \to X$$

が普遍性より全て圏的全射であることを用いる。t'' と s'' がエタールであるからこれから c もエタールであることが得られることを特に注意しておこう。唯一異

なる取り扱いが必要な図式は合成の結合法則である。c がエタールであるから、これはエタール写像の間の等式を確認することに他ならない。これは集合論の話なので (7.4) から従う。また R" の 3 重ファイバー積を幾何的商空間として表して普遍性を適用して証明することもできる。

さて $S \subset P$ と仮定しよう。射影はエタールなので $R'' \to X' \times X'$ は不分岐である。(7.4) によりそれは幾何的点については単射である。従ってそれは単射。今 $Q = X'/R''$ とおこう。$q : X \to Q$ は二つの GC 商写像の合成であるから主張は得られる。 □

§8 定理 1.1 の証明

8.1 補題. $R \rightrightarrows X$ は平坦擬有限亜群であり更に j は有限とする。この時 GC 商空間が存在する。

証明. 仮定は任意の平坦写像による引き戻しで保たれることに注意しよう。(3.2) により各点 $x \in X$ の近傍で局所的に商空間が構成できれば十分である。従って x は R の固定点であるとして良い。(4.1) により R は x 上分解しており、そして X も R もアファイン概型としてよい。この時 (7.8) で必要な各々の GC 商空間は (5.1) により全て存在する。 □

定理 *1* の証明. 固定群 (2.7) は有限だから j は擬有限である。(3.3) の状況だと仮定してよい。(8.1) の証明のように R が分解している場合に帰着する。(8.1) により (7.8) において必要な商空間は全て存在する。 □

§9 GIT との関係

この節を通して L は体のスペクトラムと仮定し、[MumfordFogarty82] の記法に従う。まずどんな写像 $p : S \to X$ についても p がその上で固有になるような X の開集合のうち極大なものが唯一つ存在することに注意しよう。p が亜群の固定群の時にこの開集合を $X(PropStab)$で表す。

9.1 命題. 簡約可能な *(reductive)* 群 G が概型 X に作用しているとする。その時 $U = X_0^s(Pre) \subset X(PropStab)$ が成り立ち、[MumfordFogarty82,1.9] により与えられる U の GIT 商空間は U/G の GC 商空間と同型である。

証明. $q : U \to Y$ は GIT 商空間とする。固定群の有限性を確認するには Y をエタール被覆で取り替えても構わない。従って Y も U もアファインである (q もアファインであることに注意)ので特に分離的である。この時 [MumfordFogarty82,0.8] により G の作用は固有である。

従って $g : U \to Q$ は (1.1) で与えられる分離的 GC 商空間とする。Q は代数空間の中で最も一般であるが、一方 Y は概型の中で最も一般である。従って写像 $h : Q \to Y$ が誘導される。商空間の性質により h は幾何的点に関しては 1 対 1 写像である。従って [Knudson71, I.I6.16] により Q は概型になるので、h は Y の普遍性から同型になる。 □

9.2 注意. 簡約可能群の作用が擬有限な固定群を持つ時、固定群は必ずしも有限とは限らない。例えば $n \geq 4$ として、$G = Aut(P^1)$ が P^1 の n次対称積 X に自然に作用している時、$U \not\subset X(PropStab)$ である。

9.3 注意. (1.1) において j は有限とし s, t はアファインとし、L は体のスペクトラムとする。この時 [MumfordFogarty82,0.7] の議論は亜群にもそのまま適用でき、商空間写像はアファインであることを示している。また Mumford は16頁で (0.7) は任意の底空間の上で成立すると注意している。

References

[Artin74] M. Artin, *Versal deformations and algebraic stacks*, Invent. Math. **27** (1974), 165–189.

[EGA] A. Grothendieck – J. Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébriqe*, vol. 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32, Publ. Math. IHES, 1960–67.

[FaltingsChai80] G. Faltings and C. Chai, *Degeneration of Abelian Varieties*, Springer Verlag, 1980.

[KeelMori95] S. Keel – S. Mori, *Quotients by Groupoids* (1995), Preprint.

[Kollár95] J. Kollár, *Quotient Spaces Modulo Algebraic Groups* (1995), Preprint.

[Knudson71] D. Knutson, *Algebraic Spaces*, vol. 203, Springer Lecture Notes, 1971.

[Matsumura80] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, Benjamin/Cummings Publ. Co., 1980.

[MumfordFogarty82] D. Mumford and J. Fogarty, *Geometric Invariant Theory*, Springer Verlag, 1982.

[SGA3] M. Demazure - A. Grothendieck, *Schémas en Groupes*, vol. 151,152,153, Springer Lecture Notes, 1970.

[Viehweg95] E. Viehweg, *Quasi-Projective Moduli of Polarized Manifolds*, Springer Verlag, 1995.

共に
Ann. of Math. 145 (1997)
pp. 193–213.
pp. 33–79