代数幾何学シンポジウム記録
1995年度 pp.82-92


# 代数曲面上の非アルキメデス的アラケロフ理論とその応用

京都大学大学院理学研究科数学教室

森脇 淳

## 1. 序

$Y$ を、閉体 $k$ 上の非特異射影曲線か、代数体 $K$ の整数環 $O_K$ による $\mathrm{Spec}(O_K)$ とする。さらに、$f: X \to Y$ を $Y$ 上の安定曲線とする。この時、dualizing sheaf $\omega_{X/Y}$ の自己交点数 $(\omega_{X/Y} \cdot \omega_{X/Y})$ を調べることは、幾何学的にも数論的にも非常に重要かつ興味深い問題である。例えば、$(\omega_{X/Y} \cdot \omega_{X/Y})$ の有効な上限を求めることは、$f: X \to Y$ の生成ファイバーの有理点の個数を計算可能な量でおさえることに対応している。このことが解れば、整数論の数多くの未解決問題が解決することはご存じのとうりである。一方、$(\omega_{X/Y} \cdot \omega_{X/Y})$ の有効な下限を求めることもおもしろい問題に関係している。それは、あとで詳しく論ずるが、Manin-Mumford 予想 (=Raynaud の定理) の一般化である Bogomolov 予想である。本稿では、Bogomolov 予想を主題としてそれと $(\omega_{X/Y} \cdot \omega_{X/Y})$ の有効な下限とを関係づける代数曲面上の非アラケロフ理論について紹介していきたいと思う。

## 2. Bogomolov 予想

まず始めに Bogomolov 予想について考える。$K$ を、閉体 $k$ 上の非特異射影曲線の関数体か、代数体とする。$C$ を $K$ 上の種数が $g \geq 2$ の非特異射

影曲線とする。$K$ が関数体の場合、$C$ は isotrivial でないとする。$\overline{K}$ を $K$ の閉体とするとき、$\mathrm{Jac}(C)(\overline{K})$ には自然な Neron-Tate height pairing と呼ばれる pairing

$$( \, , \, )_{NT} : \mathrm{Jac}(C)(\overline{K}) \times \mathrm{Jac}(C)(\overline{K}) \to \mathbb{R}$$

が存在する。この pairing は半正定値であるので $\|x\|_{NT} = \sqrt{(x,x)_{NT}}$ とおき、$\mathrm{Jac}(C)(\overline{K})$ の Neron-Tate ノルムと呼ぶ。さらに、$C(\overline{K})$ の $\mathrm{Jac}(C)(\overline{K})$ への埋め込み $j : C(\overline{K}) \to \mathrm{Jac}(C)(\overline{K})$ を $j(P) = (2g-2)P - \omega_C$ で定めておく。この時、Bogomolov 予想は次のようなものである。

**予想 2.1** (Bogomolov 予想). $j$ による $C(\overline{K})$ の像は、Neron-Tate ノルムについて離散的である。つまり、任意の $x \in \mathrm{Jac}(C)(\overline{K})$ について、ある $r > 0$ が存在して集合 $\{P \in C(\overline{K}) \mid \|j(P) - x\|_{NT} \leq r\}$ は有限集合である。

もう少し、精密化するため少し言葉を用意する。まず $x \in \mathrm{Jac}(C)(\overline{K})$ と $r \geq 0$ に対して

$$B_C(x;r) = \left\{P \in C(\overline{K}) \mid \|j(P) - x\|_{NT} \leq r\right\}$$

とおく。$\#(B_C(x;0)) < \infty$ が Manin-Mumford 予想である。そのことを未知として

$$r_C(x) = \begin{cases} -\infty & \text{もし } \#(B_C(x;0)) = \infty, \\ \\ \sup\{r \geq 0 \mid \#(B_C(x;r)) < \infty\} & \text{そうでない場合}. \end{cases}$$

とおく。Bogomolov 予想の主張は、$r_C(x) > 0$ が任意の $x \in \mathrm{Jac}(C)(\overline{K})$ で成立することであるので、次のような強い形を考えることができる。

**予想 2.2** (強 Bogomolov 予想). ある計算可能な正の数 $r_0$ が存在して

$$\inf_{x \in \mathrm{Jac}(C)(\overline{K})} r_C(x) \geq r_0.$$

代数体の場合、特別な曲線 (例えば $\mathrm{Jac}(C)$ が虚数乗法をもつなど) について Bogomolov 予想は知られている。(cf. [10]) ここでは、関数体の場合の強 Bogomolov 予想を考えよう。そこで少し記号を固定する。$Y$ を閉体 $k$ 上の非特異射影曲線、$X$ を $k$ 上の非特異射影曲面、$f: X \to Y$ を $Y$ 上の種数が $g \geq 2$ の半安定曲線とする。$X_y$ を $y \in Y$ 上の特異ファイバーとする。$P$ を $X_y$ の通常二重点とし、$\iota: X'_y \to X_y$ を $P$ における部分正規化とする。$X'_y$ が連結な時、$P$ を 0-型の通常二重点と呼ぶ。さらに、$X'_y$ が非連結な時、$X'_y$ の二つの連結成分の算術種数のうち小さい方が $i$ とするれば、$P$ を $i$-型の通常二重点と呼ぶ。$f: X \to Y$ の特異ファイバーのなかの $i$-型の通常二重点の総数を $\delta_i$ で表す。この時、次のことが知られている。

**定理 2.3.** (a) (cf. [5]) $g = 2$ ならば、

$$\inf_{x \in \mathrm{Jac}(C)(\overline{K})} r_C(x) \geq \sqrt{\frac{1}{30}\delta_0 + \frac{2}{5}\delta_1}.$$

(b) (cf. [6]) $f: X \to Y$ の安定化モデルが既約なファイバーのみをもつならば、

$$\inf_{x \in \mathrm{Jac}(C)(\overline{K})} r_C(x) \geq \begin{cases} \sqrt{12(g-1)} & f \text{ がスムースの時、} \\ \sqrt{\dfrac{(g-1)^3}{3g(2g+1)}\delta_0} & \text{そうでない時} \end{cases}$$

が成り立つ。

城崎では話しませんでしたが、最近、次の結果を得ました。

**定理 2.4** (cf. [7]). $\mathrm{char}(k) = 0$ とし、$f$ のどの特異ファイバーも安定成分の鎖になっていると仮定する。さらに、次の条件の一つを仮定する。

(a) $f$ の生成ファイバーは超楕円的である。
(b) $f$ のどの特異ファイバーも $i$-型$(i > 0)$の通常二重点を高々一つのみ持つ。

この時、

$$\inf_{x \in \mathrm{Jac}(C)(\overline{K})} r_C(x) \geq \sqrt{\frac{(g-1)^2}{g(2g+1)} \left( \frac{g-1}{3}\delta_0 + \sum_{i=1}^{[\frac{g}{2}]} 4i(g-i)\delta_i \right)}$$

が成立する。

これは次の厳密化されたスロープ不等式の結果です。

**定理 2.5** (cf. [7]). $\mathrm{char}(k) = 0$ とする。$\overline{\mathcal{M}}_g$ (resp. $\mathcal{M}_g$) を $k$ 上の種数が $g \geq 2$ の安定曲線のモジュライ空間 (resp. 非特異曲線のモジュライ空間) とする。$\overline{\mathcal{M}}_g \setminus \mathcal{M}_g = \Delta_0 \cup \cdots \cup \Delta_{[g/2]}$ を既約分解で、$\Delta_i$ の一般の点は$i$-型の通常二重点を一つもつ安定曲線に対応しているものとする。$\delta_i$ で $\Delta_i$ の $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_g) \otimes \mathbb{Q}$ におけるクラスとする。実際上は $\delta_1 = \frac{1}{2}c_1(\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}}_g}(\Delta_1))$ で、$i \neq 1$ に対しては $\delta_i = c_1(\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}}_g}(\Delta_i))$ である。さらに $\lambda$ を $\overline{\mathcal{M}}_g$ 上のホッジ-クラスとする。この時、$\overline{\mathcal{M}}_g$ 上の任意の豊富な直線束 $H_1, \ldots, H_{3g-4}$ に対して、

$$\left( (8g+4)\lambda - g\delta_0 - \sum_{i=1}^{[\frac{g}{2}]} 4i(g-i)\delta_i \right) \cdot H_1 \cdots H_{3g-4} \geq 0$$

が成立する。

## 3. 距離付けられたグラフとグリーン関数

大雑把に言って、アラケロフ理論の要所はリーマン面上のグリーン関数を利用することによって交叉理論がうまく進むことにある。それを、特異ファイバーについても考えようというのが非アルキメデス的アラケロフ理論である。グリーン関数をどのようにとらえるかいうことで考えるのが特異ファイバーの双対グラフで、それ上の調和解析によってグリーン関数を定める。ここでは、距離付けられたグラフとグリーン関数について考える。$G$ は距離付きの位相空間で、$G$ の各点においてある正の整数 $d$ が存在して、$G$ がその点において局所的に

$$\left\{te^{\frac{2\pi\sqrt{-1}k}{d}} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq t < \epsilon, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

と距離空間として同型であるとき、$G$ は距離付けられたグラフと呼ばれる。各点に対して定まる $d$ を $v(x)$ で表すことにする。$G$ 上では弧長変数を利用して $G$ 上の関数の微分可能性を論ずることができる。$F(G)$ を $G$ 上の実数値連続関数で区間ごとに無限回微分可能であるものの全体とする。$F(G)$ の元 $f$ に対して、$F(G)$ 上の汎関数 $\delta(f)$ を次のように定める。$x \in G$ で、$v(x) = n$ とすると,

$$(\delta(f)(x), g) = g(x) \sum_{i=1}^{n} \lim_{x_i \to 0} f'(x_i),$$

ここで $g \in F(G)$ で、$x_i$ は $x$ から始まる一つの経路の弧長変数である。さらに、$f \in F(G)$ に対して、汎関数 $f''$ を

$$(f'', g) = \int_G f'' g d\mu,$$

で定義する。ここで $d\mu$ は弧長変数からくる $G$ の自然なルベーグ測度である。$f \in F(G)$ に対するラプラシアン $\Delta$ は、

$$\Delta(f) = -f'' - \delta(f).$$

と定める。$G$ の点を基底としてできる自由加群を $\mathrm{Div}(G)$ で表し、$\mathrm{Div}(G)$ の元を $G$ 上の因子と呼ぶ。因子 $D$ の係数の和を $\deg(D)$ で表す。$G$ を連結とし、$D$ を $G$ 上の因子で、$\deg(D) \neq -2$ と仮定する。この時、次のことが知られている。

**定理 3.1.** 次を満たす測度 $\mu_{(G,D)}$ と $G \times G$ 上の関数 $g_{(G,D)}$ が一意的に存在する。

(1) $\displaystyle\int_G \mu_{(G,D)} = 1.$
(2) $g_\mu(x, y)$ は対称的で連続であり、区分的に無限回微分可能である。
(3) 固定された $x \in G$ に対して、$\Delta_y(g_\mu(x, y)) = \delta_x - \mu$ である。
(4) 固定された $x \in G$ に対して、$\displaystyle\int_G g_\mu(x, y)\mu(y) = 0$ である。
(5) $g_\mu(D, y) + g_\mu(y, y)$ は、すべての $y \in G$ について定数である。ここで、$g_\mu(D, y)$ は、$D = \sum_{x \in G} d_x x$ とおくと、$\sum_{x \in G} d_x g_\mu(x, y)$ と定める。

(5) で定まる定数を $c(G, D)$ と表し、

$$\mathrm{e}(G, D) = 2\deg(D)c(G, D) - g_{(G,D)}(D, D)$$

とおく。$e(G, D)$ の計算は強 Bogomolov 予想を考える上で重要である。例えば、$G$ が円 $C_1, \ldots C_n$ の一点 $O$ での和であり $D = (2g-2)O$ の時、

$$e(G, D) = \frac{g-1}{3g} L$$

となる。ここで $L$ は $G$ の全長である。例えば、少し話題がずれるが、この事実と [4] を利用して次の non-smooth な場合の effective な Szpiro 予想が証明できる。

**定理 3.2.** $K$ を代数体とし、$f : X \to \operatorname{Spec}(O_K)$ を $K$ の整数環 $O_K$ 上の種数が $g \geq 2$ の安定曲線とする。$\omega^{Ar}_{X/O_K}$ は、アラケロフ距離が与えられた $X/O_K$ の dualizing sheaf とする。この時、もし $X/O_K$ が bad reduction を持てば、

$$\left(\omega^{Ar}_{X/Y} \cdot \omega^{Ar}_{X/Y}\right) \geq \frac{\log(2)}{6(g-1)}$$

となる。

## 4. 代数曲面上の非アルキメデス的アラケロフ理論

$Y$ を閉体 $k$ 上の非特異射影曲線、$X$ を $k$ 上の非特異射影曲面、$f : X \to Y$ を $Y$ 上の種数が $g \geq 2$ の半安定曲線とする。$Y_0$ を $f$ がそれ上スムースとなる最大の $Y$ の開集合で、$S = Y \setminus Y_0$ とおく。$y \in S$ に対して、$G_y$ を $X_y$ の双対グラフとする。ただし、$X_y$ の特異点に対応する弧の弧長は 1 とする。$X_y = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ を $X_y$ の既約分解とし、$C_i$ に対応する $G_y$ に頂点を $v_i$ であらわす。ここで、$G_y$ 上の因子 $\omega_y$ を

$$\omega_y = \sum_i (\omega_{X/Y} \cdot C_i) v_i$$

で定める。これについての $G_y$ 上のグリーン関数を $g_y(x,y)$ とする。さて $X$ 上の $\mathbb{R}$-因子 $D,E$ に対して、$D$ と $E$ の許容対 $(D\cdot E)_a$ を

$$(D\cdot E)_a=(D\cdot E)+\sum_{y\in S}\sum_{i,j}(D\cdot C_i)(E\cdot C_j)g_y(v_i,v_j)$$

と定める。さらに、許容対に関する dualizing sheaf $\omega^a_{X/Y}$ を

$$\omega^a_{X/Y}=\omega_{X/Y}-\sum_{y\in S}c(G_y,\omega_y)X_y$$

とおく。このとき、次のことが知られている。

**定理 4.1.** (1) もし $D$ と $E$ が $f$ の生成ファイバー上で degree が 0 であるならば、$(D\cdot E)_a=-(D_K,E_K)_{NT}$ となる。
(2) $C$ を $f$ の生成ファイバーとする。もし $(\omega^a_{X/Y}\cdot\omega^a_{X/Y})_a>0$ ならば、

$$\inf_{x\in\mathrm{Jac}(C)(\overline{K})}r_C(x)\geq\sqrt{(g-1)(\omega^a_{X/Y}\cdot\omega^a_{X/Y})_a}$$

となる。

詳しくは、[9] や [1] を参考のこと。Bogomolov 予想を考えるには、$(\omega^a_{X/Y}\cdot\omega^a_{X/Y})_a$ を評価する必要がある。定義に従えば、

$$(\omega^a_{X/Y}\cdot\omega^a_{X/Y})_a=(\omega_{X/Y}\cdot\omega_{X/Y})-\sum_{y\in S}e(G_y,\omega_y)$$

となる。したがって、問題は $(\omega_{X/Y}\cdot\omega_{X/Y})$ の下からの評価と $e(G_y,\omega_y)$ の上からの評価である。

## 5. Cornalba-Harris-Xiao の不等式

ここでは、$(\omega_{X/Y}\cdot\omega_{X/Y})$ の下からの評価を考える。

**定理 5.1.** $k$ は体とする。$X$ を $k$ 上の非特異射影曲面、$Y$ を $k$ 上の非特異射影曲線、$f: X \to Y$ をスムースな生成ファイバーをもち、$f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ となる射とする。もし生成ファイバーの種数 $g$ が 2 以上で、$\omega_{X/Y}$ が $f$-nef ならば、

$$(\omega_{X/Y}\cdot\omega_{X/Y}) \geq \frac{4(g-1)}{g}\deg(f_*(\omega_{X/Y})).$$

である。

この定理は、Cornalba-Harris [3] と Xiao [8] によって独立に $\mathrm{char}(k)=0$ の仮定のもとで証明されたものであるが、Bost による結果 [2] を用いて $\mathrm{char}(k)>0$ でも成立する。(cf. [5]) Cornalba-Harris-Xiao の不等式は、等号成立の例が存在するのでぎりぎりのものであるが、可約なファイバーをもつ場合この不等式はあまりよくない。ところが、最近、次のような一般化が得られた。

**定理 5.2** ($\mathrm{char}(k)=0$). (cf. [7]) $f$ は半安定とし、もしすべての特異ファイバーが高々一つの $i$-型($i>0$)の通常二重点をもつならば、

$$(8g+4)\deg(f_*(\omega_{X/Y})) \geq g\delta_0 + \sum_{i=1}^{[\frac{g}{2}]} 4i(g-i)\delta_i.$$

となる。

## 6. $e(G_y, \omega_y)$ の評価

$Y$ を閉体 $k$ 上の非特異射影曲線、$X$ を $k$ 上の非特異射影曲面、$f: X\to Y$ を $Y$ 上の種数が $g \geq 2$ の半安定曲線とする。$X_y$ を $y$ 上の特異ファイバー

とし、$\overline{X}_y$ を $X_y$ の安定化モデルとする。$T$ を $\overline{X}_y$ の有限部分集合で、$P$ が $T$ の元であるとは、$P$ は通常二重点であり二つの既約成分の交わりでないことである。$Z_y \to \overline{X}_y$ を $T$ の各点における部分正規化とする。この時、$X_y$ が安定成分の鎖であるとは $Z_y$ のグラフが区間 $[0,1]$ と同相である時にいう。この時、次のことがわかる。

**命題 6.1.** $X_y$ が安定成分の鎖であると仮定する。$\delta_{i,y}$ で $X_y$ 内の $i$-型の通常二重点の個数を表すことにすると

$$e(G_y, \omega_y) = \frac{g-1}{3g}\delta_{0,y} + \sum_{i=1}^{[\frac{g}{2}]}\left(\frac{4i(g-i)}{g} - 1\right)\delta_{i,y}$$

である。

## 7. 結論

定理 2.4 は、定理 5.2 と命題 6.1 から導かれる。したがって、完全な強 Bogomolov 予想を得るためには、定理 5.2 と命題 6.1 の一般化である次の予想が得られれば、十分である。

**予想 7.1.** $Y$ を閉体 $k$ 上の非特異射影曲線、$X$ を $k$ 上の非特異射影曲面、$f: X \to Y$ を $Y$ 上の種数が $g \geq 2$ の半安定曲線とする。この時、

$$(8g+4)\deg(f_*(\omega_{X/Y})) \geq g\delta_0 + \sum_{i=1}^{[\frac{g}{2}]} 4i(g-i)\delta_i$$

が成立する。

**予想 7.2.** $Y$ を閉体 $k$ 上の非特異射影曲線、$X$ を $k$ 上の非特異射影曲面、$f: X \to Y$ を $Y$ 上の種数が $g \geq 2$ の半安定曲線とする。$X_y$ を $y$ 上の特異ファイバーとする。この時、

$$e(G_y, \omega_y) \leq \frac{g-1}{3g}\delta_{0,y} + \sum_{i=1}^{[\frac{g}{2}]}\left(\frac{4i(g-i)}{g} - 1\right)\delta_{i,y}$$

が成立する。

上の二つの予想から次の予想が導きだせる。

予想 **7.3.** $Y$ を閉体 $k$ 上の非特異射影曲線、$X$ を $k$ 上の非特異射影曲面、$f: X \to Y$ を $Y$ 上の種数が $g \geq 2$ の半安定曲線とする。$C$ を $f$ の生成ファイバーとする。この時、

$$\inf_{x \in \mathrm{Jac}(C)(\overline{K})} r_C(x) \geq \sqrt{\frac{(g-1)^2}{g(2g+1)} \left( \frac{g-1}{3}\delta_0 + \sum_{i=1}^{[\frac{g}{2}]} 4i(g-i)\delta_i \right)}.$$

が成立する。

## 参考文献


[1] S. Bloch, H. Gillet and C. Soulé, Non-archimedean Arakelov Theory, J. Alg. Geom., 4 (1995), 427–485.

[2] J-B, Bost, Semi-stability and height of cycles, Invent. Math., 118 (1994), 223–253.

[3] M. Cornalba and J. Harris, Divisor classes associated to families of stable varieties, with application to the moduli space of curves, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 21 (1988), 455–475.

[4] A. Moriwaki, Lower bound of self-intersection of dualizing sheaves on arithmetic surfaces with reducible fibers, to appear in Math. Ann..

[5] A. Moriwaki, Bogomolov conjecture over function fields for stable curves with only irreducible fibers, to appear in Comp. Math..

[6] A. Moriwaki, Bogomolov conjecture for curves of genus 2 over function fields, preprint (1995), Kyoto-Math 95-13.

[7] A. Moriwaki, A sharp slope inequality for general stable fibrations of curves, in preparation.

[8] G. Xiao, Fibered algebraic surfaces with low slope, Math. Ann., 276 (1987), 449–466.

[9] S. Zhang, Admissible pairing on a curve, Invent. Math., 112 (1993), 171–193.

[10] S. Zhang, Small points and adelic metrics, J. Algebraic Geometry, 4 (1995), 281–300.