代数幾何学シンポジウム記録
1995年度 pp.32-57

HASSE-WEIL L 関数の関数等式の符号

斎藤 毅（東大数理）

0．主結果.

Xを $\mathbb{Q}$ 上の射影非特異代数多様体とし, m を自然数とする. Hasse-Weil L 関数 $L(H^m(X),s)$ は

$$L(H^m(X),s)=\prod_{p\ \text{良}}\det(1-Fr_p\cdot p^{-s}:H^m(X_{\bar{\mathbb{Q}}},\mathbb{Q}_\ell))^{-1}$$
$$\times\prod_{p\ \text{悪}}\text{ある Euler 因子}$$

と定義される. ここで素数 p が良いとは,$X \bmod p$ が非特異であることとする. そのとき $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}}=\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の ℓ進 etale cohomology $H^m(X_{\bar{\mathbb{Q}}},\mathbb{Q}_\ell)$ への作用は, $\ell\neq p$ なら不分岐である. 従って $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ の生成元 p 乗写像の逆元 Fr_p の作用の固有多項式

$$\det(1-Fr_pt:H^m(X_{\bar{\mathbb{Q}}},\mathbb{Q}_\ell))$$

が定義される. Weil 予想により, これは素数 ℓのとり方によらず, $\mathbb{Z}$-係数である. さらに Weil 予想により, 右辺の無限積は $\mathrm{Re}\,s>\frac{m}{2}+1$ で絶対収束し正則関数を定める.

L 関数に Hodge 構造 $H^m(X(\mathbb{C}),\mathbb{R})$ が定めるΓ-因子をかけて

$$\Lambda(H^m(X),s)=L(H^m(X),s)\times\text{ある}\Gamma\text{-因子}$$

とおくと

予想. $L(H^m(X),s)$ は全 s 平面上の有理形関数に解析接続され, 関数等式

$$\Lambda(H^m(X),s)=\pm N^{\frac{m+1}{2}-s}\Lambda(H^m(X),m+1-s)$$

を満たす.

ここで Nは $H^m(X)$ の導手とよばれるある自然数で, 悪い素数のみを素因子として持つ. 上の符号を $H^m(X)$ の関数等式の符号と呼び, $w(H^m(X))$ とかく.

例. Xを楕円曲線 Eとし,$m=1$ とすると, Birch,Swinnerton-Dyer 予想は

$$w=(-1)^{\mathrm{rank}\,E(\mathbb{Q})}$$

を導く.

Poincaré 双対性と難 Lefschetz により $G_{\mathbb{Q}}$-同変な非退化双一次形式 $H^m(X)\times H^m(X)\to\mathbb{Q}(-m)$ が定まる. これは m が奇数なら交代形式で, 偶数なら対称形式である. 以下では

斎藤 毅（東大数理）

定理. m が偶数とし, Deligne の積公式の予想を認めれば

$$w(H^m(X)) = 1$$

となる.

を示す.

ここでは証明の方針だけを示す. 種々の定義等はあとで与える. 以下 $H^m(X)$ を M と略記する.

まず局所ϵ-因子の理論により, $\mathbb{Q}$ の各素点 p にたいし, 局所符号 $w_p(M) = \pm 1$ が定まり, 有限個の p を除いて $w_p(M) = 1$ となる. Deligne の積公式の予想は

$$w(M) = \prod_{p\ \text{素点}} w_p(M)$$

を導く. 従って相互法則

$$\prod_{p\ \text{素点}} w_p(M) = 1$$

を示せばよい.

十分よい素点 ℓを選び, $V_\ell = H^m(X_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)(\frac{m}{2})$ を考える. Poincaré 双対性と難 Lefschetz により直交表現

$$\rho_\ell : G_{\mathbb{Q}} \to O(V_\ell)$$

がえられる. $sw_2(\rho_\ell)$ をρ_ℓの第 2Stiefel-Whitney 類とする. 局所体の Brauer 群の構造により, 各素点 p にたいし $H^2(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}/2) \simeq \{\pm 1\}$ であるので, $sw_{2,p}(\rho_\ell) = \pm 1$ とみなす. すると平方剰余の相互法則より

$$\prod_{p\ \text{素点}} sw_{2,p}(\rho_\ell) = 1$$

となる.

従って各素点 p にたいし, $sw_{2,p}(\rho_\ell)$ と $w_p(M)$ を比較すればよい.

$p \neq \ell, \infty$. Deligne の定理より $sw_{2,p}(\rho_\ell) = w_p(M)$.

$p = \infty$. 直接計算して $sw_{2,\infty}(\rho_\ell) = w_p(M) \times (-1)^{h(M)}$. ここで $h(M) = \sum_{q > \frac{m}{2}} (q - \frac{m}{2}) \dim_{\mathbb{Q}} H^q(X, \Omega^{m-q})$.

$p = \ell$. p が良いとすると $w_p(M) = 1$. 従って

定理'. p が良くて $p \geq 2m + 2$ ならば $sw_{2,p}(\rho_p) = (-1)^{h(M)}$.

を示せば良い.

この定理は,

(1) $sw_{2,p}(\rho_p)$ を 2 次形式つき $\mathbb{Q}_p$-線形空間 $H^m(X_{\bar{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Q}_p)$ と $H^m_{dR}(X_{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ の Hasse-Witt 類と, 直交表現$\rho_p : G_{\mathbb{Q}_p} \to O(V_p)$ の spinor 類で表す.

(2) (1) の Hasse-Witt 類,spinor 類を, 具体的に Hodge 数を使って表し, 定理' の等式を確かめる

ことにより証明する.

(1) は $G_{\mathbb{Q}_p}$の表現 $H^m(X_{\bar{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Q}_p)$ が Hodge-Tate 表現であることと, 直交表現に対する Fröhlich の定理の Hodge-Tate 表現への拡張とから従う. (2) は $G_{\mathbb{Q}_p}$の表現 $H^m(X_{\bar{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Q}_p)$ が cristalline 表現であることと, その mod p 表現に対する Fontaine-Lafaille 理論を使って示す.

1. 局所体の Galois 群の ℓ進表現.

K を剰余体 F が有限の完備離散付値体とし, p を F の標数とし q を F の位数とする. K の絶対 Galois 群 $G_K = \mathrm{Gal}(K^{sep}/K)$ は次のような filtration を持つ

$$1 \subset P \subset I \subset G_K.$$

ここで $I = \mathrm{Gal}(K^{sep}/K^{nr}), P = \mathrm{Gal}(K^{sep}/K^{tr})$ はそれぞれ K の最大不分岐拡大 K^{nr}, 最大馴分岐拡大 $K^{tr} = K^{nr}(\pi^{1/m}, p \nmid m, \pi$は K の素元) に対応する部分群である. 各商群には標準同型

$$G/I \simeq G_F = \mathrm{Gal}(F^{sep}/F), \quad I/P \simeq \varprojlim_{p \nmid m} \mu_m(F^{sep}) = \prod_{p' \neq p} \mathbb{Z}_{p'}(1)$$

があり,P は pro-p 群である.

$G_K^{ab} = \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$ を G_Kの abel 化とすると, 局所類体論の写像 $K^\times \to G_K^{ab}$ が定義される. 図式

$$\begin{array}{ccc} K^\times & \longrightarrow & G_K^{ab} \\ {\scriptstyle 付値}\downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & G_F : 1 \mapsto Fr_F \end{array}$$

が可換になるようにする. ここで幾何的 Frobenius $Fr_F \in G_F$ は q 乗写像の逆である.

ℓを p と異なる素数とする. この節では G_Kの有限次元 ℓ進表現$\rho : G_K \to GL_{\mathbb{Q}_\ell}(V)$ に対し, その導手 a(V), 局所 L 因子 $L(V, t)$ および局所ϵ因子$\epsilon(V, \psi)$ の定義をする.

G_Kの ℓ進表現について, 基本的なのは次の定理である.

Monodromy 定理 (Grothendieck) $\rho : G_K \to GL_{\mathbb{Q}_\ell}(V)$ を G_Kの有限次元 ℓ進表現とすると, I のある開部分群 J と, べき零行列 $N \in End(V)$ で, $\sigma \in J$に対し

$$\rho(\sigma) = \exp(t_\ell(\sigma))$$

となるものが存在する.

ここで $t_\ell : J \to \mathbb{Z}_\ell$は $I/P \to \mathbb{Z}_\ell(1)$ に同型 $\mathbb{Z}_\ell(1) \simeq \mathbb{Z}_\ell$ を合成したものである.

V の Artin 導手 a(V) を

$$a(V) = \dim V - \dim V^I + swV$$

により定義する. これは作用の I への制限のみで定まる. V^Iは I による固定部分であり, Swan 導手 sw(V) は次のように定義される, 作用の P への制限のみで定まる自然数である. 上のような Jで I の正規部分群であるものをとり, L を対応する K^{nr}の有限次 Galois 拡大とし, G=I/J とおく. 関数 $Tr(\sigma : V)$ は G 上の関数を定める. G の Swan 指標を

$$sw(\sigma) = \begin{cases} -\mathrm{ord}_L(\sigma(\pi_L)/\pi_L - 1) & \sigma \neq 1 \\ \mathrm{length}_{\mathcal{O}_L}(\Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_{K^{nr}}}) - ([L : K^{nr}] - 1) & \sigma = 1 \end{cases}$$

により定義する. ここでπ_Lは L の素元で ord_Lは L の正規離散付値である. σが P の像に入らなければ $sw(\sigma)=0$ である. Swan 導手

$$sw(V)=\frac{1}{|G|}\Sigma_{\sigma\in G}sw(\sigma)Tr(\sigma:V)$$

は自然数となり, Jのとり方にはよらない.
すみませんが, 本文は次のページに続きます.

References

[D1] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionelles des fonctions L*, Modular functions of one variable II Lecture Notes in Math. 349 (1973), Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 501-597,.

[D2] ———, *Les constantes locales de l'équation fonctionelle de la fonction L d'Artin d'une représentation orthogonale*, Inventiones Math. **35** (1976), 299-316.

[D3] ———, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, Proceedings of Symp. in Pure Math. **33 part 2** (1979), AMS, Providence, 313-346.

[Fo] J.-M. Fontaine, Astérisque (1994), SMF, Paris.

[Fo-L] J.-M.Fontaine-G.Laffaille, *Construction de représentation p-adiques*, Ann. Scient. École Norm. Sup. 4e série, **15** (1982), 547-608.

[Fo-Ma] J.-M.Fontaine-B.Mazur, *Geometric Galois representation*, Proc. of Conf. on Ell. curves, (1995), ?.

[Fo-Me] J.-M. Fontaine-W.Messing, *p-adic periods and p-adic etale cohomology,*, Contemporary Math. vol 67 (1987), 179-207.

[Fr] A.Fröhlich, *Orthogonal representations of Galois groups, Stiefel-Whitney classes and Hasse- Witt invariants*, J. reine angew. Math. **360** (1985), 84-123.

[Fr-Q] A.Fröhlich-J.Queyrut, *On the functional equation of the Artin L-function for charcters of real representations*, Inventiones Math. **20** (1973), 125-138.

[S] T.Saito, *The sign of the functional equation of the L-function of an orthogonal motive,* Inventiones Math. (1995).

[S2] ———, *Hasse-Weil L* 関数の関数等式の符号, 数理研講究録 代数的整数論と数論的幾何学 **925** (1995).

[Se-1] J.-P. Serre, *Corps Locaux*, Hermann, Paris.

[Se-2] ———, *Zeta and L-functions*, Oeuvres no 64.

[Se-3] ———, *Facteurs locaux des fonctions zêta des varétés algebriques*, Oeuvres no 87.

[Se] J.-P. Serre, *Conducteurs d'Artin des caracteres réels*, Inventiones Math. **14** (1971), 173-183.

[W] N.Wach, *Représentation p-adiques cristallines du groupe de Galois d'un corps local*, these à Orsay.

$$\mathrm{Sw}(V)=0 \Leftrightarrow V\text{への }P\text{の作用が自明}$$
$$a(V)=0 \Leftrightarrow V\text{への }I\text{の作用が自明}$$

である．VへのIの作用が自明であるときVは不分岐であるという．Monodromy定理で$I=J$ととれるとき．Vは半安定であるという．直交表現については次がなりたつ．

定理（Serre）．Vが直交表現でかつ $\det V \cong \mathbb{Q}_\ell$ のとき導手$a(V)$は偶数である．

局所L因子$L(V,t)\in \mathbb{Q}_\ell[t]$は

$$L(V,t)=\det(1-\mathrm{Fr}_F t ; V^I)^{-1}$$

と定義する

ℓ進表現のε因子を定義するために．まずWeil群W_Kの連続表現に対しε因子を定義する．W_Kを標準写像$G_K \to G_F = \hat{\mathbb{Z}}$による$\mathbb{Z}$の逆像とし．核$I\subset W_K$を開部分群とする位相をいれる　Cを標数0の代数閉体とする．（後で$\mathbb{C}$または$\bar{\mathbb{Q}}_\ell$にする）．局所体Kと有限次元連続表現$W_K \to GL_C(V)$と非自明加法的指標$\psi : K \to C^\times$の組に対し．ε因子

$$\varepsilon_K(V,\psi)\in C^\times$$

を次の条件(1)〜(3)で特徴づけられるものとして定義する．

(1)　完全系列

$$0\to V'\to V\to V''\to 0$$

に対し．

$$\varepsilon_K(V,\psi)=\varepsilon_K(V',\psi)\cdot\varepsilon_K(V'',\psi).$$

(1)により仮想表現（表現の形式的な差）$V=V_1-V_2$に対し

$$\varepsilon_K(V,\psi)=\varepsilon_K(V_1,\psi)\,\varepsilon_K(V_2,\psi)^{-1}$$

と定義できる.

(2) LをKの有限次分離拡大とし、VをW_Lの次元0の仮想表現とすると

$$\varepsilon_K(\mathrm{Ind}_{W_L}^{W_K}V,\psi)=\varepsilon_L(V,\psi\circ\mathrm{Tr}_{L/K}).$$

(3) $\dim V=1$とし$\chi:K^\times\to\mathbb{C}^\times$を局所類体論の同型$K^\times\to W_K^{ab}$によって$V$に対応する指標とすると$\varepsilon_K(V,\psi)$は次のように具体的に定義される.

(3)−1. χが不分岐（$\chi(\mathcal{O}_K^\times)=1$）のとき.

$$\varepsilon_K(\chi,\psi)=\chi(\mathrm{Fr}_F^{\mathrm{ord}\,\psi})\cdot q^{\mathrm{ord}\,\psi}$$

$\mathrm{ord}\,\psi$とは$\psi(m_K^{-n})=1$となる最大の整数nである.

(3)−2. χが分岐するとき.

$$\varepsilon_K(\chi,\psi)=\int_{K^\times}\chi^{-1}(x)\cdot\psi(x)\,dx$$

$$\stackrel{\mathrm{def}}{=}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{\mathrm{ord}\,x=n}\chi^{-1}(x)\cdot\psi(x)\,dx.$$

ここで積分は、compact集合$\{x\in K^\times\mid \mathrm{ord}\,x=n\}$上の局所定数関数の値に体積$\mathrm{vol}(a+m_K^{-n})=q^n$をかけて和をとったものである.

指標$\chi:K^\times\to\mathbb{C}^\times$に対し、対応する$W_K$の1次元表現$V_\chi$の導手$a(\chi)=a(V_\chi)$は

$$a(\chi)=\begin{cases}0 & \chi\ \text{不分岐}\\ \chi(1+m^n)=1\ \text{となる最小の}\ n & \chi\ \text{分岐}\end{cases}$$

で与えられる．χが分岐するとき，指標の直交関係より，$n\neq-(\mathrm{ord}\,\psi+a(\chi))$ ならば 積分 $\int_{\mathrm{ord}\,x=n}\chi^{-1}(x)\cdot\psi(x)dx$ は0となるのでε-因子は

$$\varepsilon_K(\chi,\psi)=\int_{\mathrm{ord}\,x=-\mathrm{ord}\,\psi+a(\chi)}\chi^{-1}(x)\cdot\psi(x)\,dx$$

である．

上の(1)～(3)が特徴づけであることを見よう．(1)より単純なVについて考えればよい．$\varphi\in W_K$ で $\mathbb{Z}$ での像が1となるものをとると，Fのある巾は像 $W_K\to GL(V)$ の中心にはいるから，Vが単純ならそれは定数倍で作用する．従って W_K の不分岐な指標αと W_K の有限な商Gをとおる表現V'で

$$V\simeq\alpha\otimes V'$$

となるものがある．Braunerの定理の強い形により

$$V\simeq\alpha^{\oplus\dim V}+\alpha\otimes\sum_i \mathrm{Ind}_{W_{L_i}}^{W_K}(\chi_i-1)$$

と表わせる．(3)と(2)により右辺のε因子は定まるから，特徴づけになっていることがわかる．

ε因子の変種を $\varepsilon_0(V,\psi)$ を

$$\varepsilon(V,\psi)=\det(-\mathrm{Fr}_F:V^I)^{-1}\varepsilon_0(V,\psi)$$

により定義する．εと ε_0 の関係は a と sw の関係にあたる．

ε因子は次の性質を持つ

1. V 不分岐とすると

$$\varepsilon(V,\psi) = \det(\mathrm{Fr}_F^{\mathrm{ord}\psi}; V)\, q^{\mathrm{ord}\psi \cdot \dim V}$$

より一般に

$$\varepsilon(V\otimes W,\psi) = \det(\mathrm{Fr}^{\mathrm{ord}\psi\cdot\dim W + a(W)}; V) \times \varepsilon(W,\psi)^{\dim V}$$

2. V 順分岐とし，$\mathrm{ord}\psi = -1$ とすると，$\varepsilon_0(V,\psi)$ は制限 $\mathrm{Res}_{I_K}^{G_K} V$ と $\psi_0 = \psi|_{O_K} : F \to \mathbb{C}^\times$ にしかよらない．V を単純とし $\dim V = f$ とすると，$\mathrm{Res}_I^{G_K} V$ は $\mathbb{F}_{q^f}^\times = \mu_{q^f-1}$ の指標 χ によって $\bigoplus_{i=0}^{f-1} \chi^{(q^i)}$ と表わされ，

$$\varepsilon_0(V,\psi) = (-q)^{-f} \sum_{x\in\mathbb{F}_{q^f}^\times} \chi^{-1}(x)\,\psi_0(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^f}/\mathbb{F}_q} x)$$

となる．

3. $\dim V = 1$ とし対応する $K^\times$ の指標を χ とする．導手 $a(\chi) \geqq 2$ と仮定する．$a(\chi) = 2m$ または $2m+1$ とおく．p は 2 でないとする．$x \in m_K^n$ に対し

$$\chi(1+x) = \psi\left(y_0\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right)$$

となる付値が $-(\mathrm{ord}\,\psi + a(\chi))$ である $K^\times$ の元 y_0 をとる．$u \in O_K^\times$，$x \in m_K^m$ に対し

$$\chi^{-1}(y_0 u(1+x))\,\psi(y_0 u(1+x))$$
$$= \chi^{-1}(y_0 u)\,\psi(y_0 u)\,\psi\left(y_0\left((u-1)x - \frac{x^2}{2}\right)\right)$$

なので，

指標の直交関係より

$$\varepsilon(\chi, \psi) = \int_{y_0 U^m} \chi^{-1}(x) \cdot \psi(x)\, dx$$

$U^m = 1 + m_K^m$ となる．さらに．上の式を代入すると

$$\varepsilon(\chi, \psi) = \chi^{-1}(y_0)\psi(y_0) \cdot q^{\mathrm{ord}\psi} \begin{cases} q^{\frac{a(\chi)}{2}} & a(\chi)\ \text{偶数} \\ G \cdot q^{\frac{a(\chi)-1}{2}} & a(\chi)\ \text{奇数} \end{cases}$$

がえられる．ここで G は２次の Gauss 和

$$G = \sum_{m_K^m / m_K^{m+1}} \psi\left(-y_0 \frac{x^2}{2}\right)$$

であり $G^2 = \left(\frac{-1}{q}\right) q = \left(\left(\frac{-1}{p}\right) p\right)^d$ ，$(q = p^d)$ をみたす．

4． $\mathrm{Hom}(K, \mathbb{C}^\times)$ は自然に K－線型空間の構造をもつ．

$$\varepsilon(V, a\psi) = \det V(a)\, q^{-\mathrm{ord}\, a \dim V} \varepsilon(V, \psi)$$

5． $\varepsilon(V, \psi) \cdot \varepsilon(V^*, \psi) = \det V(-1) \cdot q^{a(V) + 2\dim V \cdot \mathrm{ord}\psi}$

$C(m)$ を不分岐指標 $Fr \mapsto q^{-m}$ に対応する表現とし $V(m) = V \otimes C(m)$ とする．１より

$$\varepsilon(V(m), \psi) = q^{-m(\mathrm{ord}\psi \cdot \dim V + a(V))} \cdot \varepsilon(V, \psi)$$

なので $V^* \simeq V(m)$ なら

$$\varepsilon(V, \psi)^2 = \det V(-1)\, q^{(m+1)a(V) + (m+2)\dim V\ \mathrm{ord}\psi}$$

となる．V を W_K の直交表現とし $\det V \cong \mathbb{C}$ とすると．Serre の定理により $a(V)$ は偶数だから $\varepsilon_K(V, \psi) = \pm q^{\frac{a(V)}{2} + \dim V \cdot \mathrm{ord}\psi}$ となる．この符号は４より ψ のとり方によらないのでこれを $w_K(V)$ と書く

定理 (Deligne) $sw_2(V) \in H^2(K, \mathbb{Z}/2) = \{\pm 1\}$ を直交表現Vの第2 Stiefel-Whitney 類とすると

$$w_K(V) = sw_2(V)$$

ここで第2 Stiefel-Whitney 類とは で定義される中心拡大

$$1 \to \mu_2 \to \mathcal{S}(V) \to O(V) \to 1$$

の $W_K \to O(V)$ によるひきもどしの類のことである．

ℓ進表現のε因子は次のように定義する．VをG_Kのℓ進表現とし$\psi : G_K \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$を非自明加法的指標とする．局所$\varepsilon$因子はまず$\varepsilon_0(V, \psi) = \varepsilon_0(V', \psi)$とおいて

$$\varepsilon(V, \psi) = \det(-Fr_F : V^I)^{-1}\varepsilon_0(V, \psi)$$

により定義する．ここでV'は monodromy 定理にでてきたNを使って$V' = \bigoplus_i \mathrm{Ker}\,N^i/\mathrm{Ker}\,N^{i-1}$とおいた．$W_K$は自然に各$\mathrm{Ker}\,N^i/\mathrm{Ker}\,N^{i-1}$，$V'$へ作用する．この表現が$\mathbb{Q}$上有理的なら加法的指標$\psi : K \to \mathbb{C}^\times$に対しL因子$L(V, t) \in \mathbb{C}(t)$ ε-因子$\varepsilon(V, \psi) \in \mathbb{C}^\times$が定義される．$\ell$進直交表現については上と同様に．

系 VをG_Kの直交ℓ進表現とし $\det V = 1$とする．

1．導手 $a(V)$は偶数であり．

2．符号 $w(V)$は第2 Stiefel-Whitney 類 $sw_2(V)$と等しい．

2. Hodge構造.

$K=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする. K上の重さ n の pure ($\mathbb{R}$-)Hodge 構造とは

1. $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/K)$ の作用を持つ有限次$\mathbb{R}$線型空間 V,
2. 有限減少 filtration F を持つ有限次K線型空間 D
3. $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/K)$ の作用を保つ$\mathbb{C}$線型空間の同型.

$$V\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \longrightarrow D\otimes_K\mathbb{C}.$$

の組で, Hodge分解

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=n} F_{\mathbb{C}}^{p}\cap\overline{F_{\mathbb{C}}}^{q}$$

を満たすもののことである.

3で $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/K)$ の作用は左辺では V と $\mathbb{C}$ の両辺, 右辺では $\mathbb{C}$ のみに作用する. $F_{\mathbb{C}}^{p}\subset V_{\mathbb{C}}$ は $F^p\otimes_K\mathbb{C}$ の3の同型による像であり $\overline{F_{\mathbb{C}}}^{q}$ は $F_{\mathbb{C}}^{q}$ の $V_{\mathbb{C}}$ での複素共役である. $H^{p,q}=F_{\mathbb{C}}^{p}\cap\overline{F_{\mathbb{C}}}^{q}$ とおく.

K上のHodge構造Vに対しそのL-因子(Γ-因子ともよぶ)とε-因子を定義する. ~~あああ~~ L因子は,

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2).$$

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)$$

を平行移動したものの積として定義される.

$h^{p,q}=\dim H^{p,q}$ とする. $K=\mathbb{R}$のときは複素共役$F_\infty\in\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ が同型 $H^{p,q}\to H^{q,p}$ を定めるので $h^{p,q}=h^{q,p}$ と

なる．さらに$n=2p$が偶数のときには．$H^{p,p}$は$\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$の表現となるので

$$H^{p,+}=\{a\in H^{p,p}\mid F_\infty(a)=(-1)^p a\}$$
$$H^{p,-}=\{a\in H^{p,-}\mid F_\infty(a)=(-1)^{p+1}a\}$$

とし．$h^{p,\pm}=\dim H^{p,\pm}$とおく．

$K=\mathbb{R},\mathbb{C}$上の$\mathbb{R}$-Hodge構造Vに対し．そのL因子は

$$L_{\mathbb{R}}(V,s)=\prod_{p<q}\Gamma_{\mathbb{C}}(s-p)^{h^{p,q}}$$
$$\times\Gamma_{\mathbb{R}}(s-p)^{h^{p,+}}\cdot\Gamma_{\mathbb{R}}(s-p+1)^{h^{p,-}}\quad n=2p.$$

$$L_{\mathbb{C}}(V,s)=\prod_{p+q=n}\Gamma_{\mathbb{C}}(s-\min(p,q))^{h^{p,q}}$$

で定める．また標準的な加法的指標$\psi_K:K\to\mathbb{C}^\times$，$\psi_K(x)=\exp(2\pi i\,\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{R}}(x))$に対しε因子を．

$$\varepsilon_{\mathbb{R}}(V,\psi_{\mathbb{R}})=\prod_{p<q}i^{(q-p+1)h^{p,q}}$$
$$\times\ i^{h^{p,-}}\qquad n=2p$$

$$\varepsilon_{\mathbb{C}}(V,\psi_{\mathbb{C}})=\prod_{p+q=n}i^{|p-q|h^{p,q}}$$

とおく．Vが直交Hodge構造：すなわち．非退化対称双一次形式$V\times V\to\mathbb{R}$でHodge構造を保つものを持ちかつ$\det V\cong\mathbb{R}$である場合を考える．このとき$h^{p,q}=h^{q,p}$である．さらに$K=\mathbb{R}$の場合にはF_∞の固有値-1の重複度$s=h^{p,-}+\sum_{p<q}h^{p,q}$は偶数となるから．ε-因子は$\pm1$であり．それを$w_K(V)$と書くことにすると

$$w_{\mathbb{R}}(V) = \prod_{q>0} (-1)^{q h_1^{q,-q}} \times (-1)^{\frac{S}{2}}$$

$$w_{\mathbb{C}}(V) = 1$$

となる.

3. Motive.

Kを代数体とする. K上の$\mathbb{Q}$係数の重さnのpure motiveの実現$V=((V_\ell)_\ell, (V_v)_v, D)$とは各素数$\ell$に対する$G_K$の$\mathbb{Q}_\ell$-表現$V_\ell$と$K$の各無限素点$v$に対する$K_v$上のHodge構造$V_v$と有限減少filtrationつき有限次$K$線型空間$D$の組で, 代数幾何的に定義されるもののことをいう. この節と§5ではこのように多少あいまいないい方や, これから述べるmotiveの性質のようにまだ一般には予想でしかないものもでてくる.

例1 $\mathbb{Q}(m)$ mは整数. $V_\ell = \mathbb{Q}_\ell(m)$は$\ell$-円分指標の$m$乗に対応する$\ell$進表現. $D=K$. $F^{-m}D=D$. $F^{-m+1}D=0$であり. V_v はHodge構造$\mathbb{R}(m)$. すなわちV_vは標準射$\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v) \hookrightarrow \{\pm 1\}$の$m$乗に対応する$\mathbb{R}$表現. $D_v = K_v \otimes D$, Hodge構造を定める同型 $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq K_v \otimes_{K_v} \mathbb{C}$ は$\mathbb{C}$のidentity.

$\mathbb{Q}(m)$の重さは$-2m$である.

例2. XをK上のproper smooth代数多様体とし, mを自然数とするとき $H^m(X)$. $V_\ell = H^m_{et}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$への自然な$G_K$の表現. $D=H^m_{dR}(X/K)$とそのHodge filtration.

$V_v = H^m(X(K_v), \mathbb{R})$ で同型 $V_v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq D \otimes_K \mathbb{C}$ は de Rham の同型. $H^m(X)$ の重さは m.

Motive は一般に次の性質をみたすと考えられる. $\mathbb{Q}(m)$ の場合は自明であり, $H^m(X)$ についてはそのかなりの部分は Weil 予想から従う.

K の(有限)素点の有限集合 Σ で Σ にはいらない有限素点に対しては V が良い reduction を持つようなものが存在する. v を Σ にはいらない K の有限素点とすると, $v \nmid \ell$ なら G_K の ℓ 進表現 V_ℓ の G_{K_v} への制限は不分岐であり、さらに固有多項式 $P_v(t) = \det(1 - Fr_v t \mid V_\ell)$ は $\mathbb{Q}[t]$ にはいり ℓ によらない. これより. L 因子.

$$L_v(V, t) = \det(1 - Fr_v t : V_\ell)^{-1} \in \mathbb{Q}(t)$$

は ℓ によらず定義される. さらに加法的指標 $\psi_{K_v} : K_v \to \mathbb{C}^\times$

$$\psi_{K_v} = \exp(-2\pi i \operatorname{Tr}_{K_v/\mathbb{Q}_p} x)$$

とする. ここで $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と同一視した. §1 の ε-因子の定義より

$$\varepsilon_{K_v}(V, \psi_{K_v}) = \det(Fr_v^{D(K_v/\mathbb{Q}_p)}, V) \times N v^{-D(K_v/\mathbb{Q}_p) \cdot \dim V} \in \mathbb{Q}^\times$$

となる. ここで $D(K_v/\mathbb{Q}_p)$ は K_v の共役差積の付値である.

より一般に v を有限素点とする. $N \in \operatorname{End}(V_\ell)$ を I_v の V_ℓ への作用が monodromy 定理により定める巾零作用素とする.

$\mathrm{Ker}\,N^i/\mathrm{Ker}\,N^{i-1}$ へのWeil群W_Kの自然な作用は$\mathbb{Q}$上有理的であり、ℓによらない。これよりL因子

$$L_v(V,t) = \det(1-\mathrm{Fr}_v t : V_\ell^{I_v})^{-1}$$

は$\mathbb{Q}(t)$にはいり、ℓによらない。また導手$a_v(V)=a_v(V_\ell)\in\mathbb{N}$も$\ell$によらない。さらに上の加法的指標$\psi_{K_v}: K_v\to\mathbb{C}^\times$に対し、$\varepsilon$-因子

$$\varepsilon_{K_v}(V,\psi_{K_v}) = \det(-\mathrm{Fr}_v | V_\ell^{I_v})^{-1}\cdot\prod_i \varepsilon_{0K_v}(\mathrm{Ker}\,N^i/\mathrm{Ker}\,N^{i-1};\psi_{K_v})$$

$\in\mathbb{C}^\times$もℓによらない。

一方無限素点vに対しては、L因子、ε因子

$$L_v(V,s) = L_{K_v}(V,s)$$
$$\varepsilon_v(V) = \varepsilon_{K_v}(V_v,\psi_{K_v})$$

がK_v上のHodge構造により定義される。ここで$\psi_{K_v}: K_v\to\mathbb{C}^\times$は$\psi_{K_v}(x) = \exp(2\pi i\,\mathrm{Tr}_{K_v/\mathbb{R}}\,x)$である。各$v$に対しHodge構造のfiltered K_v線型空間D_vはK線型空間DのK_vへの係数拡大である。よってHodge数$h_v^{p,q}$はDだけで定まる。またG_{K_v}の表現V_vはV_ℓのG_{K_v}への制限と同型である（したがって$h_v^{p,I}$はDと1つのV_ℓとで定まる。よってL因子ε因子はDと1つのV_ℓで定まる。

Motive VのL関数$L(V,s)$を次のように定める。各有限素点vについては$v\notin\Sigma$なら

$$L_v(V,t) = \det(1-\mathrm{Fr}_v t ; V_\ell)^{-1}\in\mathbb{Q}_\ell(t)$$

とおく．一般の有限素点 v に対しては

$$L_v(V,t) = \det(1-\mathrm{Fr}_v t ; V_\ell^{I_v})^{-1} \in \mathbb{Q}_\ell(t)$$

とおく．無限素点 v については

$$L_v(V,s) = L_{K_v}(V_v, s)$$

とする．$L(V,s)$ は

$$L(V,s) = \prod_{v:\text{有限素点}} L_v(V, Nv^{-s})$$

と定義する．さらに完備化された L 関数を

$$\Lambda(V,s) = L(V,s) \times \prod_{v:\text{無限素点}} L_v(V,s)$$

と定義する．

ε-因子は次のように定義する．K_v の加法的指標 $K_v \to \mathbb{C}^\times$ を

$$\psi_{K_v} = \begin{cases} \exp(-2\pi i(\mathrm{Tr}_{K_v/\mathbb{Q}_p} \bmod \mathbb{Z}_p)) & v \text{ 有限} \\ \exp(2\pi i\, \mathrm{Tr}_{K_v/\mathbb{R}}) & v \text{ 無限} \end{cases}$$

とおく、有限素点については $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ を同型 $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ により $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の部分群と同一視する．§1 と §2 でそれぞれ有限素点と無限素点に対し局所 ε-因子を定義したので

$$\varepsilon_v(V) = \varepsilon_{K_v}(V, \psi_{K_v})$$

とおく．大域 ε-因子 $\varepsilon(V) \in \mathbb{C}^\times$ を

$$\varepsilon(V) = \prod_{v:\text{全素点}} \varepsilon_v(V) \times D_K^{-\frac{1}{2}\dim V}$$

と定義する．D_K は K の $\mathbb{Q}$ 上の判別式の絶対値である．右辺は有限素点 v で K が $\mathbb{Q}$ 上不分岐かつ V 不分岐なら $\varepsilon_v(V)=1$ であるので有限積である

Vの導手$f(V)$をO_Kの整ideal $\prod_{v\in\Sigma} p_v^{a_v(V)}$とし$Nf(V)$をそのノルム$\in\mathbb{N}$とする.

Σにはいらない有限素点vに対しては$P_v(t)$はWeil予想を満たすと考えられる. つまり$P_v(t)=\prod_i(1-\alpha_{i,v}t)$としたとき$|\alpha_{v,i}|=q^{\frac{w}{2}}$となる. すると L関数$L(V,s)$は右半平面$\mathrm{Re}\,s>\frac{w}{2}+1$で絶対収束し そこで正則関数を定める.

L関数は次のような関数等式を満たすと予想される.

予想. $L(V,s)$は全s平面上の有理形関数を定め 関数等式

$$\Lambda(V,s)=\varepsilon(V)\cdot(Nf(V)\cdot D_K^{\dim V})^{-s}\Lambda(V^*,1-s)$$

を満たす

ここでV^*はVの双対motiveである.

例. Vがpotentially CM motiveまたは $GL_2(K)$ (Kは総実代数体)の保型形式からくる時は予想は正しい.

局所ε因子の性質5により

Vが$V^*(1)$と同型であれば $\varepsilon(V)=\pm(Nf(V)\cdot D_K^{\dim V})^{\frac{w+1}{2}}$

となる. この符号を$w(V)$と書く.

局所ε因子の性質①により $w(V)$ はTate twistで変わらない
$w(V)=w(V(n))$。よって ~~ ~~ m が偶数ならば ~~ ~~
V を $V(\frac{m}{2})$ でおきかえてはじめから $m=0$ の場合を考えればよ
い。さらに $m=0$ かつ $\dim V=1$ であれば、$w(V)$ は G_K の
位数が1の2の1次指標のL関数の関数等式の符号であるの
でそれは $+1$ である。よって V の ~~ ~~ $V\oplus\det V$ でおきか
えることにより、$\det V\simeq\mathbb{Q}$ の場合を考えればよい。

V を直交motiveで重さが m であるとする。すなわち、非
退化対称な1次形式 $V\times V\to\mathbb{Q}(-m)$ が与えられていると
する。このとき V' を上のようにして得られる重さ0、$\det V$
$\simeq\mathbb{Q}$ の直交motiveとすると、$w(V)=w(V')$ である。さら
に、V' については各素点 v に対し局所符号 $w_v(V')=\pm1$ では
とんどすべての素点で1となるものが、§1 §2で有限素点
無限素点についてそれぞれ定義されている。$w(V')$ の定義に
より $w(V')=\prod_{v:\text{全素点}}w_v(V')$ である。したがって $w_v(V)=w_v(V')$
とおけば

$$w_v(V)=\prod_{v:\text{全素点}}w_v(V)$$

がえられる。

4. p進Hodge理論 (crystalline $e=1$).

Kを$\mathbb{Q}_p$の有限次拡大としK_0をK内の$\mathbb{Q}_p$の最大不分岐拡大とする. まず環A_{cris}, B_{cris}を定義する.

$C=\hat{\bar{K}}$とし$\mathcal{O}_C$をその整数環とする. $R=\varprojlim \mathcal{O}_C/p$とするここでtransition mapはp乗写像である. Rは集合としては$\varprojlim \mathcal{O}_C$と等しい. ここでtransition mapはやはりp乗写像である. $W(R)$をRのWitt vectorの環とする. $W(R)$は集合としては無限積$R^{\mathbb{N}}$であり, 演算は多項式$S_i, P_i \in \mathbb{Z}[X_0, \dots X_i, Y_0, \dots, Y_i]$を用いて

$$(x_0, x_1, \cdots \quad) + (y_0, y_1, \cdots \quad) = (S_0(x_0, y_0), S_1(x_0, x_1, y_0, y_1), \cdots \quad)$$

$$(x_0, x_1, \cdots \quad) \times (y_0, y_1, \cdots \quad) = (P_0(x_0, y_0), P_1(x_0, x_1, y_0, y_1), \cdots \quad)$$

で定める. S_i, P_iは帰納的に

$$S_0^{p^i} + pS_1^{p^{i-1}} + \cdots + p^i S_i = X_0^{p^i} + pX_1^{p^{i-1}} + \cdots + p^i X_i + Y_0^{p^i} + pY_1^{p^{i-1}} + \cdots + p^i Y_i$$

$$P_0^{p^i} + pP_1^{p^{i-1}} + \cdots + p^i P_i = (X_0^{p^i} + pX_1^{p^{i-1}} + \cdots + p^i X_i)(Y_0^{p^i} + pY_1^{p^{i-1}} + \cdots + p^i Y_i)$$

で定める. $x \in R$の$\varprojlim \mathcal{O}_C$での像を$(x^{(0)}, x^{(1)}, \cdots \quad)$と書く. $\theta: W(R) \to \mathcal{O}_C : (x_0, x_1, \cdots) \mapsto \sum p^n x^{(n)}$は環の準同型で核は単項idealである. $\mathrm{Ker}\,\theta = (\xi)$とおく.

環 A_{cris} は $W(R)$ の PD 包．$W(R)[\xi^n/n!;\ n\in\mathbb{N}]$ の p 進完備化である。$\mathbb{Z}_p(1)\subset \varprojlim \mathcal{O}_C$ により $\mathbb{Z}_p(1)\subset R$ とみなす，ε を $\mathbb{Z}_p(1)$ の生成元とし $[\varepsilon]=(\varepsilon,0,\ldots,0)\in W(R)$ を Teichmuller lifting とする．$\theta([\varepsilon])=1$ であるから $t=\log[\varepsilon]=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}(i-1)!\dfrac{([\varepsilon]-1)^i}{i!}\in A_{cris}$ となる．$B^+_{cris}=A_{cris}[\frac{1}{p}]$．$B_{cris}=B^+_{cris}[\frac{1}{t}]$ とおく．

A_{cris}．B_{cris} は自然な G_K-作用をもつ．また R の p 乗写像は A_{cris}．B_{cris} の Frobenius φ を誘導する．A_{cris}，B_{cris} の filtration を次のように定める．まず $\mathrm{Fil}^r B^+_{cris}$ を $\xi^m/m!$ $m\geq r$ が生成する B^+_{cris} の ideal の閉包とする．A_{cris} の filtration は $\mathrm{Fil}^r A_{cris}=\mathrm{Fil}^r B^+_{cris}\cap A_{cris}$ で定める．B_{cris} の filtration は $\mathrm{Fil}^r B_{cris}=\bigcup t^{-i}\,\mathrm{Fil}^{r+i}B^+_{cris}$ で定める．

V を G_K の有限次元 p 進表現とする．$D(V)=(B_{cris}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)^{G_K}$ とおく．$B_{cris}^{G_K}=K_0$ であるので $D=D(V)$ は K_0 線型空間となるが，これは有限次元で $\dim_{K_0}D\leq\dim_{\mathbb{Q}_p}V$ である．ここで等式がなりたつとき V は cristalline 表現であるという．このとき．$B_{cris}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V\simeq B_{cris}\otimes_{K_0}D$ となる．B_{cris} の Frobenius φ は D の Frobenius φ を誘導する．σ を K_0 の Frobenius とすると φ は σ-linear である．さらに $K=K_0$ のときは D に B_{cris} ~~が誘導す~~ の filtration が誘導する ~~Frobenius~~ filtration を考える．V が cristalline であれば $V=\mathrm{Fil}^0(D\otimes B_{cris})^{\varphi=1}$ となり

VはFrobeniusを持つfiltered加群Dから回復される．ここで$D\otimes B_{cris}$のfiltrationはDのfiltrationとB_{cris}のfiltrationの$\otimes$積であり，$\varphi=1$は$\{x \mid \varphi(x)=x\}$を意味する．

VをG_Kのcrystalline p進表現とする．VのL因子，ε因子は対応する$D=D(V)$が定めるWeil群W_Kの不分岐な表現のL因子，ε因子として定義する．Kの剰余体Fの位数をp^dとする．DのFrobenius φはσ-linearだったから，φ^dはK_0線型になる．そこでFr_Fの作用をφ^dと定めることにより，Weil群W_Kの不分岐なK_0表現Dがえられる．L-因子は

$$L_K(V,t) = \det(1-\varphi^d t : D)^{-1} \in K_0[t].$$

となる．加法的指標ψに対し，ε-因子は

$$\varepsilon_K(V,t) = \det(\varphi^{d\cdot \mathrm{ord}\psi}; D)\cdot q^{\mathrm{ord}\psi\cdot\dim V} \in K_0^\times$$

となる．

5. Motiveとp進Hodge

Kを代数体とし，VをK上のmotiveの実現，Σをその外でVがgood reductionをもつような有限素点の有限集合とする．vをΣにはいらない有限素点とする．すると$v|p$に対し，G_{K_v}のp進表現V_pはcrystalline表現になる．さらに固有多項式$\det(1-\varphi^d t; D(V_p))$は$\mathbb{Q}$係数であり，$p\neq \ell$に対する$\det(1-Fr_v t; V_\ell)$と一致すると考えられる．

よってL因子、ε因子はV_pにより定義してもV_ℓにより定義しても同じものがえられる。したがって有限素点に対しては、$v \nmid p$ならば$v \notin \Sigma$となる素数pをとれば、L因子、ε因子はすべてG_Kのp進表現V_pのみで定まる。

無限素点についても、L因子、ε因子は上のpが、pの上にある素点v_0で不分岐なものを持てば、次のようにV_pだけで定まる。Vのde Rham実現Dは有限減少filtrationをもつK線型空間であり、各無限素点vでのHodge構造に現れる有限減少filtrationを持つK_v線型空間はDのK_vへの係数拡大である。一方v_0を上のような素点とすると、~~$D(\ell) \neq D(V_p)$~~ 有限減少filtrationを持つK_{v_0}線型空間$D_{v_0} = D(V_p) = (B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_p)^{G_{K_{v_0}}}$は$D$の$K_{v_0}$への係数拡大である。したがって各無限素点でのHodge数$h_v^{p,q}$は素点によらず、それはD_{v_0}のfiltrationから定まるものに一致する。さらに各実素点vに対し複素共役F_vのV_vへの作用の固有値(-1)の重複度はV_pへの作用の(-1)の重複度と一致するので、重さwが偶数のときの$h_v^{\frac{w}{2},\pm}$もV_pから定まる。L因子、ε因子はHodge数$h_v^{p,q}$, $h_v^{\frac{w}{2},\pm}$で定まるから、各無限素点に対してもL因子、ε因子はただ1つのp進表現V_pだけで定まることがわかった。

これで定理の正確な定式化を与えることができる。

定理　m を偶数とし，V を $G_{\mathbb{Q}}$ の有限個の有限素点を除いて不分岐な p 進表現で，非退化な対称双1次形式 $V \times V \to \mathbb{Q}_p(-m)$ を持つものとする．V の $G_{\mathbb{Q}_p}$ への制限は crystalline とし，さらに $D = D(V) = (B_{cris} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_{\mathbb{Q}_p}}$ の filtration は $Fil^{\frac{m}{2}+\frac{p-1}{2}} = 0$ をみたすとする．このとき $p \neq 2$ ならば

$$\prod_{v:\ \mathbb{Q}\text{の素点}} w_v(V) = 1$$

となる．

~~他~~§0 と全く同様の議論により，これは次の定理から従う．

定理′　V を $G_{\mathbb{Q}_p}$ の有限次直交表現で crystalline とする．$D = D(V)$ の filtration は $Fil^{\frac{p-1}{2}} = 0$ をみたすとする．$t(D) = \sum_{q>0} q \dim Gr^q(D)$ とおくと $p \neq 2$ ならば

$$sw_2(V) = (-1)^{t(D)}$$

6．2次形式と直交表現．

K を標数が2でない体とし，V を有限次元 K 線型空間とし $q: V \to K$ を非退化な~~非退化対称双一次形式~~2次形式とし，$b(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$ を対応する対称双一次形式とする．V の直交基底 $(x_1, \ldots, x_n)$ をとり $a_i = q(x_i)$ とおく．V の判別式 $\prod_{i=1}^{n} a_i \in K^\times / K^{\times 2} = H^1(K, \mathbb{Z}/2)$ を V の第1 Hasse-Witt 類とよび $hw_1(V)$ と書く．第2 Hasse-Witt 類 $hw_2(V) \in$

内積空間の mod 2 Chern 類を splitting principle で定めている

$$hw(D) = 1 + hw_1(V) + hw_2(V) \in \bigoplus_{i=0}^{2} H^i(K, \mathbb{Z}/2)$$

$H^2(K, \mathbb{Z}/2)$ は $\sum_{i<j}\{a_i, a_j\}$ と定義される。ここで $\{a_i, a_j\}$ は $a_i, a_j \in H^1(K, \mathbb{Z}/2)$ の cup積 $a_1 \cup a_2$ である。Dをもう1つの（非退化）2次形式をもつK線型空間としたとき

$$hw_2(D-V) = hw_2(D) + hw_2(V) + (hw_1(D) - hw_1(V))hw_1(V)$$

とおく。（これは仮想 mod 2 Chern 類 $hw(D-V) = hw(D)hw(V)^{-1}$）

(V, q) の Clifford環 $Cl(V)$ を

$$Cl(V) = \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V^{\otimes n}\right) \Big/ (x\otimes x - q(x) ; x \in V)$$

と定義する。$\dim Cl(V) = 2^{\dim V}$ である。Clifford群 $C(V)^\times$ を

$$C(V)^\times = \{x \in Cl(V)^\times \mid x \text{ は odd または even かつ } IxVx^{-1} = V\}$$

とおく。ここで $Cl(V) = Cl(V)^+ \oplus Cl(V)^-$ と直和に書いたとき $x \in Cl(V)$ が odd (resp. even) とは $x \in Cl(V)^-$ (resp. $x \in Cl(V)^+$) となることであり、x odd なら $Ix = -x$、x even なら $Ix = x$ である。$t : Cl(V) \to Cl(V)$ を V の identity が誘導する anti-involution とすると $N(x) = {}^t x \cdot x$ は準同型 $N : C(V)^\times \to K^\times$ を定める。$\tilde{O}(V)$ を $\operatorname{Ker} N$ とする。$O(V)$ は鏡映により生成されるので $C(V)^\times \to O(V) ; x \mapsto (v \mapsto Ix \cdot vx^{-1})$ は全射である。この核は $K^\times$ に一致する。これより完全列

$$1 \to \{\pm 1\} \to \tilde{O}(V) \to O(V)$$

をえる. $\{\pm 1\}$ は $\tilde{O}(V)$ の中心にはいり, $\tilde{O}(V) \to O(V)$ は K が分離閉なら全射である. したがってその時は中心拡大

$$1 \to \{\pm 1\} \to \tilde{O}(V) \to O(V) \to 1$$

が得られる. これから定まる Galois cohomology の連結準同型

$$sp : O(V) \to H^1(K, \mu_2) = K^\times/K^{\times 2}$$

を spinor norm という. これは図式

$$\begin{array}{ccc} C(V)^\times & \longrightarrow & O(V) \\ N \downarrow & & \downarrow sp \\ K^\times & \longrightarrow & K^\times/K^{\times 2} \end{array}$$

を可換にする.

$K = \mathbb{Q}_p$ と $\rho: G_K \to O(V)$ を p 進直交表現とする. $C = \hat{\bar{\mathbb{Q}}}_p$ とする. C は閉体だから中心拡大

$$1 \to \mu_2 \to \tilde{O}(V_C) \to O(V_C) \to 1$$

がえられる. これを $G_K \to O(V)$ でひきもどしてえられる中心拡大の類を V の第2 Stefel-Whitney 類 $sw_2(V) \in H^2(K, \mathbb{Z}/2)$ とする. 第1 Strefel-Whitney 類 $sw_1(V)$ は V の determinant $\det \rho \in \mathrm{Hom}(G_K, \mu_2) = H^1(G_K, \mu_2)$ である.

V の Spinor 類 $sp(V) \in H^2(K, \mu_2)$ は次のように定義される. $\rho: G_K \to O(V)$ と spinor norm の合成 $sp \circ \rho$ は $\mathrm{Hom}(G_K, K^\times/K^{\times 2})$

$\in H^1(K, \mathbb{Z}/2) \otimes H^1(K, \mu_2)$ の元を定めるから、その cup 積による $H^2(K, \mu_2)$ での像として $Sp(V)$ が定義される。

命題．記号は前節の定理のとおりとする．そのとき

$$sw_2(V) = hw_2(D-V) + Sp(V)$$

となる．

略証．上の中心拡大

$$1 \to \mu_2 \to \tilde{O}(V_C) \to O(V_C) \to 1$$

の自明な G_K-作用と自然な G_K-作用の2とおりの作用について．boundary map $H^1(K, O(V_C)) \to H^2(K, \mu_2)$ による $\rho \in \mathrm{Hom}(G_K, O(V))$ が定める H^1 の元の像を考える．$sw_2(V)$ は定義により．自明なものによる像に等しい．cochain の計算により．$Sp(V)$ はその両者の差に等しい．したがって自然なものの像が $hw_2(D-V)$ となることをみればよいが．それは Hodge-Tate 分解を使って示す．

定理′を示すには命題により．$hw_2(D-V)$, $Sp(V)$ を D の Hodge 数を使って計算すればよいが、紙数も超過し〆切も過ぎてしまったので．それは Fontaine-Lafaille 理論を使って示すと述べるにとどめたい．雑な説明になったことをお詫びします．詳しくは文献 [S] を御覧下さい．