代数幾何学シンポジウム記録
1996年度 pp.168-185

対数的スムースな曲線のモジュライ

加藤 文元*

京都大学理学部数学教室

e-mail: kato@kusm.kyoto-u.ac.jp

1. 序論

1.1. 概要. この小論では、最近筆者が代数曲線のモジュライ空間に関して行った研究 [6] について解説する．この研究で筆者は代数曲線のモジュライ理論を、対数的幾何学の枠組の中で最も自然と思われる方法で構成し、以下に解説する様にそれが本質的には Deligne、Knudsen、Mumford による点付き安定曲線のモジュライ理論 ([2] 及び [9] 等を参照) と等価である事を示した．対数的幾何学の枠組でのモジュライ理論は特にアーベル多様体のモジュライについて既に加藤和也氏や梶原健氏らによって試みられてきたが、これらの研究に一貫して流れる思想は、対数的幾何学においては例えば半安定な退化といったある種の退化は対数的にスムースとなるため、対数的にスムースな対象のモジュライ理論を考える事が出来た場合これは従来のモジュライ理論を含み、かつそれ自体がすでにコンパクト化されたものとなっているであろうというものである．特にアーベル多様体の場合には、そのモジュライのある意味で標準的なコンパクト化を与えると思われるので特に興味深い．ここで紹介する [6] は曲線の場合にこの思想を具体化したもので、今後の対数的幾何学でのモジュライ理論の研究の一つの出発点となると思われる．

この小論は筆者が 1996 年度の城崎シンポジウム (Kinosaki Symposium on Algebraic Geometry, Nov. 11-15, 1996) にて行なった講演の予稿にいくつかの詳細を加えたものである．シンポジウムのお世話をして下さった方々に感謝の意を表したい．

1.2. 主結果. ここで述べられる用語や概念の多くは対数的幾何学に固有のものであり、その意味は以下の節で与えられる．ここではあまり詳細を気にしないで [6] での結果について要約してみたい．まず我々は従来のスムース曲線という概念の対数的幾何学への焼き直しと言うべき**対数的曲線** (log curve) という概念の定義する:

定義. 有限生成飽和型 (fs) な対数的概型の射 $f: X \to S$ が対数的曲線であるとは、それが対数的スムースかつ整であり、その下部 (underlying) 概型の射 $\mathring{f}$ の各幾何学的ファイバー、即ち S の各点の分離閉包上のファイバーが被約かつ連結な曲線であることである．

対数的曲線の構造定理は 3.1 で与えられるが、特に著しい事はその下部概型が通常の意味で半安定な曲線の平坦族である事と、その対数的構造が自然にいわゆる点付構造 (pointed structure) の類似を持っているという事である．従って対数的曲線の型 (type) という概念をその算術的種数と点の個数との組で自然に定義される．また、筆者が以前 [5] において研究し [6] でも一般化を与えた、いわゆる対数的スムースな変形理論に関する知見から非常に自然な形でその安定性 (stability) という概念を定義する事も出来る．

*学術振興会特別研究員

そこで自然な流れとしてある型を持った安定対数的曲線のモジュライを考える訳であるが、対数的幾何学の枠組でモジュライ理論を考察する場合、従来の様に概型の圏の上のスタックを考えるのではなく(有限生成飽和型な)対数的概型の圏の上のスタックを考えるのが自然と思われるので、その形で安定対数的曲線のモジュライを考える．型 (g,n) を持つ安定対数的曲線のモジュライスタックを $\mathcal{LM}_{g,n} \to \mathbf{LSch}^{\mathrm{fs}}$ と書く．

もちろん、新しい概念を導入してもそれが従来の言葉で説明出来なければ意味がない．そこで次の様な事を考える: 今、従来の様な概型の圏の上のスタック $\mathcal{S} \to \mathbf{Sch}$ が与えられた時、概型の上の対数的構造の定義を拡張してスタックの上の対数的概型というものを考える事が出来る．いわば**対数的スタック** (log stack) と呼ぶべきものである訳だが、これは従来の対数的概型の概念を拡張したものなのであるから、与えられた概型から表現可能スタックが自然に構成出来たのと全く同様の考え方で対数的スタックから対数的概型の圏の上のスタックを構成する事が出来る．従って対数的概型の圏の上のスタック $\tilde{\mathcal{S}} \to \mathbf{LSch}^{\mathrm{fs}}$ が与えられた時、それが対数的スタック $\mathcal{S} \to \mathbf{Sch}$ で表現されるという事は意味がある．

以上の言葉を使うと、以下に述べる主要結果は次の二つの主張に要約される:

定理 1. Deligne-Knudsen-Mumford の種数 g の n 点付安定曲線のモジュライスタック $\overline{\mathcal{M}}_{g,n} \to \mathbf{Sch}$ 上には、もしそれが概型で表現されるなら退化部分 (degenerate locus) という正規交差因子で定義されるもの (cf. 例 2.2.1) と一致する様な自然な対数的構造が入る．

定理 2. 型 (g,n) の安定対数的曲線のモジュライスタック $\mathcal{LM}_{g,n} \to \mathbf{LSch}^{\mathrm{fs}}$ は、定理 1 で述べた対数的スタック $\overline{\mathcal{M}}_{g,n} \to \mathbf{Sch}$ で表現される．

2. 対数的幾何学の簡単な復習

以下のすべての議論は J. -M. Fontaine、L. Illusie、及び加藤和也氏による、いわゆる対数的幾何学 (log geometry) の枠組で行われるので、この対数的幾何学について復習しておく．特に 2.2 と 2.4 では具体的ないくつかの例を詳しく論じる．対数的幾何学についてのもっと詳しい説明については、例えば [4] や [7] を参照されたい．

2.1. 対数的概型. 代数幾何学が大雑把に言って概型を扱う学問である様に、対数的幾何学は**対数的概型** (log scheme) という対象を扱う．この対数的概型とは通常の意味での概型と**対数的構造** (log structure) と呼ばれるものとの組である:

定義. 概型 X 上の対数的構造とは、半群の層の準同型 $\alpha: \mathcal{M} \to \mathcal{O}_X$ で、$\mathcal{M}$ の部分半群層 $\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^\times)$ が α によって $\mathcal{O}_X^\times$ と同型となるものである．

対数的概型の射 $(X, \mathcal{M}) \to (Y, \mathcal{N})$ とは、通常の概型の射 $f: X \to Y$ と半群の層の準同型 $\varphi: f^{-1}\mathcal{N} \to \mathcal{M}$ で

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X \\ \uparrow & & \uparrow \\ f^{-1}\mathcal{N} & \longrightarrow & f^{-1}\mathcal{O}_Y \end{array}$$

が可換となるものとの組である．ただしここで、また今後は以下の事を約束して議論する:

- 概型上の層はすべてエタール位相で考える.
- 半群はすべて可換とし単位元を持つとする. また、半群の準同型は常に単位元を単位元に移すものとする.
- 環（単位元を持つ可換環）を半群と見るときは、特に断らない限り積に関して見る事とする.

$\mathcal{M}$ を概型 X 上の対数的構造とする. この時、層 $\mathcal{M}$ の切断はあたかも X 上の可逆関数の様に扱われる. 原理的にはこれの群化 $\mathcal{M}^{\mathrm{gp}}$ が構造層の乗法群 $\mathcal{O}_X^\times$ の代用として取り扱われる訳で、例えば、いわゆる対数的微分 $d\log a = \frac{da}{a}$ の概念が次の様に拡張され $a \in \mathcal{M}^{\mathrm{gp}}$ に対しても定義される (「対数的幾何学」という名前はこの様な事に由来する): 対数的概型の射 $(f,\varphi)\colon (X,\mathcal{M}) \to (Y,\mathcal{N})$ について、**対数的微分加群層** (sheaf of log differentials) という $\mathcal{O}_X$-加群を

$$\omega^1_{X/Y} = \left[\Omega^1_{X/Y} \oplus (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{M}^{\mathrm{gp}})\right]/\mathcal{K}$$

で定義する. ここで $\Omega^1_{X/Y}$ は通常に意味での微分層であり、また $\mathcal{K}$ は $a \in \mathcal{M}$ によって $(d\alpha(a),0) - (0,\alpha(a)\otimes a)$ という形の切断と $b \in f^{-1}\mathcal{N}$ によって $(0,1\otimes\varphi(b))$ の形の切断から生成される $\mathcal{O}_X$-部分加群である. これらの関係式から、例えば $a \in \mathcal{O}_X^\times$ については $[0,1\otimes a] = [d\log a, 0]$ がわかり、従って今 $d\log\colon \mathcal{M}^{\mathrm{gp}} \to \omega^1_{X/Y}$ を $d\log(a) := [0,1\otimes a]$ で定義するとこれは従来の $d\log\colon \mathcal{O}_X^\times \to \Omega^1_{X/Y}$ を拡張したものになっている.

従って商半群 $\mathcal{M}/\mathcal{O}_X^\times$ はある意味でこの対数的概型とその下部 (underlying) 概型との機能の違いを表す量であると考えられる. この小論ではこの商半群 $\mathcal{M}/\mathcal{O}_X^\times$ を対数的概型 X の**特性** (characteristic) と呼ぶ事にする. 容易に想像される様に $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X^\times$ なる対数構造は**自明** (trivial) と呼ばれる.

対数的構造はこのままでは扱いにくい事が多いので以下の様な考え方が便利である: 対数的構造の定義の条件を外して、単に半群の層の準同型$\varphi\colon f^{-1}\mathcal{N} \to \mathcal{M}$ の事を**前対数的構造** (pre-log structure) と呼ぶ. 前対数的構造 $\varphi\colon f^{-1}\mathcal{N} \to \mathcal{M}$ が与えられた時、これに付随した対数的構造 (associated log structure) $\alpha^{\mathrm{a}}\colon \mathcal{M}^{\mathrm{a}} \to \mathcal{O}_X$ というものが半群の層の押し出し

$$\mathcal{M}^{\mathrm{a}} := \mathcal{M} \oplus_{\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^\times)} \mathcal{O}_X^\times$$

及び自然に誘導される射で定義される. この手順は前層から層化によって層を得る手順と同様の普遍性を持っている.

この手順を使うと、例えば概型の射 $Y \to X$ が与えられた時に X 上の任意の対数的構造 $\mathcal{M}$ に対して、その**引き戻し** (pull-back) $f^*\mathcal{M}$ という Y 上の対数的構造が合成

$$f^{-1}\mathcal{M} \longrightarrow f^{-1}\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

で与えられる前対数的構造に付随した対数的構造で定義される.

また、前対数的構造 $P \to \mathcal{O}_X$ で P が半群の定数層であるものは特に大事で、これに付随した対数的構造が $\mathcal{M}$ である時、これは対数的構造 $\mathcal{M}$ の**地図** (chart) と呼ばれる. つまり、一般に対数的構造を取り扱う時、本質的には $\mathcal{O}_X^\times$ を法とした剰余類の代表系が決まればその対数的構造は完全に決まってしまう訳で、その考え方を一般化したのが前対数的構造に付随した対数的構造の考え方で、地図は更にそれを扱いやすくした概念である.

記号. 以下、対数的概型は原則として単に X、Y といった大文字のアルファベットで書き、その下部概型は $\overset{\circ}{X}$、$\overset{\circ}{Y}$ の様に上に o を乗せて区別する. この記号法は射に対してもなされる. 対数的概型 X に対して

- $\mathcal{O}_X$: $\overset{\circ}{X}$ の構造層、
- $\mathcal{M}_X$: X の対数的構造

の様に書き、準同型 $\mathcal{M}_X \to \mathcal{O}_X$ を明記したい時は α_X で記す事とする. また、

- $\mathcal{C}_X$: X の特性

と書くこととする. これについては相対的な概念も導入し、対数的概型の射 $f: X \to Y$ に対して

- $\mathcal{C}_{X/Y}$: f の相対特性 $(:= \mathrm{Coker}(f^*\mathcal{M}_Y \to \mathcal{M}_X))$

と記述する事にしよう. これは第 4 節で使われる.

2.2. 対数的概型の例. ここでは以下の議論を理解する上でも非常に重要ないくつかの例について詳説する.

例 1 (cf. [7, (1.5)]). X を正則 (regular) 概型とし、D をその上の被約正規交差因子とする. 即ち D は X の余次元 1 の閉部分概型でエタール局所的に $z_1 \cdots z_l$ で定義される. ここに $z_1, \ldots, z_l$ はある点のまわりの局所正則パラメータ系の一部である. この時 X 上の対数的構造 $\mathcal{M}_X$ が

$$\mathcal{M}_X := \mathcal{O}_X \cap j_* \mathcal{O}_{X \setminus D}^\times \hookrightarrow \mathcal{O}_X$$

で定義される. ここに $j: X \setminus D \hookrightarrow X$ は開埋め込みである. つまり、半群の層 $\mathcal{M}_X$ を $\mathcal{O}_X$ の部分半群で D の外では可逆である切断からなるものとし、それを自然に $\mathcal{O}_X$ に埋め込むことで対数的構造を定義するのである. この対数的構造は組 (X, D) から決まる**標準的対数的構造**と呼ばれる.

この対数的構造 $\mathcal{M}_X$ を理解する上で前小節で定義した特性や地図は非常に便利である. それを見るために任意に点 $x \in X$ をとり、その分離閉包 $\overline{x}$ での茎 $\mathcal{M}_{X,\overline{x}}$ を解析してみよう. この半群 $\mathcal{M}_{X,\overline{x}}$ は $\mathcal{O}_{X,\overline{x}}$、つまり $\mathcal{O}_{X,x}$ の狭義ヘンゼル化の部分半群である. 今、因子 D が $\overline{x}$ のエタール近傍上で $z_1 \cdots z_l = 0$ という局所定義方程式を持つとしよう ($l = 0$ の事もある). もし $l = 0$ なら直ちに $\mathcal{M}_{X,\overline{x}} = \mathcal{O}_{X,\overline{x}}^\times$ がわかる. もし $l = 1$ ならば各 $h \in \mathcal{M}_{X,\overline{x}}$ は z_1 で割れる可能性がある訳だが、z_1 で割れるだけ割った後の商はもはや D の内でも外でも 0 をとらないので可逆である. 従って $\mathcal{O}_{X,\overline{x}}$ の元が $\mathcal{M}_{X,\overline{x}}$ に入るための必要十分条件は、それが z_1 の巾と可逆元の積に書ける事であることがわかる. 一般の場合も同様の考察を繰り返すことで $\mathcal{O}_{X,\overline{x}}$ の元が $\mathcal{M}_{X,\overline{x}}$ に入るための必要十分条件は、それが

$$u \cdot z_1^{a_1} \cdots z_l^{a_l}, \qquad u \in \mathcal{O}_{X,\overline{x}}^\times, \quad (a_1, \ldots, a_l) \in \mathbf{N}^l$$

という形に書けることである事がわかる. ここで $\mathbf{N}$ はすべての非負整数からなる加法半群である. 従って半群 $\mathcal{M}_{X,\overline{x}}$ は

$$\mathcal{M}_{X,\overline{x}} = \mathcal{O}_{X,\overline{x}}^\times \cdot z_1^{\mathbf{N}} \cdots z_l^{\mathbf{N}} \quad (\cong \mathcal{O}_{X,\overline{x}}^\times \oplus \mathbf{N}^l)$$

という表示を持つ.

特にこの対数的概型の $\overline{x}$ における特性 $\mathcal{C}_{X,\overline{x}}$ は $\mathbf{N}^l$ に同型である事がわかり、この事から X の特性の群化 $\mathcal{C}_X^{\mathrm{gp}}$ は各幾何学的点において、その点での D の局所成分の交差の重複度だけ階数を持った自由アーベル群である事がわかる．更に $\mathcal{C}_{X,\overline{x}}$ の法 $\mathcal{O}_{X,\overline{x}}^\times$ での剰余類は $z_1,\dots,z_l$ で完全に代表され、これによって断面 (cross section) $\mathbf{N}^l\to\mathcal{M}_{X,\overline{x}}$ が定まるが、実はこれを $\overline{x}$ の適当なエタール近傍 U 上に延長すると、合成

$$\mathbf{N}^l\longrightarrow\mathcal{M}_X|_U\longrightarrow\mathcal{O}_X|_U$$

が U 上の地図となる．実際 U を十分小さく取ると、$\mathbf{N}^l\to\mathcal{M}_X|_U$ を定義することが出来、更に任意の $y\in U$ について $\overline{y}$ のまわりでは因子 D が適当な $\{1,\dots,l\}$ の部分集合 $I=\{i_1,\dots,i_m\}$ によって $z_{i_1}\cdots z_{i_m}=0$ という局所定義式を持つ様に出来る．この時 $j\notin I$ なる z_j は $\overline{y}$ のまわりでは可逆であるから、対応する $\mathbf{N}^l$ の元 e_j は前対数的構造 $\mathbf{N}^l\to\mathcal{O}_X|_U$ に付随した対数的構造を構成すると $\mathcal{O}_X^\times|_U$ に吸収される．つまり、この $\mathbf{N}^l\to\mathcal{O}_X|_U$ に付随した対数的構造の $\overline{y}$ における茎は $\mathcal{O}_{X,\overline{x}}^\times\cdot z_{i_1}^{\mathbf{N}}\cdots z_{i_m}^{\mathbf{N}}$ と同型となり、これは $\mathcal{M}_{X,\overline{y}}$ に他ならない．

例 **2.** P を半群とし、環 R 上の半群環 $R[P]$ を考えよう．概型 $X=\operatorname{Spec}R[P]$ 上には準同型 $P\to R[P]$ より誘導された前対数的構造 $P\to\mathcal{O}_X$ に付随した対数的構造が常に定義出来る．この対数的構造は $\operatorname{Spec}R[P]$ 上の**標準的対数的構造** (canonical log structure) と呼ばれる．以後原則として $\operatorname{Spec}R[P]$ の形の概型は標準的対数的構造によって常に対数的概型と思う事にする．

特に $P=\mathbf{N}^l$ の時は $\operatorname{Spec}R[\mathbf{N}^l]$ 上の標準的対数的構造は例 1 で述べたものと同一のものである事に注意されたい．この場合、正規交差因子としては $\mathbf{N}^l$ の生成系に対応する単項式から決まる超平面の和を考えている．また、一般に対数的概型 X の地図 $P\to\mathcal{M}_X\to\mathcal{O}_X$ を与える事は、対数的概型間の狭義の射 $X\to\operatorname{Spec}\mathbf{Z}[P]$ を与える事に他ならない事にも注意しよう (ここで、対数的概型の射 $f\colon X\to Y$ が**狭義** (strict) とは、$f^*\mathcal{M}_Y\cong\mathcal{M}_X$ なる事である)．

ここで半群についていくつか言葉を用意しておく．半群 P が**整** (integral) とは、自然な準同型 $P\to P^{\mathrm{gp}}$ が単射である事である．これは P が何らかのアーベル群の部分半群として実現される事と同値である．半群 P が**飽和** (saturated) とはそれが整で、かつ次の条件を満たす事である: $p\in P^{\mathrm{gp}}$ について、もし $p^n\in P$ なる正整数 n が存在するなら $p\in P$ である．有限生成かつ飽和な半群は fs (= finitely generated and saturated) とも呼ばれ、実際扱う上で非常に良い性質を持つものである．この小論では特に、有限生成かつ飽和で捻れの無い半群のことを**トーリック半群**と呼ぶ事にする．この呼び名の由来は以下の通りである: トーリック半群の大きな特徴は、その群化が常に有限生成自由アーベル群となる事である．従って P をトーリック半群として任意の環 R 上の半群環のスペクトラム $\operatorname{Spec}R[P]$ をとると、これは R 上の分裂トーラス $\operatorname{Spec}R[P^{\mathrm{gp}}]$ をザリスキー開集合として含んでいる．更に対角射 $P\to P^{\mathrm{gp}}\oplus P$ から引き起こされる R 上の余作用 $R[P]\to R[P^{\mathrm{gp}}]\otimes_R R[P]$ は群演算を拡張する作用

$$\operatorname{Spec}R[P^{\mathrm{gp}}]\times_{\operatorname{Spec}R}\operatorname{Spec}R[P]\longrightarrow\operatorname{Spec}R[P]$$

を誘導する．という訳で $\operatorname{Spec}R[P]$ はアフィントーリック多様体となる．また逆に任意の R 上のアフィントーリック多様体はトーリック半群 P で $\operatorname{Spec}R[P]$ の形に書ける (cf. [11, (1.1)])．

一般のトーリック多様体についても、その各アフィントーリック被覆の一つ一つに標準的な対数的構造を入れると、これらは全体に貼り合う事がわかる．こうして得られた対数的構造も

また標準的と呼ぶべきものであり、今後任意のトーリック多様体はこの意味で対数的概型と思う事にする.

トーリック多様体はザリスキー局所的に有限生成かつ飽和な半群による地図で覆われるが、一般に対数的概型 X がエタール局所的に有限生成かつ飽和 (resp. 整) な半群による地図で覆われる時、X は**有限生成飽和型** (fs) (resp. **有限生成整型** (fine)) と呼ばれる (この訳語はこの場限りのものである). トーリック多様体や例 1 の対数的概型は有限生成飽和型なものの例である.

以上の例はいずれもその対数的構造 $\alpha_X: \mathcal{M}_X \to \mathcal{O}_X$ が単射準同型となる、つまり $\mathcal{M}_X$ が構造層の部分半群であるものばかりであったが、この様なものはむしろ特別であって、以下の例の様に α_X が単射から程遠いものでも大事なものが沢山ある:

例 3. 対数的概型 X を例 1 の様に正規交差因子 D との組に付随したものとしよう. この時 X 上の対数的構造 $\mathcal{M}_X$ を D 上に引き戻す、つまり $i: D \hookrightarrow X$ について $\mathcal{M}_D := i^*\mathcal{M}_X$ を考える事で D を対数的概型と思う事が出来る. この対数的構造は $\mathcal{M}_X$ の局所地図から自然に誘導される地図を持つ. つまり D が点 $x \in D$ の X 内での十分小さいエタール近傍 U で $z_1 \cdots z_l = 0$ で定義される時、U 上で

$$\mathbf{N}^l \longrightarrow \mathcal{O}_D|_{U \cap D}, \qquad e_j \mapsto z_j$$

という地図を持つ訳であるが、一見してわかる様にこれは単射からは程遠く、このことから α_D も単射からは程遠い訳である. もちろんこの対数的概型は有限生成飽和型である.

この対数的概型の面白い点は、それが正規交差多様体 D のみからは決まらないが、しかし D の正則概型 X への因子としての埋め込みからは決まるという点である. 従ってこの対数的概型は、その下部概型 $\mathring{D}$ そのものとは本質的に異なる構造を持っている訳で、例えば D が複素数体上定義されている時に J. H. M. Steenbrink はこの構造を混合ホッジ構造で表現するという興味深い仕事を行なった (cf. [13]). 尚、一般に体上の正規交差多様体 D が与えられた時に、上記の局所地図 (D はエタール局所的には常に正則概型に因子として埋め込む事が出来る事に注意) を持つ様な対数的構造がいつ存在するかという問題も興味ある事であるが、これについては筆者が [5, 11.7] で解答を与えた: 即ち D が上記の様な対数的構造を持つための必要十分条件は、その無限小法束 $\mathcal{T}^1_D := \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_D}(\Omega^1_D, \mathcal{O}_D)$ (これは D の特異部分 D_{sing} 上の直線束となる) が何らかの D 上の直線束の D_{sing} への制限となっている事である. これはつまり D が何らかの正則概型に因子として埋め込まれた時の法束となる様な直線束を有しているという条件である.

例 4. 例 3 で特に X が体 k 上のアフィン直線 $\mathrm{Spec}\, k[\mathbf{N}]$ で D がその原点である時を考えると $D = \mathrm{Spec}\, k$ 上の対数的構造が得られるが、この対数的構造は次の様な半群の準同型から誘導された地図を持つ事がわかる:

$$\mathbf{N} \longrightarrow k, \qquad n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

この対数的概型は**標準点** (standard point) と呼ばれる. この時 $\mathbf{N}$ の生成元は、いわば X のパラメータの "痕跡" であると見られる訳で、つまり標準点とは仮想的なパラメータを持つ点であると言う事が出来る. この対数的構造を具体的に書くと、容易にわかる様に $\mathbf{N} \oplus \mathcal{O}_D$ となる. 標準点は明らかに有限生成飽和型である.

これを拡張して、一般に単位元より他に可逆元を有しない半群 P についても単位元以外の元をすべて 0 に写す準同型 $P \to k$ から誘導される対数的構造を持った対数的概型を対数的点 (logarithmic point) と呼ぶ．この時、この対数的点の分離閉包での特性は P に一致する．一般に対数的点とは、体のスペクトラムを下部概型に持つ対数的概型 X で、その分離閉包での特性 P (これは単位元より他に可逆元を持たない) が射影 $\mathcal{M}_X \to P$ の断面 $P \to \mathcal{M}_X$ を持つものであるとも言う事が出来る．我々はエタール位相で考えていたので下部概型が体となる任意の対数的概型が対数的点となるとは限らないが、もしそれが有限生成飽和型なら適当な有限次分離拡大へ持ち上げると対数的点となる事が容易にわかる (例えば [6, 2.2.8] を参照).

2.3. 対数的スムース性. [EGA, IV §17] によれば概型の射のスムース性は巾零拡大 (nilpotent thinckening) に関する射の持ち上げの存在 で定義される．対数的幾何学の枠組みでスムース性を定義する上でも基本的にはこの考えを見習えば良い．ただしここで巾零拡大はこの枠組みできちんと定義しておく必要がある．一般に対数的概型の射 $f: X \to Y$ が完全閉埋め込み (exact closed immersion) とは、それが狭義でその下部概型の射 $\mathring{f}$ が通常の意味で閉埋め込みである事を言う ("狭義" の定義については例 2.2.2 を参照)．更に $\mathring{f}$ が通常の意味で高々d 次の巾零拡大、つまり $\mathcal{I} := \mathrm{Ker}(f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X)$ として $\mathcal{I}^{d+1} = 0$ である時、f は高々d 次の巾零拡大 (thickening of order $\leq d$) と呼ばれる．

定義. 有限生成整型な対数的概型の射 $f: X \to Y$ が形式的に対数的スムース (formally log smooth) (resp. **形式的に対数的エタール** (formally log étale)) であるとは、任意の有限生成整型な対数的概型の間の高々1 次の巾零拡大 $Y'_0 \to Y'$ 及び射 $Y' \to Y$ について、標準的な写像

$$\mathrm{Hom}_Y(Y', X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_Y(Y'_0, X)$$

が全射 (resp. 全単射) となる事である．また、f が**対数的スムース** (log smooth) (resp. **対数的エタール** (log étale)) であるとは、それが形式的に対数的スムース (resp. 形式的に対数的エタール) で $\mathring{f}$ が局所的に有限表示を持つ事である．

定義から直ちにわかる事であるが、もし $f: X \to Y$ が狭義の射であるなら、その対数的スムース性 (resp. 対数的エタール性) はその下部概型の射の通常の意味でのスムース性 (resp. エタール性) と同値である．しかしながら、以下で見る様に一般には f が対数的スムースもしくは対数的にエタールであっても、その下部概型の射は平坦である事すら真でない．

対数的スムース性について理解する上で最初に検討しておくべき事は、半群の準同型 $Q \to P$ から誘導される対数的概型の射 $\mathrm{Spec}\,R[P] \to \mathrm{Spec}\,R[Q]$ (R は環) がいつ対数的スムースになるかという事であろう．これについては次の様な判定法が知られている:

命題. $\varphi: Q \to P$ を有限生成かつ整である半群の準同型とし、$f: \mathrm{Spec}\,R[P] \to \mathrm{Spec}\,R[Q]$ をこれより誘導された有限生成整型な対数的概型の射とする．ただし、ここで R は任意の環である．この時、f が対数的スムース (resp. 対数的エタール) であるための必要十分条件はφ^{gp} の核、及び φ^{gp} の余核の捻れ部分 (resp. 余核) が有限アーベル群で、それらの位数が R で可逆である事である．

証明については、例えば [5, 6.1] (ここでは対数的スムース性に関してのみその十分性だけが与えられているが、必要性についてもそこに使われている道具で証明出来、また対数的エター

ルについても同様である) を参照されたい．この命題から直ちに得られる帰結として次の事は興味深い:

系. k を標数 0 の体とする．この時、扇の写像 (cf. [11, §1.5]) $\varphi: (N', \Sigma') \to (N, \Sigma)$ から決まる k 上のトーリック多様体の射 $\varphi_*: T_{\Sigma'} \to T_\Sigma$ が対数的スムース (resp. 対数的エタール) であるための必要十分条件は $\mathbf{Z}$-加群の射$\varphi: N' \to N$ の余核が有限 (resp. かつ単射) である事である．

特に $N = \{0\}$ とすると、任意のトーリック多様体は自明な対数的構造を持った $\operatorname{Spec} k$ の上に (実は k の標数に関わらず) 常に対数的スムースである事がわかる．また、扇の細分から決まるトーリック多様体の射は (これも実は標数に関わらず) 常に対数的エタールとなっている．従ってブローアップの様な (下部概型の射が) 平坦ですらないものも対数的エタールとなってしまう訳である．

上で述べた様に狭義な射の対数的スムース性 (resp. 対数的エタール性) とは下部概型の射のスムース性 (resp. エタール性) に他ならなかった．また上の命題を応用すると、トーリック半群間の準同型 $\varphi: Q \to P$ から誘導されるアフィントーリック多様体の射 $\operatorname{Spec} R[P] \to \operatorname{Spec} R[Q]$ が対数的スムース (resp. 対数的エタール) なるための必要十分条件は、φ が単射でその余核の捻れ部分 (resp. 余核) の位数が R で可逆である事となる．一般に対数的概型の射 $f: X \to Y$ に対して、この様な対数的スムース (resp. 対数的エタール) 射 $\operatorname{Spec} R[P] \to \operatorname{Spec} R[Q]$、及び狭義の射 $X \to \operatorname{Spec} R[P]$ と $Y \to \operatorname{Spec} R[Q]$ (つまり地図; 例 2.2.2 参照) が存在して $X \cong Y \times_{\operatorname{Spec} R[Q]} \operatorname{Spec} R[P]$ (対数的概型の圏のファイバー積についてはここでは特に詳説しないが、この場合 $Y \to \operatorname{Spec} R[Q]$ が狭義なので、左辺の対数的概型は通常の概型としてのファイバー積に $\operatorname{Spec} R[P]$ の対数的構造を引き戻したものになる) となる時、f をトーリック型と呼ぶ事にしよう．トーリック型の射は対数的スムース (resp. 対数的エタール) である．

対数的スムース射 (resp. 対数的エタール射) の局所的な構造について加藤和也氏によって証明された次の結果は著しい:

定理 ([7, (3.5)], [10, (A.2)]). 任意の有限生成飽和型な概型の対数的スムース (resp. 対数的エタール) な射 $X \to Y$ はエタール局所的にトーリック型の対数的スムース (resp. 対数的エタール) 射 $X' \to Y$ と狭義の対数的スムース (resp. 対数的エタール) 射 $X \to X'$ の合成に分解される．

ここにあげたものは加藤和也氏による元々の主張に中山能力氏が手を加えたものである．証明については上記引用文献、もしくは [5, §6] 等を参照されたい．

また、従来のスムース性やエタール性が微分加群層の振舞いと密接に関係していたのと同様に、対数的スムース性や対数的エタール性も 2.1 で定義を与えた対数的微分加群層と密接に関連している．例えば有限生成整型な対数的概型の射 $f: X \to Y$ について $\mathring{Y}$ が局所ネター的で $\mathring{f}$ が局所有限型なら $\omega^1_{X/Y}$ は連接 $\mathcal{O}_X$-加群となるが、もし更に f が対数的スムースなら局所自由となる．詳しくは [7] 等を参照されたい．

2.4. 対数的スムース射の例. 対数的スムースな射の例としては、系 2.3 やその後で述べた様なトーリック多様体の射で書けるものの他に以下の様なものが非常に重要である:

例 1. R を離散付値環とし、$\Delta = \operatorname{Spec} R$ としよう．$f: X \to \Delta$ を Δ 上の半安定退化 (semistable reduction) とする．即ち X を正則概型として射 f をエタール局所的に $z_1\cdots z_l=\pi$ で定義されているものとする訳である．ここに $z_1,\ldots,z_l$ は X の局所パラメータ系の一部であり、π は R の極大イデアルの生成元である．この時、例 2.2.1 で行なった手順を X と Δ の双方に施す事により、これらを対数的概型と思う事が出来、しかも容易にわかる様に概型の射 f はこの意味で対数的概型の射に拡張される．このモデルは与えられた半安定退化のみから標準的に構成されるものである事に注意しておこう．

このモデルが対数的スムースである事を見るために、これをエタール局所的に分析してみよう．正則概型 X の点 $x\in X$ をとり、分離閉包 $\overline{x}$ のまわりのエタール近傍 U を適当にとって $U\to\Delta$ が $z_1\cdots z_l=\pi$ で定義されているとする．ただし $z_1,\ldots,z_l$ は $\overline{x}$ のまわりの局所パラメータ系 $z_1,\ldots,z_n$ $(l\leq n)$ とする．この時 U は例 2.2.1 の様な地図 $U\to\operatorname{Spec}\mathbf{Z}[\mathbf{N}^l]$ を持つ．一方 Δ の方も例 2.2.1 の形の地図 $\Delta\to\operatorname{Spec}\mathbf{Z}[\mathbf{N}]$ を持つ訳であるが、上記の関係式から対角準同型 $\mathbf{N}\to\mathbf{N}^l$ から誘導されたトーリック型の射 $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}[\mathbf{N}^l]\to\operatorname{Spec}\mathbf{Z}[\mathbf{N}]$ は $U\to\Delta$ と可換である事がわかる．更にファイバー積 $X':=\Delta\times_{\operatorname{Spec}\mathbf{Z}[\mathbf{N}]}\operatorname{Spec}\mathbf{Z}[\mathbf{N}^l]$ はパラメータ系 $z_1,\ldots,z_l$ を持つ正則概型で、自然な射 $X\to X'$ は明らかに狭義でスムースである．従って f は対数的スムースであり、上記の分解が定理 2.3 における分解を与えている．

尚、対数的概型 X の Δ 上の対数的微分加群層 $\omega^1_{X/\Delta}$ は、上記の局所地図によりエタール局所的に簡単に計算出来、これは

$$\frac{dz_1}{z_1},\ldots,\frac{dz_l}{z_l},dz_{l+1},\ldots,dz_n;\quad \frac{dz_1}{z_1}+\cdots+\frac{dz_l}{z_l}=0$$

を生成元及び関係式とする自由 $\mathcal{O}_X$-加群である．

例 2. 上記の例の原点上のファイバーをとってみよう．具体的には k を R の剰余体とし閉埋め込み $0:=\operatorname{Spec}k\hookrightarrow\Delta$ でΔ 上の対数的構造を引き戻した上で、対数的概型のファイバー積 $X_0:=0\times_\Delta X$ をとる．この時 X_0 の下部概型は通常の意味での原点でのファイバーに一致し、$X_0\to X$ は完全閉埋め込みとなる．従って X_0 は例 2.2.3 で述べたものであり、また $0\to\Delta$ も完全閉埋め込みであるから 0 は例 2.2.4 で述べた標準点である．定義から対数的スムース性は基底変換に関して安定であるから、ファイバー $X_0\to 0$ も対数的スムースである．例 2.2.3 で述べた様に標準点 0 は仮想的なパラメータを持った点と考えられたが、この射 $X_0\to 0$ は仮想的なスムージングの族と考えられるという事に注意されたい．従って、この射はその下部の単なる正規交差多様体のみとは本質的に異なる構造を持っている．

逆に体 k 上の正規交差多様体 X_0 が与えられた時、それが **d-半安定** (d-semistable)、つまり無限小法束 $\mathcal{T}^1_{X_0}=\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{X_0}}(\Omega^1_{X_0/k},\mathcal{O}_{X_0})$ が X_0 の特異部分上の自明な直線束である事が、上記の様な対数的スムース射が構成出来るための必要十分条件であることが知られている (cf. [8] 又は [5, 11.7])．

例 3. 上の例の考え方を更におし進めて筆者は [6, §6] の中で例 2.2.1 で述べた正則概型上の正規交差因子に付随した対数的構造の標準的構成が以下の様な状況にも一般化出来る事を示した:

- X: 体 k 上の d-半安定な正規交差多様体、
- D: X 上の特異部分 X_{sing} と交わらない正規交差因子

としよう．この時、対 (X,D) に付随した対数的構造と呼ぶべき標準的な対数的構造 $\mathcal{M}_X$ が X 上に一意的に存在して、特に X が非特異の時には例 2.2.1 のものと一致する．更にこの時対数

的スムースな射 $f: X \to S$ (ただし $\overset{\circ}{S} = \mathrm{Spec}\, k$) が存在して $D = \emptyset$ かつ X の特異部分が空でなく連結ならば上の例 2 のものに一致する．一般の場合は例 2 の射を X_{sing} の連結成分毎に "束ねた" ものであり、特に S の対数的構造は半群 $\mathbf{N}^n$ で決まる対数的点 (cf. 例 2.2.4) である．ここに n は X_{sing} の連結成分の個数である．

例えば X を安定曲線とし $D = \emptyset$ とするとこれらの対数的構造は、X の平坦変形の倉西族を考え、退化部分とその上のファイバーという正規交差因子で各々例 2.2.1 の方法で対数的構造を入れたものの中心ファイバーをとったものにそれぞれ一致している．いわば例 2 で与えた射が一方向だけの仮想的スムージングであったのに対して、ここで与えた例は仮想的にすべての方向へのスムージングを与えるものと考えられるのである．

3. 安定対数的曲線とその構造

3.1. 対数的曲線． 従来の代数幾何学の枠組では、曲線とは単に次元 1 の代数多様体であるとして本質的に間違いが無かった訳であるが、対数的幾何学の枠組で曲線の概念を捉えようとすると、安直にその下部概型の次元が 1 であるということは必ずしも適切ではない．例えば系 2.3 で見た様に扇の細分から決まるトーリック多様体の射はすべて対数的スムースである訳だから、例えばアフィン平面の原点でのブローアップを考え、その原点でのファイバーを考えるとこれは対数的スムースで、その下部概型は $\mathbf{P}^1$ である．しかしながら、この例は対数的スムースな変形で 0 次元の対象に変形してしまう訳だからあまり曲線とは思いたくない．そもそも、この例は対数的スムースである以上に対数的エタールであったのだから、この様な例は曲線の例としては適切ではないと思われる．この様に対数的幾何学においては、その下部概型の次元という概念は必ずしもうまく作動するとは限らないのである．

従って、その下部概型の次元とうまく噛み合う様なものに的を絞って考えるべきである．上の様な事は、つまり対数的スムース性が必ずしもその下部概型の平坦性を意味しないという事から来ている訳だから、この平坦性を帰結する良い概念、それでいて例えば上の例の様に体上でも非自明である様なものを考慮すべきである．これについて、対数的幾何学には非常に適当な概念がある：

定義 1． 整半群の間の準同型 $h: Q \to P$ が次の条件を満たす時、**整** (integral) であると呼ばれる：$h(a_1)b_1 = h(a_2)b_2$ を満たす任意の $a_1, a_2 \in Q$ 及び $b_1, b_2 \in P$ について、$a_3, a_4 \in Q$ と $b \in P$ が存在して $b_1 = h(a_3)b$, $b_2 = h(a_4)b$ かつ $a_1a_3 = a_2a_4$ を満たす．

これは任意の整半群の準同型 $Q \to Q'$ について、押し出し $P \oplus_Q Q'$ もまた整な半群であるという条件と同値である．また $h: Q \to P$ が単射かつ整という事と、自然に誘導された環準同型 $\mathbf{Z}[Q] \to \mathbf{Z}[P]$ が平坦であるという事は同値である．

定義 2． 有限生成整型な対数的概型の射 $f: X \to Y$ が**整** (integral) であるとは、任意の点 $x \in X$ について誘導される準同型 $\mathcal{C}_{Y,\bar{y}} \to \mathcal{C}_{X,\bar{x}}$ (ただし $y = f(x)$) が整である事である．

これについて次の事が知られている：

命題 (cf. [7, (4.5)])．対数的スムースかつ整である射の下部概型の射は平坦である．

また、対数的スムースかつ整である射の対数的スムースな無限小変形はまた整であり、従ってその下部構造は平坦変形である (cf. [5]).

以上の様な訳で、対数的曲線という概念を以下の様に定義するのが自然であると思われる:

定義 3. 有限生成飽和型な対数的概型の射 $f: X \to S$ が**対数的曲線** (log curve) であるとは、それが対数的スムースかつ整であり、その下部概型の射 $\overset{\circ}{f}$ の各幾何学的ファイバー、即ち S の各点の分離閉包上のファイバーが被約かつ連結な曲線であることである.

この時、以下の様な構造定理が証明される:

定理 1. k を分離閉体、S を $\overset{\circ}{S} = \mathrm{Spec}\, k$ なる 有限生成飽和型な対数的概型とし、$f: X \to S$ を対数的曲線とする. この時、次の事が成り立つ:

(1) X の下部概型 $\overset{\circ}{X}$ は高々通常二重点のみを特異点に持つ、即ちエタール局所的に $\mathrm{Spec}\, k[t]$ もしくは $\mathrm{Spec}\, k[u,v]/(uv)$ という形の概型で記述される.

(2) $\overset{\circ}{X}$ の非特異部分上の互いに異なる点 $s_1, \ldots, s_n$ ($n = 0$ の事もあり得る) が存在して、

$$\mathcal{C}_{X/S} \cong \mathbf{Z}_{r_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}_{r_l} \oplus \mathbf{N}_{s_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{N}_{s_n}$$

となる. ここに、$\mathbf{Z}_x$ や $\mathbf{N}_x$ 等は点 x のみに台を持つ摩天楼層であり、$r_1, \cdots, r_l$ は $\overset{\circ}{X}$ 上のすべての特異点である.

最初の性質により X の下部概型がいわゆる半安定曲線である事がわかり、更に (2) の性質よりこの対数的曲線はそれ自体が何か点付構造 (pointed structure) に似たものを持っているという事がわかる. 従って、この様な分離閉体上の対数的曲線に対して、その算術的種数と n の組 (g,n) をその型 (type) と定義する事は自然であると思われる. 一般の対数的曲線 $f: X \to S$ についても、上記の命題から種数の概念を考える事が可能であるから、やはり型 (g,n) という概念が定義出来る: 即ち、$f: X \to S$ が型 (g,n) を持つとは、その任意の点の分離閉包上のファイバーが型 (g,n) を持つ事とするのである.

性質の良いモジュライ空間を構成するための安定性の概念を定義する鍵は対数的曲線の対数的スムースな変形に関する無限小自己同型であり、これは [5] や [6] で展開されている対数的スムースな変形理論を適用すると対数的微分加群層 $\omega^1_{X/S}$ の $\mathcal{O}_X$-双対でコントロールされる事がわかる:

定義 4.

(1) k を分離閉体、S を $\overset{\circ}{S} = \mathrm{Spec}\, k$ なる 有限生成飽和型な対数的概型とする. この時、対数的曲線 $f: X \to S$ が**安定** (stable) であるとは、その下部概型が固有 (proper) であり

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\omega^1_{X/S}, \mathcal{O}_X) = 0$$

なる事である.

(2) S を任意の有限生成飽和型な対数的概型とする. この時、対数的曲線 $f: X \to S$ が安定 (stable) であるとは、その下部概型の射が固有であり、S の任意の点の分離閉包上のファイバーが (1) の意味で安定である事である.

安定対数的曲線の下部構造は以下の様になっている:

定理 2. $f: X \to S$ を型 (g,n) を持つ安定対数的曲線とする．この時 S の任意の点のまわりで適当なエタール近傍をとり S に置き換えると n 個の切断 $\sigma_j: \mathring{S} \to \mathring{X}$ が存在して、$(\mathring{f}: \mathring{X} \to \mathring{S}; \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ は従来の意味で n-点付安定曲線であり、

$$\{x \in X \mid \mathcal{C}_{X/S,\bar{x}} \cong \mathbf{N}\} = \coprod_{j=1}^{n} \sigma_j(\mathring{S})$$

となる．

3.2. 基本的対数的曲線. 前小節では従来の非特異曲線や安定曲線の概念を対数的幾何学の枠組に焼き直すという事を実行し、実際それが非常に自然な形で出来るという事、及びその下部概型をとる事で従来の安定曲線が回復出来る事を述べた．しかしながらこれらの対象でモジュライ理論を構成し、それを分析しようとした場合、我々はこれら安定対数的曲線を何らかの形でコントロールして行かなければならない訳であるが、一見すると例えば従来の非特異な種数 2 以上の曲線にも、これを安定対数的曲線とする様な対数的構造は非常に多く、とてもこれらをコントロールするのは不可能である様に思われてしまう．ここではこれをコントロールするための筆者の最も中心的なアイデアである基本的対数的曲線 (basic log curve) の概念を紹介する．

定義. 対数的曲線 $f: X \to S$ が以下の条件を満たす時、基本的 (basic) と呼ばれる: S' を任意の有限生成飽和型の対数的概型、$a: \mathring{S}' \to \mathring{S}$ をエタール射とし、$f': X' \to S'$ を $\mathring{X}' \cong \mathring{X} \times_{\mathring{S}} \mathring{S}'$ なる任意の対数的曲線とする．更に $\mathring{X}' \to \mathring{X}$ を b とした時に $\mathcal{C}_{X'/S'} \cong b^{-1}\mathcal{C}_{X/S}$ と仮定する．この時、対数的概型の射 $\alpha: S' \to S$ と $\beta: X' \to X$ が $\mathring{\alpha} = a$、$\mathring{\beta} = b$ かつ $X' \cong X \times_S S'$ なる様に一意的に存在する．

つまり、下部概型の間のカルテシアン図式

$$\begin{array}{ccc} \mathring{X} & \xleftarrow{b} & \mathring{X}' \\ {\scriptstyle \mathring{f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathring{f}'} \\ \mathring{S} & \xleftarrow[a]{} & \mathring{S}' \end{array}$$

が対数的概型のカルテシアン図式に一意的に拡張されるという事である．この定義の意味は特に $\mathring{S}' = \mathring{S}$ で $a = \mathrm{id}$ とするとわかりやすい．これはつまり、その対数的曲線 $f: X \to S$ の上下の対数的構造に関する条件であり、それとは異なる対数的構造はすべてこの、ある意味では極小な対数的構造から誘導されるという意味に読める．上の条件はこの考え方を更にエタール局所化しただけである．ただ "極小" というのはいささか誤解を生みやすい表現である事が以下の実例から判断されるので "基本的" と呼ぶのである (この呼び名は L. Illusie 氏の考案である)．尚、定義から明らかな事であるが、下部概型の射及び相対特性を固定した場合基本的対数的曲線はもし存在するなら一意的である．

では、どの様な対数的曲線が基本的となるのか、証明等の議論は後回しにしてとにかくその例を見てみよう:

例. ここでは k を分離閉体、$g: C \to T := \operatorname{Spec} k$ を安定曲線とした時に $\mathring{f} = g$ なる基本的対数的曲線 $f_0: X_0 \to S_0$ を記述する．天下り的になるが、実はこれは例 2.4.3 で与えたもので与え

られる．即ちその平坦変形の普遍変形空間とその上の族を考えて、退化部分で表される自然な正規交差因子達で定義される対数的構造で与えられるのである．この対数的構造を局所地図を用いて記述してみよう．まず、S はその構成から $\mathbf{N}^l$ で定義される対数的点 (cf. 例 2.2.4) である．ただし、ここで l は C の特異点の個数である．次に点 $x \in C$ をとり、そのまわりを調べてみよう．もし x が C の非特異点なら、その対数的構造は単に

$$\mathcal{M}_{X_0,x} \cong \mathbf{N}^l \oplus \mathcal{O}_{X_0}^{\times} \xrightarrow{\alpha_{X_0}} \mathcal{O}_{X_0}, \quad (a_1,\ldots,a_l) \oplus h \mapsto 0^{a_1+\cdots+a_l} \cdot h$$

であり、f_0 は $\mathrm{id}: \mathbf{N}^l \to \mathbf{N}^l$ で定義される．もし x が特異点、即ち x のまわりで $k[u,v]/(uv)$ で記述されるならその対数的構造は

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}_{X_0,x} \cong \mathbf{N}^{l+1} \oplus \mathcal{O}_{X_0}^{\times} \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{O}_{X_0},\\ &\qquad (a_1,\ldots,a_{i-1},b_1,b_1,a_{i+1},\ldots,a_{l+1}) \oplus h \mapsto 0^{a_1+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_{l+1}} \cdot u^{b_1}v^{b_2} \cdot h\end{aligned}$$

という形で記述され、適当に添字を入れ換えると f は

$$\mathbf{N}^l \longrightarrow \mathbf{N}^{l+1}, \quad (a_1,\ldots,a_l) \mapsto (a_1,\ldots,a_{i_1},a_i,a_i,a_{i+1},\ldots,a_l)$$

という形の準同型から誘導される．ここで i は適当な C の特異点の番号付けである．

この対数的曲線が基本的であるというのは一重にそれが下部概型の平坦変形の普遍変形空間から構成されるという事情に基づくものなのであるが、その辺りに事情については次の小節で述べる．

尚、この例でもわかる様に、基本的という概念は対数的曲線の基底対数的概型 S_0 をも限定する概念であり、上の例ではその対数的構造が X_0 の特異点の個数だけ $\mathbf{N}$ を直和したものになるというのが非常に大事である．例えば S_0' を標準的点、即ち一つの $\mathbf{N}$ で対数的点を作ったものとして $S_0' \to S_0$ を余対角線準同型 $\mathbf{N}^l \to \mathbf{N}$ で誘導し $X_0' := X_0 \times_{S_0} S_0'$ としたものは、半安定退化 (cf. 例 2.4.1) 等との関連で、よく扱われるものであるが、これは $l > 1$ であるなら基本的ではない．

さて、一般的な基本的対数的曲線の存在については次の事が言える:

定理． 任意の n 点付き種数 g の安定曲線 $(g: C \to T; \sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ について、$\mathring{f} = g$ かつ

$$\{x \in X \mid \mathcal{C}_{X/S,\overline{x}} \cong \mathbf{N}\} = \coprod_{j=1}^{n} \sigma_j(T)$$

となる型 (g,n) を持つ基本的安定対数的曲線 $f: X \to S$ が一意的に存在する．

後で見る様に、実は対数的曲線のモジュライ問題を解く上でこの定理が最も本質的で威力のあるものとなる．尚、上の定理で T は任意の概型で良く、局所ネーター性すら仮定されていない事にも注意されたい．次の小節ではその証明のアウトラインを示す事にする．

3.3. 定理 3.2 の証明の概略． 証明の最初の段階は、例 3.2 で構成された分離閉体上の安定対数的曲線が基本的である事を証明する事である．これには例 3.2 でも示唆されている様に、その変形空間を考察する事が非常に本質的となる．Λ を k を剰余体に持つ任意の完備ネーター局所環として $\mathbf{Art}_\Lambda$ を k を剰余体に持つアルティン局所環のなす圏としよう．我々は例 3.2 の安定対数的曲線 $f_0: X_0 \to S_0$ に対して、その対数的スムースな変形を考える．即ち、$A \in \mathbf{Art}_\Lambda$ に対して

- 完全閉埋め込み $S_0 \hookrightarrow S$、ここに S は $\overset{\circ}{S}= \operatorname{Spec} A$ なる有限生成飽和型対数的概型.
- S への f_0 の持ち上げ、即ち対数的スムースな射 $f: X \to S$ と同型 $\varphi: X_0 \cong X \times_S S_0$ との組.

というデーターの適当な同型類の集合を対応させる事で変形関手

$$\mathbf{D}_{f_0}: \mathbf{Art}_\Lambda \longrightarrow \mathbf{Set}$$

を構成する.

ここで注意を促しておきたいのは、実はこの関手は筆者が [5] で構成したもの、即ちそもそも [8] で川又雄二郎氏及び並河良典氏によって創りだされたものとは本質的に違うものであるという事である. 実は従来の関手は上記のデーター以外にも S_0 の地図を固定した上で、S の地図で S_0 のそれと可換となるものというデーターも含まれているのである. 従ってその地図を忘れるという事で従来の関手から $\mathbf{D}_{f_0}$ 射がある訳であるが、実はこれはトーラスによる商をとるという射になっている. 従ってこの $\mathbf{D}_{f_0}$ という新しい関手は従来のものに比べてより自然なものとは考えられるが、しかしその表現可能性等はいささか難しくなる. これについて筆者は [6] の前半において詳しく論じ、その表現可能性の十分条件が筆者が剛性 (rigidity) と呼ぶ対数的構造の無限小同型群に関する条件でコントロール出来る事を示した. これはこの論文 [6] のもう一つの大きなアイデアなのであるが、ここではあまり詳しくは触れない事として、ただその十分条件から今の安定対数的曲線の場合には $\mathbf{D}_{f_0}$ は Λ 上形式的にスムースな局所環で表現可能である事のみを指摘しておく.

さて、上の様な従来のものとは違う関手を使った一番の利点は、実はその表現空間が従来の平坦変形の表現空間と一致するという著しい性質である. 逆に言えば、この関手は従来の変形理論に自然に対数的構造を付け加えたものと考えられる訳である. この性質を利用すると、次の様な方針で f_0 の基本性を証明する事が出来る: 今 $f_0': X_0' \to S_0'$ を定義 3.2 の様にとる. k が分離閉体だからそのエタールサイトは死んでいるので $a = \mathrm{id}$ である. f_0' は剛性条件を満たすとは限らないので従来の意味の対数的スムースな変形を考え、その関手を $\widetilde{\mathbf{D}}_{f_0'}$ としよう. この時、対数的構造を忘れると $\mathbf{D}_{f_0}$ は従来の平坦変形と一致する訳であったから、各変形についてその対数的構造を忘れるという事により自然な射

$$\widetilde{\mathbf{D}}_{f_0'} \longrightarrow \mathbf{D}_{f_0}$$

が存在する. 両者の表現空間 (これは関手の定義から対数的構造を持っている) をとり、その中心ファイバーをとれば求める射 α 及び β が得られる. 一意性の証明は省略する.

証明の第二段階は次を示す事にある:

命題. R をネーター狭義ヘンゼル局所環で、何らかの体もしくはデデキント整域の上に有限型とする. S を $\overset{\circ}{S}= \operatorname{Spec} R$ なる有限生成飽和型な対数的概型として、$f: X \to S$ を対数的曲線とする. この時 f の閉ファイバーが基本的なら f は基本的である.

これは本質的に上記の α や β といった射の持ち上げについての議論であり、上の変形理論を用いた議論によって形式的ファイバー上に出来ていた持ち上げをヘンゼル化のところまで降下させる事である. 従って、証明はこれらの射のデーターを関手化して M. Artin による代数的近似の理論 (cf. [1]) によりなされる.

次の系は、基本的という概念がエタール局所的なものであったという事実により、上の命題からほとんど直ちに従う：

系. $f: X \to S$ を対数的曲線として $\overset{\circ}{S}$ は何らかの体もしくはデデキント整域の上に有限型と仮定する．この時 f の任意の点の分離閉包におけるファイバーが基本的なら、f は基本的である．

以上の準備の下に定理の証明は次の様になされる：まず、$\mathbf{H}_{g,n}$ を $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$ 上定義された、標準因子の三倍により射影空間に埋め込まれた n 点付き種数 g の安定曲線をパラメトライズするヒルベルト概型とし、

$$\Phi: \mathbf{U}_{g,n} \longrightarrow \mathbf{H}_{g,n}$$

をその普遍族とする．これら上下の概型には例 2.2.1 の方法で自然に対数的構造が入り、そのファイバーを調べる事で上の系によりこれは基本的安定対数的曲線となる事がわかる．

さて、$g: C \to T$ を任意の n 点付き安定曲線としよう．基本的という概念はエタール局所的なものであるから我々は T を適当にエタール開集合で置き換えて良い．この時、射 $T \to \mathbf{H}_{g,n}$ 及び $C \to \mathbf{U}_{g,n}$ がとれて

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \mathbf{U}_{g,n} \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi} \\ T & \longrightarrow & \mathbf{H}_{g,n} \end{array}$$

をカルテシアン図式とする事が出来る．そこで $\mathbf{U}_{g,n}$ や $\mathbf{H}_{g,n}$ 上の対数的構造を引き戻す事により C と T 上に対数的構造が入り対数的曲線 $f: X \to S$ を得る．もし T が体もしくはデデキント整域の上に有限型ならば、上の系により証明はここで終る．一般の場合は、通常ネーター性等の仮定を外す時によく行なわれる様な概型の射影極限を用いた議論が適用される．これは証明の最も技術的な部分であり非常に込み入っているので、ここでは省略する事にする．詳しくは [6, §§8.3] を参照されたい．

この証明で、任意の n 点付き種数 g の安定曲線について、それを基本的対数的曲線ならしめる様な対数的構造はすべて上記のヒルベルト概型及びその普遍族から引き戻されたものであったという事から、特に次の事もわかる：

定理. "基本的" という性質は狭義の射による基底変換で不変である．

4. モジュライ理論の構成

4.1. 対数的スタック. 1.2 でも述べた様に対数的幾何学でモジュライ理論を展開する時、対数的概型の圏上のスタックとか対数的構造を伴ったスタックといった概念が大事になると考えられる．この小節では、従来の概型の上の対数的構造の概念を一般化して、通常の概型の圏の上のスタック上の対数的構造という概念を導入する．もっとも [4] に見られる様に、そもそも対数的構造とは一般の環付トポス上に定義される概念であるから、スタック上の対数的構造というものも多かれ少なかれその意味は自明である．しかしながら、特に我々の目的にとっては以下の様な定義の方が扱いやすい：$\mathcal{S} \to \mathbf{Sch}$ を通常の様にエタール位相を持った概型の圏上のス

タックとする．以下、有限生成飽和型な対数的構造のみを考える．$\mathbf{LSch}^{\mathrm{fs}}$ を有限生成飽和型な対数的概型のなす圏とする．

定義 1. スタック $\mathcal{S} \to \mathbf{Sch}$ 上の**対数的構造**とは共変関手 $L: \mathcal{S} \to \mathbf{LSch}^{\mathrm{fs}}$ で

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S} \arrow[dl, "L"'] \arrow[d] \\ \mathbf{LSch}^{\mathrm{fs}} \arrow[r] & \mathbf{Sch} \end{tikzcd}$$

が可換となり、かつ $\mathcal{S}$ の任意の射 $x \to y$ について $L(x) \to L(y)$ が対数的概型の狭義な射となるものである．ここで $\mathbf{LSch}^{\mathrm{fs}} \to \mathbf{Sch}$ は対数的構造を忘れるという関手である．スタックとその上の対数的構造の組 $(\mathcal{S}, L)$ を対数的スタック (log stack) と呼ぶ．

もし、スタック $\mathcal{S}$ が概型 S で表現される、即ち $\mathcal{S} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(-, S)$ という $\mathbf{Sch}$ 上の同型がある時、この定義は従来の対数的構造の定義に一致する．実際スタック $\mathcal{S}$ が対数的構造 L を持つ場合、$\mathrm{id} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(S, S)$ を L で写すと S を下部概型に持つ対数的概型が得られる、つまり S 上の対数的構造が一つ特定される．反対に S 上の対数的構造が与えられた場合は、$L: \mathcal{S} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(-, S) \to \mathbf{LSch}^{\mathrm{fs}}$ を、$X \to S$ について S 上の対数的構造を X に引き戻すという事で定義すれば良い．

$(\mathcal{S}, L)$ を対数的スタックとして $\Phi: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}$ をスタックの射とすると、$\mathcal{S}$ 上の対数的構造 L の引き戻し $\Phi^* L$ が単に合成 $L \circ \Phi$ で定義される．これはもちろん従来の定義との上位互換性を持っている．この概念を用いて対数的スタックの射を次の様に定義する:

定義 2. 対数的スタックの射 $(\mathcal{S}', L') \to (\mathcal{S}, L)$ とは、スタックの射$\Phi: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}$ と関手間の射 $\varphi: L' \to \Phi^* L$ との組 (Φ, φ) である．

この定義についても両者のスタックが概型である時には通常のものと一致する事が容易に示される．

さて、この対数的スタックの概念を我々の状況に応用してみよう．我々は Deligne-Knudsen-Mumford による n 点付き種数 g の安定曲線のモジュライスタック

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,n} \longrightarrow \mathbf{Sch}$$

(cf. [2], [9]) を考える．任意の概型 T に対してそのファイバー $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(T)$ は、T 上のすべての n 点付き種数 g の安定曲線のなす集合であった．そこで、任意の n 点付き種数 g の安定曲線 $g: C \to T$ について、それを定理 3.2 に従って一意的に基本的対数的曲線 $f: X \to S$ とし、その基底である対数的概型 S を対応させる事で関手 $L: \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \to \mathbf{LSch}^{\mathrm{fs}}$ を定義しよう．これは定理 3.3 から $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 上の対数的構造を与える事がわかる．この対数的構造を**基本的対数的構造** (basic log structure) と呼ぶ事にする．

この基本的対数的構造を理解するために、特に $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ が概型である場合を考えよう．また、簡単のため $n = 0$ とする．この時、その普遍族

$$\overline{\mathcal{U}}_{g,n} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$$

はその対数的構造 L により対数的概型の射となり、定義から基本的対数的曲線となる．また、それとは別に上下の退化ファイバーや退化部分という正規交差因子によって、例 2.2.1 の標準的な手順で対数的構造が入り対数的概型の射となるが、実はこれらの対数的構造は同じものである．実際、後の方法で対数的概型の射とした場合、各点の分離閉包でのファイバーをとったものは例 3.2 に記述したものに他ならない事がわかり、系 3.3 により基本的である事がわかるからである．従って、この安定曲線のモジュライ上の基本的対数的構造は実際非常に標準的で自然なものである事がわかる．

4.2. 安定対数的曲線のモジュライ: 主要結果. では、以上の事をすべて総合して主要結果を述べよう．定理 3.2 と基本的対数的曲線の定義から次の事がわかる: 今、型 (g,n) を持つ任意の安定対数的曲線 $f\colon X\to S$ が与えられたとする．この時、定理 3.1.2 に従って、その下部 n 点付種数 g の安定曲線 $\mathring{f}\colon\mathring{X}\to\mathring{S}$ をとる．定理 3.2 から、これを一意的に基本的対数的曲線 $f_{\mathrm{bas}}\colon X_{\mathrm{bas}}\to S_{\mathrm{bas}}$ にする事が出来る．この基本的対数的曲線 f_{bas} は f の基本モデル (basic model) と呼ばれる．基本モデルは任意の安定対数的曲線に対して必ず一意的に存在して、しかも定義 3.2 から

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X_{\mathrm{bas}} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{\mathrm{bas}}} \\ S & \longrightarrow & S_{\mathrm{bas}} \end{array}$$

というカルテシアン図式が存在する事がわかる．ここに上下の水平な射はいずれもその下部概型の射が id となるものである．言い替えると、任意の安定対数的曲線はその基本モデルで完全にコントロールされるという訳である．

これをモジュライスタックの言葉で表現してみると、これはつまり任意の型 (g,n) を持つ安定対数的曲線 $f\colon X\to S$ に対し、対数的スタックのカルテシアン図式

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \overline{\mathcal{U}}_{g,n} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \end{array}$$

が一意的に存在するという事に他ならない．従って、スタック $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ に基本的対数的構造をいれて対数的スタックと思ったものは、型 (g,n) を持つ安定対数的曲線のモジュライ空間を与えている、という言う事が出来る．

これを更に自然な形で定式化すると次の様になる: そもそも対数的曲線の様な対数的概型上に定義された対象のモジュライ理論は対数的概型の圏上のスタックとして定式化すべきである．そこで、型 (g,n) を持つ安定対数的曲線のモジュライスタックを

$$\mathcal{LM}_{g,n}\longrightarrow \mathbf{LSch}^{\mathrm{fs}}$$

としよう．ただし、圏 $\mathbf{LSch}^{\mathrm{fs}}$ は狭義な対数的エタール射で位相付けられているとする．

一般に対数的スタック $(\mathcal{S},L)$ が与えられた時、それに付随した対数的概型の圏上のスタック $\tilde{\mathcal{S}}\to\mathbf{LSch}^{\mathrm{fs}}$ というものが、概型からそれが表現するスタックを構成したのと同様に

$$\tilde{\mathcal{S}} := \mathrm{Hom}_{\text{log stacks}}(-,\mathcal{S}),$$

即ち対数的概型から S への対数的スタックとしての射全体を対象とする事で自然に定義される．逆に何か対数的概型の圏上のスタック$\tilde{S} \to \mathbf{LSch}^{\mathrm{fs}}$ が与えられた時、それが対数的スタック (S, L) で表現されるとは、この対数的スタックに付随した対数的概型の圏上のスタックが $\tilde{S}$ に同型である事、と定義しよう．通常のスタックが概型で表現されるという事と考え方は全く同じである．この言葉を使うと、上に考察した結果は次の事を主張しているに他ならない:

主要定理． 型 (g,n) の安定対数的曲線のモジュライスタック $\mathcal{LM}_{g,n} \to \mathbf{LSch}^{\mathrm{fs}}$ は対数的スタック $\overline{\mathcal{M}}_{g,n} \to \mathbf{Sch}$ で表現される．

参考文献

[1] Artin, M.: Algebraic approximation of structures over complete local rings. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **36**, 1969, 23–58.

[2] Deligne, P. and Mumford, D.: The irreducibility of the space of curves of given genus. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **36**, 1969, 75–109.

[3] Kajiwara, T.: Logarithmic compactifications of the generalized Jacobian variety, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math. **40** (1993), 473–502.

[4] Illusie, L.: Logarithmic spaces (according to K. Kato), in Barsotti Symposium in Algebraic Geometry (V. Cristante and W. Messing, Eds.). Perspectives in Math. **15**, 183–203. Academic Press, 1994.

[5] Kato, F.: Log smooth deformation theory. Tohoku Math. J. **48**, 1996, 317–354.

[6] Kato, F.: Log smooth deformation and moduli of log smooth curves, preprint, Manuskripte, Forschergruppe Automorphe Formen, Universität Mannheim u. Universität Heidelberg **9**, 1996.

[7] Kato, K.: Logarithmic structures of Fontaine–Illusie, in Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory (J.-I. Igusa, ed.). Johns Hopkins Univ., 1988, 191–224.

[8] Kawamata, Y. and Namikawa. Y, Logarithmic deformations of normal crossing varieties and smoothings of degenerate Calabi-Yau varieties, Invent. Math. **118**, 1994, 395–409.

[9] Knudsen, F. F.: The projectivity of the moduli space of stable curves II, III. Math. Scand. **52**, 1983, 161–212.

[10] Nakayama, C.: Nearby cycles for log. smooth families. preprint: UTMS 94-70, University of Tokyo, 1994.

[11] Oda, T.: Convex Bodies and Algebraic Geometry: An Introduction to the Theory of Toric Varieties. Ergebnisse der Math. (3) **15**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1988.

[12] Popp, H.: Moduli theory and classification theory of algebraic varieties. Lecture Notes in Math. **620**. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.

[13] Steenbrink, J. H. M.: Logarithmic embeddings of varieties with normal crossings and mixed Hodge structures, Math. Ann. **301** (1995), 105–118.

[EGA] Grothendieck, A. and Dieudonné, J.: Eléments de géométrie algébrique I, II, III, IV. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **4**, **8**, **11**, **17**, **20**, **24**, **28**, **32**, 1961-1967.