代数幾何学シンポジウム記録
1996年度　pp.119-134

Deformation of Picard-Lefschetz Monodromy

北海道大学・理学部　島田　伊知朗

アフィン超曲面の補集合の普遍被覆空間のホモロジー群に対して Picard-Lefschetz 型の理論，すなわちモノドロミーの作用を消失サイクルを用いて記述する理論を展開し，それが古典的な Picard-Lefschetz 理論におけるモノドロミーの q-変形としてとらえられることを示す．ここで q-変形という言葉は，A-型のヘッケ環が，対称群の群環の q-変形であるというのと同じ意味で使っている．証明の細部については [S] を参照されたい．*

I. まず最初に，古典的な Picard-Lefschetz の理論を復習しよう．

* この解説は１９９６年７月に裏磐梯で行われた多変数函数論サマーセミナーの予稿集に載ったものに若干手を加えたものである．

1.1. 1924 年，Lefschetz は高次元複素代数多様体のトポロジーに関する有名な論説 [Le] を出版した．この論説には多くの基本的な定理が述べられているが，その証明は直観的で理解することはむずかしい．その後，Hodge 理論や Morse 理論などの洗練された道具を使うことにより，これらの定理には厳密な証明が与えられたが，もとの論文にある幾何学的な構成は置き忘れられた形になっていた．

1981 年，Lamotke は [La] において，Lefschetz のもとの "証明" を現代の言葉で書き直し再構成してみせた．以下の記述はこの Lamotke の論文によっている．

非特異連結な射影代数多様体 $W \subset \mathbb{P}^N$ を考える．W の次元 n は $n \geq 2$ をみたすとする．射影空間 $\mathbb{P}^N$ の超平面全体のなす射影空間，つまり双対射影空間を $(\mathbb{P}^N)\check{}$ であらわし，この空間の点 $y \in (\mathbb{P}^N)\check{}$ に対応する超平面を H_y とかく． H_y による W の超平面切断を W_y で表わす．W の双対超曲面 $W\check{} \subset (\mathbb{P}^N)\check{}$ を

$$W\check{} \ := \ \{ \ y \in (\mathbb{P}^N)\check{} \ ; \ H_y \text{ は } W \text{ と transverse に交わらない } \}$$

により定義する．この双対超曲面の補集合を $\mathcal{B}_W$ で表わす．

$$\mathcal{B}_W \ := \ (\mathbb{P}^N)\check{} \setminus W\check{}.$$

超平面切断の族 $\{W_y\}$ は $\mathcal{B}_W$ の上で可微分多様体の局所自明な族をなす．したがってモノドロミー表現

$$\rho \ : \ \pi_1(\mathcal{B}_W, b) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}\,(\,H_{n-1}(W_b;\mathbb{Q})\,)$$

が得られる．

さて $H_{n-1}(W_b;\mathbb{Q})$ の上には非退化な交点形式 (,) が存在する．$H_{n-1}(W_b;\mathbb{Q})$ のなかの消失サイクルの空間 V および不変サイクルの空間 I を次のように定義する．

$$V := \mathrm{Ker}\,(H_{n-1}(W_b;\mathbb{Q}) \to H_{n-1}(W;\mathbb{Q})),$$
$$I := \{ \ w \in H_{n-1}(W_b;\mathbb{Q}) \ ; \ (w,v) = 0 \text{ for all } v \in V\}.$$

Hard Lefschetz Theorem によればつぎの直和分解が存在する．

$$H_{n-1}(W_b;\mathbb{Q}) \ = \ V \oplus I.$$

この直和分解はモノドロミー表現 ρ によって不変である．Picard-Lefschetz の理論は次のことを主張する．

定理 1. モノドロミー表現 ρ は I 上に恒等作用として作用し，V 上には絶対既約に作用する．

ここで表現が絶対既約とは係数体を代数閉体にまで持ち上げても既約のままという意味である．V の元へのモノドロミーの作用はいわゆる Picard-Lefschetz 公式によって記述される．b を基点とする $\mathcal{B}_W$ のなかのループ γ は次の形に書けているとき $W^{\check{}}$ のまわりの単純ループとよばれる．$W^{\check{}}$ の非特異な点 c と，$W^{\check{}}$ と点 c のみで transverse に交わる十分小さな disk Δ が存在して，γ は b から出発して Δ の境界上の点 b' に道 β にそって到達し，b' を基点として $\partial\Delta$ にそって $W^{\check{}}$ のまわりを反時計周りに一周し，再びもとの道 β^{-1} にそって b に帰る．この点 $c \in W^{\check{}}$ を単純ループ γ の中心とよび，Δ を単純ループ γ のディスクとよぶことにしよう．

定理 2. 単純ループ γ に対してある元 $v[\gamma] \in V$ が符号を除いて unique に存在し，γ にそった V へのモノドロミー作用は

$$x \quad \mapsto \quad x + (-1)^{n(n+1)/2}(x, v[\gamma]) \cdot v[\gamma]$$

と書き表せる．

この元 $v[\gamma]$ を単純ループ γ に対する消失サイクルとよぶ．これがどのような $(n-1)$ サイクルで表わされるかについてもよくわかっている．c を $W^{\check{}}$ の一般の位置にある点とすると，対応する超平面切断 W_c はただひとつの通常 2 重点のみを特異点としてもつ．$(z_1, \ldots, z_n)$ をこの点を中心とする W の局所座標系とし小さな n 次元球体

$$B := \{\ (z_1, \ldots, z_n) \in W\ ;\ |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 \le r\}$$

をとる．局所座標系をうまく選ぶことにより $b' \in \partial\Delta$ に対応する超平面切断 $W_{b'}$ は B のなかで

$$z_1^2 + \cdots + z_n^2 = \epsilon$$

なる方程式で書き表せる．ここで ϵ は十分小さな正の実数であるとしてよい．$B \cap W_{b'}$ のなかの $(n-1)$ 次元球面

$$\{\ (z_1, \ldots, z_n) \in B\ ;\ \mathrm{Im}\, z_i = 0 \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, n,\ (\mathrm{Re}\, z_1)^2 + \cdots + (\mathrm{Re}\, z_n)^2 = \epsilon\}$$

は $B \cap W_{b'}$ の変形レトラクトである．$v[\gamma]$ はこの $(n-1)$ 次元球面を道 β^{-1} にそって W_b まで移して得られるサイクルで表わされる．

さらに V の生成元について次のことが知られている.

定理 3. V は群環 $\mathbb{Q}[\pi_1(\mathcal{B}_W, b)]$ 上の加群としてただひとつの消失サイクル $v[\gamma]$ で生成される. ここで γ は任意の単純ループである.

1.2. 以上の結果をアフィン空間のなかの超曲面の族に対して適用しよう. 以下 $n \geq 2$, $d \geq 3$ を仮定する. $\mathbb{P}^n$ の中に超平面 H_∞ をひとつ固定し, その補空間 $\mathbb{A}^n$ を考える. $\mathbb{P}^n$ の d 次超曲面全体のなす空間 $\mathbb{P}_*(\Gamma) := \mathbb{P}_*(\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)))$ を考える. これはベクトル空間 $\Gamma := \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))$ の 1 次元線形部分空間全体のなす射影空間にほかならない. 以下, $u \in \mathbb{P}_*(\Gamma)$ に対応する射影超曲面を $\overline{X}_u$ で表わし, そのアフィン部分 $\overline{X}_u \cap \mathbb{A}^n$ を X_u で表わすことにする. また, $\overline{X}_u$ と H_∞ の交叉 $\overline{X}_u \cap H_\infty$ を Y_u で表わす. $\mathbb{P}_*(\Gamma)$ のなかで次のふたつの条件を満たす超曲面 $\overline{X}_u$ 全体のなす Zariski 開集合 $U \subset \mathbb{P}_*(\Gamma)$ を考える; (1) $\overline{X}_u$ は非特異, (2) $\overline{X}_u$ は H_∞ と transverse にまじわる. この空間 U は $\mathbb{P}_*(\Gamma)$ のなかの次のふたつの超曲面の合併の補集合である.

$$\begin{aligned} D_0 &:= \{ u \in \mathbb{P}_*(\Gamma) \ ; \ \overline{X}_u \text{ は特異点をもつ} \}, \\ D_\infty &:= \{ u \in \mathbb{P}_*(\Gamma) \ ; \ \overline{X}_u \text{ は } H_\infty \text{ と transverse に交わらない} \}. \end{aligned}$$

X_u, $\overline{X}_u$ および Y_u は U 上局所自明な族をなすから, われわれは3種類のモノドロミー表現

$$\rho : \pi_1(U, b) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(H_{n-1}(X_b; \mathbb{Q})),$$

および

$$\rho_0 : \pi_1(U, b) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V(\overline{X}_b)), \qquad \rho_\infty : \pi_1(U, b) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V(Y_b))$$

を得ることになる. 部分空間 $V(\overline{X}_b) \subset H_{n-1}(\overline{X}_b; \mathbb{Q})$ および $V(Y_b) \subset H_{n-2}(Y_b; \mathbb{Q})$ はそれぞれ $\overline{X}_b$ および Y_b の消失サイクルの空間である. ここで $\overline{X}_b$ および Y_b はそれぞれ射影空間 $\mathbb{P}^n$ および H_∞ の d 次の Veronese embedding の像の超平面切断として考えている. 表現 ρ_0 および ρ_∞ は

$$\begin{aligned} \rho_0 &: \pi_1(U, b) \to \pi_1(\mathbb{P}_*(\Gamma) \setminus D_0, b) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V(\overline{X}_b)), \\ \rho_\infty &: \pi_1(U, b) \to \pi_1(\mathbb{P}_*(\Gamma) \setminus D_\infty, b) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V(Y_b)) \end{aligned}$$

のように包含写像にともなう自然な準同型を経由する. 上記の古典的な Picard-Lefschetz 理論によりこのふたつの表現は絶対既約である.

一方，次の $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の完全系列が存在する．

$$0 \longrightarrow V(Y_b) \longrightarrow H_{n-1}(X_b;\mathbb{Q}) \longrightarrow V(\overline{X}_b) \longrightarrow 0. \tag{1.2.1}$$

まず双対同型 $H_{n-1}(X_b;\mathbb{Q}) \cong H^{n-1}(\overline{X}_b, Y_b;\mathbb{Q})$ が存在する．これより

$$\begin{aligned} H^{n-2}_{\mathrm{prim}}(Y_b;\mathbb{Q}) &:= \mathrm{Coker}\,(H^{n-2}(\overline{X}_b;\mathbb{Q}) \to H^{n-2}(Y_b;\mathbb{Q})), \\ H^{n-1}_{\mathrm{prim}}(\overline{X}_b;\mathbb{Q}) &:= \mathrm{Ker}\,(H^{n-1}(\overline{X}_b;\mathbb{Q}) \to H^{n-1}(Y_b;\mathbb{Q})) \end{aligned}$$

と置くことにより，完全系列

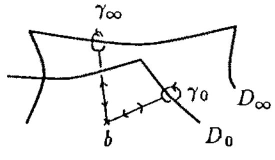
$$0 \to H^{n-2}_{\mathrm{prim}}(Y_b;\mathbb{Q}) \to H_{n-1}(X_b;\mathbb{Q}) \to H^{n-1}_{\mathrm{prim}}(\overline{X}_b;\mathbb{Q}) \to 0$$

が得られるが，射影空間のなかの超曲面の場合には自然な同型

$$H^{n-2}_{\mathrm{prim}}(Y_b;\mathbb{Q}) \cong V(Y_b), \quad \text{and} \quad H^{n-1}_{\mathrm{prim}}(\overline{X}_b;\mathbb{Q}) \cong V(\overline{X}_b)$$

が Poincaré duality から導かれるので完全系列 (1.2.1) が成立する．この完全系列 (1.2.1) は $H_{n-1}(X_b;\mathbb{Q})$ の混合ホッジ構造の weight filtration に対応している (cf. [D1])．したがって (1.2.1) はじつは $\pi_1(U,b)$ 加群としての完全系列にもなっている．つまり，$H_{n-1}(X_b;\mathbb{Q})$ への表現 ρ はふたつの既約表現 ρ_0 および ρ_∞ から“合成”されているわけである．特に表現 ρ は既約ではない．

部分空間 $V(Y_b) \subset H_{n-1}(X_b;\mathbb{Q})$ が $\pi_1(U,b)$ のモノドロミー作用で不変であるということは，上記の定理 2 と 3 を使うと次の定理 4 の形に言いかえることができる．いま，$\gamma_0 : I \to U$ を D_0 のまわりの単純ループ，$\gamma_\infty : I \to U$ を D_∞ のまわりの単純ループとする．ただし以下で U における単純ループというときは，それぞれの中心 c_0 および c_∞ は $D_0 \cap D_\infty$ には含まれておらず，かつそれぞれのディスクは $D_0 \cup D_\infty$ と中心のみで交わるものとする．



このふたつの単純ループに対して，消失サイクル $v[\gamma_\infty] \in V(Y_b)$ および $v[\gamma_0] \in V(\overline{X}_b)$ が符号を除いて unique に定まる．定理 3 より $V(Y_b)$ は $\mathbb{Q}[\pi_1(U)]$ 上 $v[\gamma_\infty]$ で生成される．

$v[\gamma_\infty]$ は上の準同型 (1.2.1) によって $H_{n-1}(X_b;\mathbb{Q})$ の元と見ることができるので，γ_0 にそったモノドロミー $[\gamma_0]_*$ が $v[\gamma_\infty]$ にも作用する．

定理 4. U における D_0 のまわりの任意の単純ループ γ_0，および U における D_∞ のまわりの任意の単純ループ γ_∞ に対して，$[\gamma_0]_*(v[\gamma_\infty]) = v[\gamma_\infty]$ が成立する．

II. われわれの目標は表現 ρ の変形でその general member が既約なものを構成することである．

2.1. Fulton-Deligne による Zariski 予想の解決 ([F], [D2]) により，U の点 u に対して補集合 $E_u := \mathbb{A}^n \setminus X_u$ の基本群は無限巡回群になることがわかる．基本的なアイディアは X_u のかわりにその補集合 E_u の $\mathbb{Z}$ をガロア群とする普遍被覆空間

$$F_u \longrightarrow E_u$$

の中間ホモロジー群 $H_n(F_u;\mathbb{Z})$ を考えることにある．

このアプローチは，[G] において，hypersurface singularity の versal deformation family の上でのモノドロミー表現に対して取られたものである．Givental' はこの論文で，versal deformation の base space 上の discrimimant locus の補集合の基本群の一般化された Burau 表現を，幾何学的なモノドロミー表現として得ることに成功している．

しかしながら，$\pi_1(U,b)$ の $H_n(F_b;\mathbb{Z})$ 上へのモノドロミー表現は構成できない．なぜならば E_u の普遍被覆 F_u が U の上で universal に構成できないからである．そのために，次の空間 $\mathcal{U}$ を考える．$\Gamma^\times$ で $\Gamma \setminus \{0\}$ を表わす．射影空間 $\mathbb{P}_*(\Gamma)$ は $\Gamma^\times/\mathbb{C}^\times$ に他ならない．$pr:\Gamma^\times \to \mathbb{P}_*(\Gamma)$ を自然な projection とし，

$$\mathcal{U} \;:=\; pr^{-1}(U)$$

と置く．自然な写像 $\mathcal{U} \to U$ は $\mathbb{C}^\times$ 束であるから，$\pi_1(\mathcal{U})$ は $\pi_1(U)$ の巡回群による中心拡大となる．実は Ker $[\pi_1(\mathcal{U}) \to \pi_1(U)] \cong \mathbb{Z}$ がわかる．さて，$\mathcal{U}$ の点 u を指定することは，$\mathbb{P}^n$ のなかの H_∞ と transverse に交わる非特異射影超曲面の定義方程式 $f_u \in \Gamma$ を与えることと同値である．無限遠超平面 H_∞ を定義する $h \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$ をひとつ選び以後固定する．このとき f_u に対して，多項式写像 $\phi_u : \mathbb{A}^n \to \mathbb{C}$ が $\phi_u := f_u/h^d$ により定義される．アフィン超曲面 X_u の補集合 E_u はこの写像による $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ の引き戻しに他ならず，

さらに $\phi_u : E_u \to \mathbb{C}^\times$ は基本群の同型を引き起こす．したがって普遍被覆 $F_u \to E_u$ を，指数関数 $\exp : \mathbf{C} \to \mathbb{C}^\times$ の $\phi_u : E_u \to \mathbb{C}^\times$ による引き戻しとして定義することができる：

$$\begin{array}{ccc} F_u & \longrightarrow & E_u \\ \Big\downarrow & \square & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_u} \\ \mathbf{C} & \underset{\exp}{\longrightarrow} & \mathbb{C}^\times . \end{array}$$

この構成ならば，すべての $u \in \mathcal{U}$ に対して universal に施すことができる．したがって $\mathcal{U}$ 上に F_u をファイバーとする局所自明な族がつくれ，$\pi_1(\mathcal{U}, b)$ の $H_n(F_b;\mathbb{Z})$ 上のモノドロミー表現が得られることになる．

さらに，各 $u \in \mathcal{U}$ に対して，$\mathrm{Gal}\,(F_u/E_u)$ は自然に $\pi_1(\mathbb{C}^\times) \cong \mathbb{Z}$ と同型であり，この群の $H_n(F_u)$ への表現は $\pi_1(\mathcal{U})$ のモノドロミーによる作用と可換になる．$\mathrm{Gal}\,(F_u/E_u) = \pi_1(\mathbb{C}^\times)$ の反時計周りのループで表わされる生成元の作用を q による multiplication と考えることによって，$H_n(F_u)$ はローラン多項式の環 $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 上の加群となり，モノドロミー表現は $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 加群上の表現になる．この表現を $\tilde{\rho}$ と書こう:

$$\tilde{\rho} \;:\; \pi_1(\mathcal{U}, b) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\,\mathbb{Z}[q,q^{-1}]}\,(H_n(F_b;\mathbb{Z})).$$

この表現がわれわれの研究の中心テーマである．

底空間を U から $\mathcal{U}$ に拡大しなければならないこと，つまり $\mathcal{U}$ 上の族 $\{F_u\}$ が U 上の族の引き戻しとしては得られないことは次の命題からわかる．

命題 1. 自然な projection $\mathcal{U} \to U$ のファイバー ($\cong \mathbb{C}^\times$) 上の反時計周りのループで表わされる $\pi_1(\mathcal{U})$ の元 $\mathfrak{c}$ の $H_n(F_b)$ への作用は q 倍と等しい．

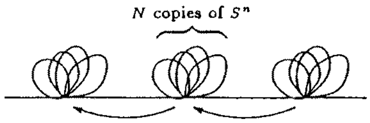
証明. ループ $\gamma : I \to \mathcal{U}$ を $f_{\gamma(t)} = e^{2\pi i t} f_b$ で定義する．このループは $\mathfrak{c}$ を表わす．このループにそって点 u が動く時，$E_{\gamma(t)}$ は $\mathbb{A}^n$ のなかで動かないが，多項式写像 $\phi_{\gamma(t)} : E_{\gamma(t)} \to \mathbb{C}^\times$ は $\phi_{\gamma(t)} = e^{2\pi i t}\phi_b$ と変化する．これは E_b を $\mathbb{C}^\times$ の上で反時計周りに一回転させることに等しい．よって F_b 上に $\mathrm{Gal}\,(F_b/E_b)$ の生成元に対応する deck transformation を引き起こす．

2.2. Libgober [Li; Corollary 1.2] によれば E_b は S^1 と $N := (d-1)^n$ 個の S^n のブーケとホモトピー同値である:

$$E_b \;\sim\; S^1 \vee \underbrace{S^n \vee \cdots \vee S^n}_{N \text{ times}}.$$

したがって $H_n(E_b)$ は階数 N の自由 $\mathbb{Z}$ 加群であり，$H_n(F_b)$ は階数 N の自由 $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 加群である．

$F_b \quad \sim$



the deck transformation corresponding to q

実はより強く次のことがいえる．

命題 2. $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 加群としての同型 $H_n(F_b) \cong H_n(E_b) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ で，$q \mapsto 1$ として得られる準同型 $H_n(F_b) \to H_n(E_b)$ が被覆写像 $F_b \to E_b$ によって引き起こされる準同型と一致するものが存在する．とくにこの準同型 $H_n(F_b) \to H_n(E_b)$ は $\pi_1(\mathcal{U})$ 加群としての準同型である．

たとえば，ブーケ $S^1 \vee S^n \vee \cdots \vee S^n$ の各 S^n に対して，その普遍被覆による逆像は可算無限個の S^n の disjoint union になっているが，そのなかからひとつ選び，こうして得られた N 個の S^n のホモロジー類を $H_n(F_b)$ の $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 上の基底として $H_n(F_b) \cong H_n(E_b) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ を構成すれば，求める同型が作れる．もちろん，E_b と $S^1 \vee S^n \vee \cdots \vee S^n$ のホモトピー同値の取りかたは unique ではないし，逆像のなかからひとつの S^n を選ぶ方法には任意性があるので，この同型は自然なものとは程遠い．

一方，$H_n(E_b)$ と $H_{n-1}(X_b)$ は自然に (つまり $\pi_1(U)$ 加群として) 同型であることが簡単にわかる．これと，上記の命題を組み合わせることによりつぎの系が得られる．

系. $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 加群としての同型

$$H_n(F_b) \quad \cong \quad H_{n-1}(X_b) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[q,q^{-1}] \tag{2.2.1}$$

で，$q \mapsto 1$ として得られる準同型 $H_n(F_b) \to H_{n-1}(X_b)$ が $\pi_1(\mathcal{U})$ 加群としての準同型であるものが存在する．

注意していただきたいのは，同型 (2.2.1) は $\pi_1(\mathcal{U})$ 加群としての同型では<u>ない</u>ということである．

$\alpha \in \mathbb{C}^\times$ をひとつとり，q と α を同一視することによって $\mathbb{C}$ を $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 加群とみなす．同型 (2.2.1) により，

$$H_n(F_b) \otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]} \mathbb{C} \;\cong\; H_{n-1}(X_b) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \;\cong\; H_{n-1}(X_b;\mathbb{C})$$

が得られる．モノドロミー表現 $\tilde{\rho}$ を $q=\alpha$ で evaluate することにより，表現

$$\rho(\alpha) \;:\; \pi_1(\mathcal{U},b) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(H_{n-1}(X_b;\mathbb{C}))$$

が得られる．上記の系に記述された同型 (2.2.1) の性質は，表現 $\rho(1)$ が 1.2 で得られた古典的なモノドロミー表現 $\rho\otimes\mathbb{C}$ (と自然な準同型 $\pi_1(\mathcal{U}) \to \pi_1(U)$ を合成したもの) と一致することを示している．こうして 0 でない複素数 α をパラメーターとする $\rho\otimes\mathbb{C}$ の変形 $\{\rho(\alpha)\}$ が構成された．

2.3. この解説の主結果は次の定理である．$\mathbb{Q}(q)$ を $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ の商体とする．

既約性定理. $\pi_1(\mathcal{U},b)$ の表現 $\tilde{\rho}\otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]}\mathbb{Q}(q)$ は絶対既約である．

系. $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ が超越数ならば $\rho(\alpha)$ は既約表現である．

完全系列 (1.2.1) の存在により表現 $\rho\otimes\mathbb{C}=\rho(1)$ は既約ではなかった．したがって，ここで構成された変形 $\{\rho(\alpha)\}$ は non-trivial であることがわかる．パラメーター α が 1 からずれるとふたつの絶対既約な表現 ρ_0 と ρ_∞ が "融合" されてひとつの大きな既約表現になるわけである．

2.4. この既約性定理は，アルティンの組ひも群の被約 Burau 表現がパラメーター q を一般にとったときに既約になるというよく知られた事実 (cf. [A]) の一般化であるとみなすことができる．このことをみるために，$n=1$ の場合を考えよう．このとき $\pi_1(U)$ は d 本の紐のなす組ひも群 B_d と同型になる．一方，$n=1$ のときには，自然な projection $\mathcal{U}\to U$ には section s が存在する．なぜなら，t を $H_\infty=\{t=\infty\}$ なる $\mathbb{P}^1$ 上のアフィン座標とするとき，X_u を定義する標準的な定義方程式として，t^d の係数が 1 であるものをとることができるからである．F_u を，$\exp:\mathbf{C}\to\mathbb{C}^\times$ の $\phi_u : E_u \to \mathbb{C}^\times$ による引き戻しとして定義する．$n\geq 2$ の時と異なり，$F_u \to E_u$ は普遍被覆ではない．こうして得られる B_d の表現

$$B_d \xrightarrow{s_*} \pi_1(\mathcal{U}) \xrightarrow{\tilde{\rho}} \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]}(H_1(F_b))$$

は被約 Burau 表現に他ならない (cf. [Li; p.127]).

III. 既約性定理の証明には，通常の Picard-Lefschetz 理論と同じように単純ループに付随したモノドロミーを記述する Picard-Lefschetz 型の公式と，モノドロミー群の群環上の加群としての生成元の記述を必要とする．しかし，射影多様体の場合とことなり，F_u はコンパクトではないので，Picard-Lefschetz の公式に必要な交点形式を定めるためには F_u に適当な境界を設定しなくてはならない．

3.1. $\mathcal{U}$ 上の連続関数 $\varepsilon : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_{>0}$ で十分小さいものをとり，次のように定義する．

$$\partial_0 \mathbb{C}_u^\times := \{\ z \in \mathbb{C}^\times\ ;\ |z| \le \varepsilon(u)\}, \quad \text{and} \quad \partial_\infty \mathbb{C}_u^\times := \{\ z \in \mathbb{C}^\times\ ;\ |z| \ge \varepsilon(u)^{-1}\}.$$

E_u のふたつの境界 $\partial_0 E_u$，$\partial_\infty E_u$，および F_u のふたつの境界 $\partial_0 F_u$，$\partial_\infty F_u$ をそれぞれ $\phi_u : E_u \to \mathbb{C}^\times$，および $F_u \to E_u \to \mathbb{C}^\times$ による $\partial_0 \mathbb{C}_u^\times$，$\partial_\infty \mathbb{C}_u^\times$ の引き戻しとして定義する．以下，混乱のおそれのない限り，たとえば空間対 $(F_u, \partial_\infty F_u)$ は (F_u, ∂_∞) と略記することにする．

空間対 $(E_u, \partial_0), (E_u, \partial_\infty), (F_u, \partial_0), (F_u, \partial_\infty)$ の homeomorphism type は $\varepsilon(u)$ が十分に小さい限り，実連続関数 ε のとりかたによらない．さらに，相対ホモロジー群 $H_n(F_u, \partial_0)$, $H_n(F_u, \partial_\infty)$ は $H_n(F_u)$ と同様に $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 加群とみなすことができ，$\pi_1(\mathcal{U}, b)$ がモノドロミーとして作用している．自然な準同型 $H_n(F_b) \to H_n(F_b, \partial_0)$ および $H_n(F_b) \to H_n(F_b, \partial_\infty)$ は群環 $\mathbb{Z}[q, q^{-1}][\pi_1(\mathcal{U}, b)]$ 上の加群としての準同型になっている．

3.2. まずホモロジー群 $H_n(F_u), H_n(F_u, \partial_0), H_n(F_u, \partial_\infty)$ の $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 加群としての構造を調べよう．

命題 3. (1) $H_n(F_u), H_n(F_u, \partial_0), H_n(F_u, \partial_\infty)$ はいずれも階数 $N := (d-1)^n$ の自由 $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 加群である．(2) 自然な準同型 $H_n(F_u) \to H_n(F_u, \partial_0), H_n(F_u) \to H_n(F_u, \partial_\infty)$ はともに単射である．とくに，$H_n(F_u) \to H_n(F_u, \partial_0)$ の像は $(1-q)H_n(F_u, \partial_0)$ となる．(3) これらの準同型は $\mathbb{Q}(q)[\pi_1(\mathcal{U}, b)]$ 加群としての同型

$$H_n(F_b) \otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]} \mathbb{Q}(q) \ \cong\ H_n(F_b, \partial_0) \otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]} \mathbb{Q}(q) \ \cong\ H_n(F_b, \partial_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]} \mathbb{Q}(q)$$

を引き起こす．

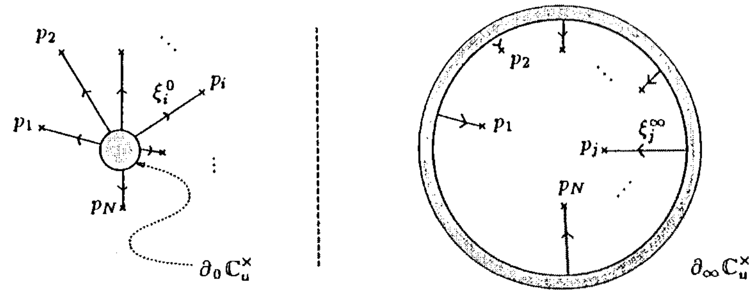
以上の事実から，モノドロミー表現 $\tilde{\rho} \otimes_{\mathbb{Z}[q,q^{-1}]} \mathbb{Q}(q)$ を調べるためには，$\pi_1(\mathcal{U})$ の $H_n(F_b, \partial_0)$ および $H_n(F_b, \partial_\infty)$ への作用を調べればよいことがわかる．実は，こちらのほうが容易なの

である．なぜならば，$H_n(F_b,\partial_0)$ および $H_n(F_b,\partial_\infty)$ の $\mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ 上の基底をなす N 個のサイクルは具体的に書き下すことができるからである．

まず，$u \in \mathcal{U}$ を十分一般の位置にとる．$\phi_u : E_u \to \mathbb{C}^\times$ の臨界点は

$$\frac{\partial \phi_u}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial \phi_u}{\partial x_n} = 0$$

の解であるから，その個数はちょうど $N = (d-1)^n$ 個あることがわかる．さらに，これらの臨界点はすべて非退化であるとしてよい．$q_1,\dots,q_N$ をこれらの臨界点とし，$p_1,\dots,p_N$ を $\phi_u(q_i) = p_i$ なる臨界値とする．ε は十分小さいとしたから，p_i はどれも $\partial_0\mathbb{C}_u^\times \cup \partial_\infty\mathbb{C}_u^\times$ には含まれていないとしてよい．さらに，u は一般に選んだから，$\arg(p_i)$ $(i = 1,\dots,N)$ はどれも異なるとしてよい．下の図のように $\mathbb{C}^\times$ 上の道 ξ_i^0, ξ_i^∞ $(i = 1,\dots,N)$ をとる．各 $\xi_i^0 : I \to \mathbb{C}^\times$ (resp. $\xi_i^\infty : I \to \mathbb{C}^\times$) は $\partial_0\mathbb{C}_u^\times$ (resp. $\partial_\infty\mathbb{C}_u^\times$) から p_i へ至る道であり，単射で p_i 以外の臨界値を通らず，またお互いに disjoint である．図において影をつけたところが境界である．



the paths ξ_i^0 the paths ξ_i^∞

さて，非退化な臨界点 q の下にある臨界値を終点とし終点以外では臨界値を通らない道 ξ があたえられたとき，ξ 上の各点のファイバーのなかにある，q で消える消失サイクルをつなぎあわせることによって，E_u のなかに，その道の上にのった thimble がえられる．$(n-1)$ 次元球面 S^{n-1} 上のコーンを CS^{n-1} とする．各消失サイクルは，ファイバーのなかに埋め込まれた S^{n-1} で表わされているから thimble は E_u のなかにはめ込まれた CS^{n-1} で表わされる．コーンの頂点は臨界点 q であり，コーンの底面となる S^{n-1} は ξ の始点上のファイバーに含まれている．

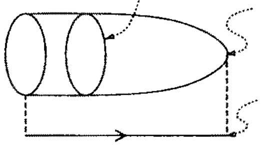


Figure of the thimble

ここで上にとった道 ξ_i^0 および ξ_i^∞ の上にある thimbles をそれぞれ $\Theta_i^0 \subset E_u$ および $\Theta_i^\infty \subset E_u$ としよう．これらは，空間対 (E_u, ∂_0) および (E_u, ∂_∞) のなかの n サイクルを定める．そのホモロジー類を $\theta_i^0 \in H_n(E_u, \partial_0)$，および $\theta_i^\infty \in H_n(E_u, \partial_\infty)$ で表わす．

命題 4. ホモロジー類 $\theta_1^0, \ldots, \theta_N^0$ は $H_n(E_u, \partial_0)$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底をなし，ホモロジー類 $\theta_1^\infty, \ldots, \theta_N^\infty$ は $H_n(E_u, \partial_\infty)$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底をなす．

被覆写像 $F_u \to E_u$ は étale morphism であるから，E_u 内の thimbles $\Theta_i^0, \Theta_i^\infty$ は F_u に持ち上がり，空間対 $(F_u, \partial_0), (F_u, \partial_\infty)$ のなかの n サイクル $\tilde{\Theta}_i^0, \tilde{\Theta}_i^\infty$ を定める．それぞれのホモロジー類を $\tilde{\theta}_i^0 \in H_n(F_u, \partial_0), \tilde{\theta}_i^\infty \in H_n(F_u, \partial_\infty)$ で書き表す．持ち上げ方には $\mathrm{Gal}\,(F_u/E_u)$ の作用の分だけ不定性がある．したがって，$\tilde{\theta}_i^0, \tilde{\theta}_i^\infty$ は up to $\{\, q^\nu\,;\, \nu \in \mathbb{Z}\,\}$ でのみ unique に定まる．

命題 5. ホモロジー類 $\tilde{\theta}_1^0, \ldots, \tilde{\theta}_N^0$ は $H_n(F_u, \partial_0)$ の $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 上の基底をなし，ホモロジー類 $\tilde{\theta}_1^\infty, \ldots, \tilde{\theta}_N^\infty$ は $H_n(F_u, \partial_\infty)$ の $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 上の基底をなす．

このふたつの命題を用いることにより，

$$\theta_i^0 \otimes 1 \mapsto \tilde{\theta}_i^0, \qquad \theta_i^\infty \otimes 1 \mapsto \tilde{\theta}_i^\infty$$

で与えられる準同型は，$\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 加群としての同型

$$H_n(E_u, \partial_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[q, q^{-1}] \cong H_n(F_u, \partial_0), \quad H_n(E_u, \partial_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[q, q^{-1}] \cong H_n(F_u, \partial_\infty)$$

を引き起こす．ここで，$\pi_1(\mathcal{U}, b)$ 加群としての同型

$$H_{n-1}(X_b) \quad \cong \quad H_n(E_b, \partial_0)$$

が存在することに注意する．これは $H_n(E_b, \partial_0)$ の元 θ_i^0 に対し，thimble Θ_i^0 の底面となっている消失サイクルのホモロジー類（$H_{n-1}(X_b)$ の元とみなすことができる）を対応させることにより得られる．同型 (2.2.1) は上の式の最初の同型

$$H_n(E_u, \partial_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[q, q^{-1}] \cong H_n(F_u, \partial_0)$$

と，自然な同型 $H_{n-1}(X_b) \cong H_n(E_b, \partial_0)$ および命題 3(2) で与えられた $(1-q)$ 倍写像で得られる同型

$$(1-q)^{-1} \quad : \quad H_n(F_b, \partial_0) \quad \cong \quad H_n(F_b)$$

を組み合わせることで得られる．(2.2.1) が $\pi_1(\mathcal{U}, b)$ 加群としての同型でないのは，上で注意したように，thimbles の F_b への持ち上げ方に不定性があるためである．

3.3. $\partial_0 F_u \cap \partial_\infty F_u = \emptyset$ であるから通常の交点形式

$$\langle\ ,\ \rangle \quad : \quad H_n(F_u, \partial_\infty) \times H_n(F_u, \partial_0) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

が定義されていることに注意する．この交点形式は $\mathrm{Gal}(F_u/E_u)$ 不変である．つまり $\langle x, y\rangle = \langle qx, qy\rangle$ が任意の x, y に対して成立する．Picard-Lefschetz の公式を述べるために，交点形式

$$\begin{array}{lllllll} (\ ,\ )_0 & : & H_n(F_u, \partial_\infty) & \times & H_n(F_u, \partial_0) & \longrightarrow & \mathbb{Z}[q, q^{-1}], \qquad \text{and} \\ (\ ,\ )_\infty & : & H_n(F_u, \partial_0) & \times & H_n(F_u, \partial_\infty) & \longrightarrow & \mathbb{Z}[q, q^{-1}], \end{array}$$

を次の式で定義する．ローラン多項式 $a = a(q) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ に対し $\bar{a}$ を $\bar{a}(q) := a(q^{-1})$ と定める．

$$(x, y)_0 := \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \langle x, q^\nu y\rangle q^\nu, \qquad (x, y)_\infty := \overline{(y, x)_0}.$$

定義から直ちにわかるように，これらの交点形式は次のエルミート性をもつ: $(\ ,\ )_0$ についてのみ記すと

$$(ax, y)_0 = a(x, y)_0, \qquad (x, ay)_0 = \bar{a}(x, y)_0.$$

命題 6. これらの交点形式は非退化である．

実際，thimbles の持ち上げかたをうまく選べば，$\widetilde{\Theta}_i^0$ と $\widetilde{\Theta}_j^\infty$ は $i = j$ のときコーンの頂点のみで transverse に交わり，$i \neq j$ のとき disjoint となるようにできるようにできる．さらに，Θ_i^0 の別の lift，つまり $q^\nu \widetilde{\Theta}_i^0$ $(\nu \neq 0)$ に対しては $q^\nu \widetilde{\Theta}_i^0 \cap \widetilde{\Theta}_j^\infty = \emptyset$ が任意の i, j に対して成立するようにできる．したがって，これらの thimbles のホモロジー類のなす基底により，上のふたつの交点形式は ± 1 を対角成分とする対角行列で表わされる．

3.4. $\Gamma^\times$ のなかの超曲面 $\mathcal{D}_0$ および $\mathcal{D}_\infty$ を，それぞれ $\mathbb{P}_*(\Gamma)$ のなかの超曲面 D_0, D_∞ の自然な projection $\Gamma^\times \to \mathbb{P}_*(\Gamma)$ による引き戻しとして定義する．$\mathcal{U} \subset \Gamma^\times$ は $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_\infty$ の補集合である．

定理 2_q. (Picard-Lefschetz formula の q-analogue)

(0) γ_0 を $\mathcal{U}$ のなかの $\mathcal{D}_0$ のまわりをまわる単純ループとする．このとき，ある pair $(v[\gamma_0], v^{\check{}}[\gamma_0]) \in H_n(F_b, \partial_\infty) \times H_n(F_b, \partial_0)$ が存在して，$[\gamma_0] \in \pi_1(\mathcal{U}, b)$ の $H_n(F_b, \partial_\infty)$ への作用は

$$x \quad \mapsto \quad x + (x, v^{\check{}}[\gamma_0])_0 \cdot v[\gamma_0]$$

と書ける．さらに $v[\gamma_0] = \pm(1-q)v^{\check{}}[\gamma_0] \in H_n(F_b)$ が成立する．

(∞) γ_∞ を $\mathcal{U}$ のなかの $\mathcal{D}_\infty$ のまわりをまわる単純ループとする．このとき，ある pair $(v[\gamma_\infty], v^{\check{}}[\gamma_\infty]) \in H_n(F_b, \partial_0) \times H_n(F_b, \partial_\infty)$ が存在して，$[\gamma_\infty] \in \pi_1(\mathcal{U}, b)$ の $H_n(F_b, \partial_0)$ への作用は

$$x \quad \mapsto \quad x + (x, v^{\check{}}[\gamma_\infty])_\infty \cdot v[\gamma_\infty]$$

と書ける．

0-side と ∞-side の間にきれいな対称性が成立していることに注目していただきたい．

証明の方針は次の通りである．命題 5 で述べたように，$H_n(F_u, \partial_0)$ および $H_n(F_u, \partial_\infty)$ は ϕ_u の臨界値を終点とする $\mathbb{C}^\times$ のなかの道の上の thimbles の F_u への持ち上げ $\widetilde{\Theta}_i^0, \widetilde{\Theta}_i^\infty$ によって表わされるホモロジー類を基底にもつ．これらの lifted thimbles のホモロジー類は，$\mathbb{C}^\times$ 上の道のホモトピー類と lifting の指定によって決定される．$H_n(F_b, \partial_0)$ や $H_n(F_b, \partial_\infty)$ へのモノドロミー作用をみるには，これらの lifted thimbles がどのように動くかを見ればよいわけであるが，そのためには，$\mathbb{C}^\times$ の上で道がどのように変化するかを見ればよく，さらにそのためには，道の終点である ϕ_u の臨界値がどのように動くかを見ればよい．

3.5. 定理 3 に対しても q-analogue が成立する．

定理 3_q. γ_0 を $\mathcal{U}$ のなかの $\mathcal{D}_0$ のまわりをまわる任意の単純ループとする．このとき，$H_n(F_b)$ は群環 $\mathbb{Z}[q, q^{-1}][\pi_1(\mathcal{U}, b)]$ 上の加群として，ただひとつの元 $v[\gamma_0]$ で生成される．

3.6. 古典的なモノドロミー ρ と，その変形 $\tilde{\rho}$ の間にもっとも大きな違いをもたらすのは，$\tilde{\rho}$ に対しては定理 4 の逆が成立するという事実である．

定理 $\neg\, 4_q$. γ_∞ を $\mathcal{U}$ のなかの $\mathcal{D}_\infty$ のまわりの任意の単純ループとする．このとき，$\mathcal{U}$ のなかの $\mathcal{D}_0$ のまわりの単純ループ γ_0 が存在して $[\gamma_0]_*(v[\gamma_\infty]) \neq v[\gamma_\infty]$ となる．

さて，以上の準備のもとでわれわれは既約性定理を証明することができる．命題 3 (3) より，$\pi_1(\mathcal{U}, b)$ の $H_n(F_b) \otimes \mathbb{Q}(q)$ への作用を調べるためには定理 2_q を自由に使ってよいこ

とがわかる．とくに，$v[\gamma_0], v[\gamma_\infty], v^{\check{}}[\gamma_0], v^{\check{}}[\gamma_\infty]$ などはすべて $H_n(F_b)\otimes\mathbb{Q}(q)$ の元とみなしてもよい．x を $H_n(F_b)\otimes\mathbb{Q}(q)$ の任意の zero でない元とし，M を x を含む最小の部分 $\mathbb{Q}(q)[\pi_1(\mathcal{U})]$ 加群とする．M が全体に一致することを証明すればよい．そのためには，定理 3_q より，$\mathcal{D}_0$ のまわりの単純ループ γ_0 が存在して，M が $v[\gamma_0]$ を含むことをいえばよい．まず，Zariski の超平面切断定理により，$\pi_1(\mathcal{U},b)$ の任意の元は $\mathcal{D}_0$ または $\mathcal{D}_\infty$ のまわりの $\mathcal{U}$ のなかの単純ループの積で書けることがわかる．とくに，Ker $[\pi_1(\mathcal{U})\to\pi_1(U)]$ の生成元 $\mathfrak{c}$ も $\prod[\gamma_i]^{\delta_i}$ の形に書ける．（各 γ_i は $\mathcal{D}_0$ または $\mathcal{D}_\infty$ のまわりの $\mathcal{U}$ のなかの単純ループ，$\delta_i=\pm1$.）命題 1 より，$\mathfrak{c}_*(x)=qx\neq x$ だから，ある γ_m があって，$[\gamma_m]_*(x)\neq x$ となる．したがって定理 2_q より，$v[\gamma_m]\in M$ となる．もし，γ_m が $\mathcal{D}_0$ のまわりの単純ループなら，証明は終了する．γ_m が $\mathcal{D}_\infty$ のまわりの単純ループなら，定理 $\neg 4_q$ より，$\mathcal{D}_0$ のまわりの単純ループ γ_0 が存在して，$[\gamma_0]_*(v[\gamma_m])\neq v[\gamma_m]$，つまり $v[\gamma_0]\in M$ となり，証明が終わる．

3.7. γ_0 を $\mathcal{D}_0$ のまわりの単純ループとする．このとき次の式が成り立つ．

$$[\gamma_0]_*(v[\gamma_0]) \;=\; \pm q\cdot v[\gamma_0].$$

ここで符号は次元 n によってのみ定まる．したがって Picard-Lefschetz 公式より

$$([\gamma_0]-1)([\gamma_0]\pm q) \;\in\; \mathbb{Z}[q,q^{-1}][\pi_1(\mathcal{U},b)]$$

は $H_n(F_b)\otimes\mathbb{Q}(q)$ 上に 0 として作用する．つまり，われわれの表現 $\tilde{\rho}$ は，$\mathcal{D}_0$ のまわりの単純ループのホモトピー類に関しては，Hecke relation をファクターすることになる．

一方 $\mathcal{D}_\infty$ のまわりの単純ループに対してはどのような関係式が存在するのかまだわからない．この関係式，つまり $N\times N$ 行列 $\tilde{\rho}([\gamma_\infty])\in \mathrm{GL}_{\mathbb{Q}(q)}(H_n(F_b)\otimes\mathbb{Q}(q))$ の最小多項式を具体的に求めるというのは興味深い問題であると思われる．このことに関連する研究が [GN] にある．

References

[A]: Atiyah, M. F., *Representations of braid groups*, (notes by S. K. Donaldson), Geometry of Low-Dimensional Manifolds: 2, (S. K. Donaldson and C. B. Thomas, *eds.*), London Mathematical Society Lecture Note Series, **151**, Cambridge Univ. Press, 1990, 115-122

[D1]: Deligne, P., *Théorie de Hodge,* II, Publ. Math. IHES, **40** (1971), 5-58

[D2]: Deligne, P., *Le groupe fondamental du complément d'une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires est abélien (d'après W. Fulton),* Lecture Notes in Math., **842**, Springer-Verlag, Berlin, 1981, 1-10

[F]: Fulton, W., *On the fundamental group of the complement of a node curve,* Ann. Math., **111** (1980), 407-409

[G]: Givental', A. B., *Twisted Picard-Lefschetz formulas,* Funct. Analy. Appli., **22** (1988), 10-18

[GN]: García López, R and Némethi, A., *On the monodromy at infinity of a polynomial map, II,* preprint, alg-geom/9602009

[La]: Lamotke, K., *The topology of complex projective varieties after S. Lefschetz,* Topology, **20** (1981), 15-52

[Le]: Lefschetz, S., L'Analysis Situs et la Géométrie Algébrique, Gauthier-Villars, Paris, 1924

[Li]: Libgober, A., *Homotopy groups of the complements to singular hypersurfaces,* II, Ann. Math., **139** (1994), 117-144

[S]: Shimada, I., *Picard-Lefschetz theory for the universal coverings of complements to affine hypersurfaces,* Publ. Res. Inst. Math. Sci., **32**, to appear

address

Department of Mathematics, Faculty of Science, Hokkaido University, Sapporo 060, Japan

shimada@math.hokudai.ac.jp