代数幾何学シンポジウム記録
1996年度 pp.113-118

正規化が $\mathbb{A}^1$ になるアファイン平面曲線

高橋宣能

§1. はじめに

カラビヤウ多様体やファノ多様体上の曲線、特に有理曲線、の数え上げについて、ミラー対称性や量子コホモロジーといったもののおかげで最近いろいろとわかってきている ([KM], [RT], [CdGP], [Ms], [K], [G], [CH], [R])。これらの一般化として、開多様体上のアファイン曲線、特に $\mathbb{A}^1$、の数え上げという問題が考えられる。

[T] では、非特異 3 次曲線 B をとり、被約かつ既約な d 次平面曲線 C であって $C\backslash B$ の正規化が $\mathbb{A}^1$ になるもの (これを仮に特異アファイン直線とよぶ) の数を調べた。B の変曲点をひとつ取って B を群とみると $C \cap B$ は $3d$-torsion になっているが、位数 $3d$ の点 P をとっておいて $C \cap B = \{P\}$ となっているような特異アファイン直線 C の数 n_d について、[T] では次の結果を得た：$d = 1, 2, ..., 7$ のとき $n_d = 1, 1, 3, 16, 113, 948, 8974$ 、ただし $d \geq 5$ では n_d は多重度付きで数えてあり、また $d = 7$ ではある仮定が必要。

ここでは、 B が直線の場合に d 次特異アファイン直線 C のなす $|dH|$ (H は直線) の部分集合の次数 M_d を調べる。(B が非特異 2 次曲線のときも同様にできる。)

...... という話だったのだが、最近 [CH] をちゃんと読んでみると、B が直線の場合に、任意の次数、二重点の個数、B との接し方の指定についてそのような (被約) 曲線たちのなす集合の次数に関する漸化式が得られていた。M_d もそれらの内に含まれるので、M_d が分かるというのは新しい結果ではないことになるが、ここでの方法は Kontsevich の方法の一般化であり、特に M_d(および m_d) だけで閉じた式になっているという点でいくらかの面白みはあると思う ([CH] で得られた線形の漸化式とここでの非線形の漸化式との関係は？等)。

§2 特異アファイン直線の空間の次元

以下、$\mathbb{C}$ 上で考える。

$B \subset \mathbb{P}^2$ を直線として、$\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \backslash B$ と考える。このとき被約かつ既約な d 次平面曲線 C であって $C\backslash B$ の正規化が $\mathbb{A}^1$ になるものを特異アファイン直線とよぶことにする。このとき、特異アファイン直線たちのなす集合の次元が期待される次元以下であり、"余分" な特異点を持つものたちのなす集合はさらに小さい次元をもつことを示す。

Proposition 2.1. H を直線の因子類とする。

(1) $V \subset |dH|$ を B と k 点で交わる有理曲線の集合とするとき、$\dim V \leq 2d+k-1$。

(2) $V \subset |dH|$ を特異アファイン直線であって $\mathbb{A}^2$ 内に *ordinary node* より悪い特異点をもつか B の近くで *smooth* でないものたちのなす集合とすると、$\dim V < 2d$。

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(3) $V \subset |dH|$ を B とただ *1* 点で交わる有理曲線で B の近くで *immersive* でないもののなす集合とすると、$\dim V < 2d$。

Proof. 例として、(3) を証明する。

主張が成り立たないと仮定すると、次のような曲面 X 、非特異曲線 D と支配的射 $f : \mathbb{P}^1 \times D \to X$ が存在する: X は $\mathbb{P}^2$ の $P \in B, P_1, \ldots, P_{2d-2} \in \mathbb{P}^2 \setminus B$ でのブローアップ、$C := f(\mathbb{P}^1 \times \{p\})$ $(p \in D)$ として $C \sim dH - \sum E_i - mE$ 、ただし H は直線の引戻し、E_i, E は P_i, P 上の例外因子、$\deg((f^{-1}B)_{\mathrm{red}}/D) < m$、ただし $B \subset \mathbb{P}^2$ の X への引戻しを再び B と書く。ここで $K_{\mathbb{P}^1 \times D} + (f^{-1}(B))_{\mathrm{red}} \geq f^*(K_X + B)$ が成り立つから、両辺に $\mathbb{P}^1 \times \{p\}$ (p は D の一般の点) を掛けると矛盾を得る。 □

次に、後で使う変形に関する命題と補題を述べておく。

Proposition 2.2. *([Mr]* の *Proposition 3* の *log* 版*)* S をネター的スキーム、$\mathcal{X} \to S$ を多様体の族、$\mathcal{B}_i$ を $\mathcal{X}$ 上の *Cartier* 因子、$\mathcal{C} \to S$ を平坦かつ *proper* なスキーム族、$\mathcal{D}_i$ を $\mathcal{C}$ 上の *Cartier* 因子で S 上平坦なものとする。ファイバーを X_s 等と書く。

$\mathcal{M}$ を、射 $f : C_s \to X_s$ であってスキーム論的に $f^{-1}B_{i,s} \subseteq D_{i,s}$ かつ任意の I について $f(\cap_{i \in I} SuppD_{i,s})$ の近くで $B_{i,s}$ *(*$i \in I$*)* たちが S 上正規交差しているものたちをパラメター付けするスキームとする。*(*特に、$I = \phi$ については $\mathcal{X}$ が $f(C_s)$ の近くで S 上滑らかになっており、$I = \{i\}$ については $B_{i,s}$ が $f(SuppD_{i,s})$ の近くで S 上滑らかになっているものとする。*)*

$\mathcal{M}$ の点 $[f : C_s \to X_s]$ について、$f^*T_{X_s}$ の局所自由な部分層 $\mathcal{T}$ を次のように構成する*:* P が $\cap_{i \in I} SuppD_{i,s}$ に含まれ、他の $D_{i,s}$ に含まれないとき、ϕ_i を $D_{i,s}$ の定義式、$(x_i)_{i \in I \cup I'}$ を、$i \in I$ について $B_{i,s} = (x_i = 0)$ となるような座標系として、P の近くで

$$\mathcal{T} = \left(\oplus_{i \in I} \mathcal{O}_{C_s} \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \oplus \left(\oplus_{i \in I'} \mathcal{O}_{C_s} \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

これは ϕ_i, x_i の取り方によらない。

このとき M_s の $[f]$ での接空間は $H^0(C_s, \mathcal{T})$ に同型で、$\mathcal{M}$ の $[f]$ での完備化は $H^0(C_s, \mathcal{T}) \times S$ の完備化の中で $h^1(C_s, \mathcal{T})$ 本の方程式で定義される。

Proof. [Mr] の Proposition 3 と同様。 □

Remark.. 上の定義で P の近くで $f^*B_{i,s} = D_{i,s}$ ならば、$\mathcal{T}$ は $f^*T_{X_s}(-\log \sum_{i \in I} B_{i,s})$ になる。

Lemma 2.3. X を曲面、B_i を X 上の *Cartier* 因子、C を被約 *2* 次曲線、D_i を C 上の *Cartier* 因子とする。$f : C \to X$ を $SuppD_i$ の近くで $f^*B_i = D_i$ が成り立ち、任意の I について $f(\cap_{i \in I} SuppD_i)$ の近くで B_i*(*$i \in I$*)* たちが正規交差しているような射とする。

f^*T_X の局所自由部分層 $\mathcal{T}$ を、$\cap_{i \in I} SuppD_i$ に含まれ、他の D_i に含まれない点 P の近くで $T_X(-log \sum_{i \in I} B_i)$ によって定める。

次のことを仮定する*:*

C が既約のとき、f は $Supp \sum D_i$ の外で *immersive*、$\#Supp \sum D_i \leq 3$ かつ $\deg \mathcal{T} \geq 1 - \#Supp \sum D_i$、

$C = C_1 \cup C_2$ が可約のとき、f は $Supp \sum D_i$ の外で各成分上で *immersive*、$\#Supp \sum D_i|_{C_1} \leq 3$、$\deg \mathcal{T}|_{C_1} \geq 1 - \#Supp \sum D_i|_{C_1}$、$\#Supp \sum D_i|_{C_2} \leq 2$ かつ $\deg \mathcal{T}|_{C_2} \geq 2 - \#Supp \sum D_i|_{C_2}$。

このとき、$H^1(C, \mathcal{T}) = 0$、 $h^0(C, \mathcal{T}) = \deg \mathcal{T} + 2$。 □

§3 $M_d = d.m_d$

Definition 3.1. $B \supset \mathbb{P}^2$ を直線とする。また $P_1, \ldots, P_{2d} \in \mathbb{P}^2 \backslash B$ と $P_0 \in B$ を一般の位置にある点とする。このとき、

$$M_d = \#\{C | \deg C = d, P_1, \ldots, P_{2d} \in C, (C \backslash B)^\nu \cong \mathbb{A}^1\},$$

$$m_d = \#\{C | \deg C = d, P_1, \ldots, P_{2d-1}, P_0 \in C, (C \backslash B)^\nu \cong \mathbb{A}^1\}$$

と定義する。

Theorem 3.1. $M_d = d.m_d$.

. *Proof.* P_{2d} を P_0 に近付けるとき、Proposition 2.1 を使うと、$P_1, \ldots, P_{2d}$ を通る特異アファイン直線の極限は $P_1, \ldots, P_{2d-1}, P_0$ を通る特異アファイン直線であることがわかる。さらに Proposition 2.2 を使うと次のことがわかる: $\mathbb{P}^2$ を $P_1, \ldots, P_{2d-1}, P_0$ でブローアップしたものを S、E_i を例外曲線、$\tilde{B}$ を B の引き戻し、H を直線の因子類の引き戻しとする。また、$Q_0, Q_1, Q_2 \in \mathbb{P}^1$ を異なる点とする。N を 射 $f : \mathbb{P}^1 \to S$ であって $\mathrm{Im}(f) \sim (dH - \sum E_i)$ かつ $f(Q_1) \in E_1, f(Q_2) \in E_2, f^*\tilde{B} = dQ_0$ なるものをパラメター付けするスキームとすると、($\dim N = 0$ であり) $M_d = \deg N$。

$[f]$ を N の点とするとき、Proposition 2.1(2) により f は immersive、Lemma 2.3、Proposition 2.2 により上の N の定義で $f^*\tilde{B} = dQ_0$ を外してえられるスキーム M は $[f]$ で非特異、d 次元である。

$\{Q_0\} \times M$ の、$\mathbb{P}^1 \times M$ における $[f]$ の近傍での定義方程式 t、S の P_0 の近くでの座標系 (x, y) が次のようにとれる: $E_0 = (x = 0), B' = (y = 0)(B' := \tilde{B} - E_0)$、universal morphism は $x = t - s, y = O(t^d) + kt^{d-1} + \sum_{i=0}^{d-2} s_i t^i$、ただし $s_i, s \in m_{M,[f]}$、$k \notin m_{M,[f]}$。$s_0 = \cdots = s_{d-2} = s = 0$ は $g^{-1}E \supseteq Q_0$、$g^{-1}B' \supseteq (d-1)Q_0$ なる射 g たちからなる M の部分スキームを定義するが、Lemma 2.3、Proposition 2.2 からこれは $[f]$ で被約な点となり、$s_0, \ldots, s_{d-2}, s$ は M の $[f]$ の近くでの座標系となる。

一方 N は $t^d | xy$ すなわち $ss_0 = ss_1 - s_0 = \cdots = ss_{d-2} - s_{d-3} = ks - s_{d-2} = 0$ で定義されるが、これの次数は d である。 □

§4 M_d, m_d の再帰的公式

次の定理を証明する:

Theorem 4.1. $d \geq 2$ のとき、

$$m_d = \sum_{k+l=d, k>0, l>0} k^2 m_k m_l \left\{ l \binom{2d-3}{2k-1} - k \binom{2d-3}{2k} \right\}.$$

そのために、まず 4 点付き $\mathbb{A}^1$ の moduli のある partial compactification を構成する。

$M_0 = \mathcal{M}_{0,5}$ を種数 0、5 点付きの安定曲線の moduli 空間とし、曲線の族 $\pi_0 : U_0 \to M_0$、切断 $\sigma_i : M_0 \to U_0$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ が universal family をなしているとする。以下、$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を $1, 2, 3, 4$ の置換とする。まず $E_0(\alpha, \beta; 1, 0) = E_0(\gamma, \delta; 0, 1)$ を、M_0 の点であって対応する曲線が可約かつσ_i が $\{\{\alpha, \beta, 5\}, \{\gamma, \delta\}\}$ のように分かれているようなものの軌跡の閉包とする。

次に以下のような帰納的操作を $k_1+l_1+k_2+l_2 \leq d$ である限り行なう: $E_i(\alpha,\beta;k_1,l_1)$ と $E_i(\alpha,\beta;k_2,l_2)$ が交わるとき、その交点をブローアップして M_{i+1} とし、例外曲線を $E_{i+1}(\alpha,\beta;k_1+l_1,k_2+l_2)$、$E_i(\alpha,\beta;k_1,l_1)$ の proper transform を $E_{i+1}(\alpha,\beta;k_1,l_1)$ などとする。このようにして、最終的に得られる曲面を M_n とすると、すべての互いに素な $k,l \geq 0$ で $k+l \leq d$ をみたすものに対して素因子 $E_n(\alpha,\beta;k,l)$ が得られる。

$\bar{M} = M_n$、$\bar{E}(\alpha,\beta;k,l) = E_n(\alpha,\beta;k,l)$ とし、$\bar{E}$ を、対応する曲線が可約であるような点の集合を台とする $\bar{M}$ 上の被約因子とする。

$$M^{(d)} := \bar{M}\backslash(\mathrm{Supp}(\bar{E} - \sum_{(k+l)|d} \bar{E}(\alpha,\beta;k,l)) \cup (\bar{E}(\alpha,\beta;k,l) \text{ たちの交わり})),$$

$E(\alpha,\beta;k,l) = \bar{E}(\alpha,\beta;k,l) \cap M^{(d)}$ とする。

Lemma 4.2.

$$\sum(k+l).\bar{E}(1,2;k,l) \sim \sum(k+l).\bar{E}(1,3;k,l).$$

□

$\pi' : U' \to M^{(d)}$ を U_0 の base change とする。また、$kl \neq 0$(resp. $(k,l) = (1,0)$ または $(k,l) = (0,1)$) のとき、$F'(\alpha,\beta;k,l)$ を、$\pi'^{-1}(E(\alpha,\beta;k,l))$ の既約成分であって σ_5 から引き起こされる切断と交わる (resp. 交わらない) ものとする。

Lemma 4.3. *$F'(\alpha,\beta;k,l) \subset U'$ を $E(\alpha,\beta;k,l)$ 上の切断につぶせる。それらすべてをつぶしたものを $\pi : U^{(d)} \to M^{(d)}$、引き起こされる切断を σ_i とすると、$D := d\sigma_5(M^{(d)})$ は Cartier であり、$E = E(\alpha,\beta;k,l)$ 上次のようになる:*

$(k,l) = (1,0)$ のとき、t を非斉次座標として $E \cong \mathbb{P}^1\backslash\{t = 0,1,\infty\}$、$\pi^{-1}(E) \cong \mathbb{P}^1 \times E$、$\sigma_\alpha(E) = \{0\} \times E$、$\sigma_\beta(E) = \{1\} \times E$、$\sigma_\gamma(E) = \sigma_\delta(E) = \{(t,t)\}$、$\sigma_5(E) = \{\infty\} \times E$。

$kl \neq 0$ のとき、t を非斉次座標として $E \cong \mathbb{P}^1\backslash\{t = 0,\infty\}$、$y_1, y_2$ を非斉次座標として $\pi^{-1}(E) \cong \{y_1y_2 = 0\} \subset \mathbb{P}^2 \times E$、$\sigma_\alpha(E) = \{(\infty,0)\} \times E$、$\sigma_\beta(E) = \{(1,0)\} \times E$、$\sigma_\gamma(E) = \{(0,1)\} \times E$、$\sigma_\delta(E) = \{(0,\infty)\} \times E$、$\sigma_5(E) = \{(0,0)\} \times E$、

$$D|_{\pi^{-1}(E)} = \{y_2^{\frac{ld}{k+l}} + t^{\frac{d}{k+l}} y_1^{\frac{kd}{k+l}} = 0\} \cap (\mathbb{A}^2 \times E).$$

□

Definition 4.1. $d \geq 2$ について、$M = M^{(d)}$ とおき、$P_i \in \mathbb{P}^2 (1 \leq i \leq 2d-1)$ を一般の位置にある点、$l_1, l_2 \subset \mathbb{P}^2$ を一般の位置にある直線とする。X を $\mathbb{P}^2$ の P_i でのブローアップ、E_i を例外因子とする。このとき、

$$\begin{aligned} N := &\{f \in Hom_M(U, X \times M) | \mathrm{Im}(f) \sim dH - \sum E_i, \\ &\sigma_i (i=1,2) \text{ の近くで } f^*l_i = \sigma_i, f^*E_1 = \sigma_3, f^*E_2 = \sigma_4, f^*B = D, \\ &f \text{ は birational}\}, \end{aligned}$$

(に然るべきスキーム構造を入れたもの) とする。$p : N \to M$ を自然な射とする。

Lemma 4.5. *(1)* $p^{-1}E(\alpha,\beta;k,l)$ の近くで N は純 *1* 次元完全交差スキーム、$p^{-1}E(\alpha,\beta;k,l)$ は有限集合。

(2) 自然な射 $N \to \bar{M}$ は $\bar{E}(\alpha,\beta;k,l)$ の近くで *proper*。

Proof. (1) Proposition 2.2 より $N' := p^{-1}E(\alpha,\beta;k,l)$ の次元が 0 であることを示せばよいが、これは Proposition 2.1 と Lemma 4.3 からわかる。

(2) N の点の像が $\bar{E}(\alpha,\beta;k,l)$ に近付くときその極限が N に入っていることが Proposition 2.1 および Lemma 4.3 から示される。

次の補題により Theorem 4.1 が示される:

Lemma 4.6. $k+l=d$、$k=k'g, l=l'g$、k',l' は互いに素とすると $p^{-1}(E(\alpha,\beta;k',l'))$ は被約。したがって、

$$\deg p^{-1}(E(1,2;0,1)) = M_d,$$

$(k',l') \neq (0,1)$ のとき

$$\deg p^{-1}(E(1,2;k',l')) = gk^2\left(\binom{2d-3}{2k}M_k m_l + \binom{2d-3}{2k-1}m_k M_l\right),$$

$$\deg p^{-1}(E(1,3;k',l')) = gkl\left(\binom{2d-3}{2k-1}M_k m_l + \binom{2d-3}{2k-2}m_k M_l\right)$$

. *Proof.* Proposition 2.1、2.2、Lemma 2.3、4.3 を使って最初の主張を得る。

以下、$\deg p^{-1}(E(1,2;k',l'))$, $k'l' \neq 0$ について説明する。その他の場合も同様。

$p^{-1}(E(1,2;k',l'))$ の点は k 次の特異アファイン直線 C_1 と l 次の特異アファイン直線 C_2 であって $C_1 \cap B = C_2 \cap B$、$P_1, P_2 \in C_2$、$P_i \in C_1 \cup C_2$ であるようなものをあたえる。$\#\{i | P_i \in C_1\}$ が $2k$ であるか $2k-1$ であるかによって、そのような組合せの数は上の式のかっこのなかの第 1 項および第 2 項であたえられる。k^2 は σ_1, σ_2 の取り方、g は t の取り方に対応する。 □

References

[CH] L. Caporaso and J. Harris, *Counting plane curves of any genus*, alg-geom/9608025.

[CM] B. Crauder and R. Miranda, *Quantum cohomology of rational surfaces*, The Moduli Space of Curves (R. Dijkgraaf, C. Faber and G. van der Geer eds.), Prog. in Math., vol. 129, Birkhäuser, 1995, pp. 33–80.

[CdGP] P. Candelas, X. C. de la Ossa, P. S. Green and L. Parkes, *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*, Nucl. Phys., B. **359** (1991), 21–74.

[G] A. Givental, *Equivariant Gromov-Witten invariants*, alg-geom/ 9603021.

[GY] B. Greene and S.-T. Yau(eds.), Mirror Symmetry II,, Studies in advanced mathematics, AMS/International Press, 1996.

[K] M. Kontsevich,, *Enumeration of rational curves via torus actions*, The moduli space of curves (R. Dijkgraaf, C. Faber and G. van der Geer, eds.), Progress in Math., vol. 129, Birkhäuser, 1995, pp. 335–368.

[KM] M. Kontsevich and Yu. Manin, *Gromov-Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry*, Comm. Math. Phys. **164** (1994(3)), 525–562.

[Mr] S. Mori, *Projective manifolds with ample tangent bundles*, Ann. of Math. (2) **110** (1979), 593–606.

[Ms] D. Morrison, *Mirror symmetry and rational curves on quintic threefolds: a guide for mathematicians*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), 223–247.

[R] Z. Ran, *Enumerative geometry of singular plane curves*, Invent. Math. **97** (1989), 447–465.

[RT] Y. Ruan and G. Tian, *Mathematical theory of quantum cohomology*, Math. Research Lett. **1** (1994), 269–278.

[T] N. Takahashi, *Curves in the complement of a smooth plane cubic whose normalizations are* $\mathbb{A}^1$, alg-geom/9605007.

[Y] S. T. Yau(Ed.), Essays on mirror manifolds, International Press, Hong Kong, 1992.