代数幾何学シンポジウム記録
1996年度 pp.1-13

Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間と変形理論

並河良典

幾千もの例が物語るように、Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間は、通常の意味では、既約から程遠い。しかし、退化と、双有理写像の2つの操作によって、多くのモジュライ空間がくもの巣のようにつながっている。Calabi-Yau 多様体の退化にどれぐらいの特異点を許容するかによって、モジュライ空間の様子は異ってくる。例えば、末端特異点程度の退化であれば、倉西空間は非特異なままで、モジュライ空間はある種の多層構造 (stratification) を持つ (cf. [Na 1])。しかし、標準特異点にまで退化の範囲を拡げると、倉西空間は、既約でも被約でもなくなることがある。ここでは、変形理論を用いて、これらの現象を説明する。

X を、標準特異点 (canonical singularity) を持った Calabi-Yau 多様体とする。すなわち、$K_X \sim 0$, $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ である様な、標準特異点付き3次元射影代数多様体のことである。

次の問題を考える：

問題： いつ X は、非特異な Calabi-Yan 多様体に変形することができるか？

この問題に対する第1ステップは、X の倉西空間 Def(X) の研究である；すでに、Bogomolov, Tian, Todorov, Ran, 川又, Deligne, 筆者, Gross と続く一連の結果から、かなりの部分が解明されている。ひとことで言ってしまうと次の様になる。

<u>定理</u>： X の変形の障害は、X の各特異点の(局所的な)変形の障害からくる。特に、X の特異点の変形が全て unobstructed であれば X 自身の変形も unobstructed である。

詳しいことは、[Ra], [Ka], [Na 2], [Gr 1] にゆだねることにして先に進む。自然な写像：

$$\alpha: \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{E}xt^1(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X))$$

を考える。α が全射であれば、(あらっぽく言って) 特異点のまわりの1次無限小変形は、X の1次無限小変形として実現される。さらに、Def(X) が非特異であれば、この無限小変形は、実際の変形から来ている。残念ながら、これらのことが満たされるのは、

極めてまれである。
以後、Xが孤立特異点のみを持つ場合と、非孤立特異点を持つ場合に分けて議論する。

Case 1 : Xが孤立特異点のみを持つ場合

$\Sigma = \mathrm{Sing}(X)$, $U = X - \Sigma$ と置く。Schlessinger の結果から、α は、局所コホモロジーのコバウンダリー写像

$$H^1(U, \Theta_U) \longrightarrow H^2_\Sigma(X, \Theta_X)$$

と同一視される。Xが3次元で、$K_X \sim 0$ であることから

$$H^1(U, \Theta_U) \simeq H^1(U, \Omega^2_U), \quad H^2_\Sigma(X, \Theta_X) \simeq H^2_\Sigma(X, \pi_*\Omega^2_Y)$$

がわかる。ここで $\pi : Y \longrightarrow X$ は Σ 以外では同型であるようなXの特異点解消である。この時、次の可換図式(◆)を得る($E = \pi^{-1}(\Sigma)$ と置いた)

(◆)
$$\begin{tikzcd}
H^1(\pi^{-1}(U), \Omega^2) \arrow[r] & H^2_E(Y, \Omega^2_Y) \arrow[r, "\beta"] & H^2(Y, \Omega^2_Y) \quad (\text{完全}) \\
H^1(U, \Omega^2_U) \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "\alpha"] & H^2_\Sigma(X, \pi_*\Omega^2_Y) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

βの双対写像 $\beta^\vee$ は、自然な射

$$H^1(Y, \Omega^1_Y) \longrightarrow H^0(X, R^1\pi_*\Omega^1_Y)$$

に他ならない。 $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = H^2(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ なので、

$$\mathrm{dlog}: H^1(Y, \mathcal{O}_Y^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \longrightarrow H^1(Y, \Omega_Y^1)$$

は同型である。そこで、$\beta^\vee$ は次の様に分解する：

(◆◆)

$$\begin{array}{ccc} H^1(Y, \Omega_Y^1) & \xrightarrow{\beta^\vee} & H^0(X, R^1\pi_*\Omega_Y^1) \\ \Uparrow \mathrm{dlog} & & \uparrow \mathrm{dlog} \\ H^1(Y, \mathcal{O}_Y^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} & \longrightarrow & H^0(X, R^1\pi_*\mathcal{O}_Y^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \end{array}$$

右端の dlog は、X の特異点の情報を反映する。
一方、下段の水平方向の射は、X の大域的な情報を反映している。この可換図式を動機として、一般の孤立有理特異点 V の不変量 $\mu(V)$, $\sigma(V)$ を次の様に定義しよう： $f: \tilde{V} \longrightarrow V$ を特異点以外では同型である特異点解消とし、$f^{-1}(0) = E$ は $\tilde{V}$ の単純正規交叉因子と仮定する。この時、

$$\mu(V) := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Coker}\left[H^1(\tilde{V}, \mathcal{O}_{\tilde{V}}^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \xrightarrow{\mathrm{dlog}} H^1(\tilde{V}, \Omega_{\tilde{V}}^1)\right]$$

$$\sigma(V) := \mathrm{rank}\left[\mathrm{Weil}(V) \big/ \mathrm{Cart}(V)\right]$$

但し、$\mathrm{Weil}(V)$ (又は $\mathrm{Cart}(V)$) は、V 上の Weil 因子

(又は、Cartier因子)のなすアーベル群である。

μ および σ の性質を列挙しよう。

(1) $\mu(V) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(\tilde{V}, \Omega^1_{\tilde{V}}(\log E)(-E))$

これは、完全系列

$$0 \to \Omega^1_{\tilde{V}}(\log E)(-E) \to \Omega^1_{\tilde{V}} \to \hat{\Omega}^1_E \to 0$$

と、Vが有理特異点であることから容易に証明できる

(2) Vがトーリック特異点であれば、$\mu(V) = 0$

(3) Vが3次元hypersurface特異点であれば、$\mu(V)=0$ であることと、Vが非特異または通常2重特異点(i.e. $x^2+y^2+z^2+w^2=0$)であることは、同値.

(4) Vを3次元Gorenstein特異点とすると.

$$\mu(V) + \sigma(V) \leq \dim T^1_V \leq 2\mu(V) + \sigma(V).$$

但し、$T^1_V := \mathcal{E}xt^1(\Omega^1_V, \mathcal{O}_V)$.

可換図式(♦),(♦♦)に戻って議論を続けよう。μ, σ を用いると、次のことが証明できる.

命題: Xは、孤立標準特異点のみを持つ Calabi-Yau 多様体とする。

(i) $\dim \mathrm{Coker}(\beta^\vee) \geq \sum_{p \in Sing(X)} \mu(X,p)$ (したがって

特に、$\dim \mathrm{im}(\alpha) \geq \sum \mu(X,p)$)

さらに、もし、X が $\mathbb{Q}$-分解的であれば、

$$\dim \mathrm{Coker}(\beta^\vee) \geq \sum_{p \in Sing(X)} \{\mu(X,p) + \sigma(X,p)\}$$

(したがって、特に、$\dim \mathrm{im}(\alpha) \geq \sum\{\mu(X,p) + \sigma(X,p)\}$).

(ii) X がトーリック特異点のみしか持たなければ、

α は全射である。

命題と、μ 及び σ の induction によって、次の定理を得る。

<u>定理</u>：X を孤立標準特異点を持った $\mathbb{Q}$-分解的 Calabi-Yau 多様体とする。X の特異点 (X,p) は、局所的には smoothable で、次のいずれかを満たすと仮定：

(i) (X,p) はトーリック特異点

(ii) 倉西空間 $Def(X,p)$ は非特異

この時、X は、非特異 Calabi-Yau 多様体に変形される。

<u>例 1</u>：$Sing(X) = \{p\}$, (X,p) は、次数 5 の

del Pezzo 曲面 E 上の錐の頂点と同型と仮定する。$\tilde{X}$ を X の点 p におけるブローイングアップとすると、$\tilde{X}$ は、非特異 Calabi-Yau 多様体で、例外因子が丁度 E に一致する。(X,p) は、Pfaffian subscheme として得られるので、定理の(ii)を満たす。したがって、X が $\mathbb{Q}$-分解的であれば、非特異 Calabi-Yau 多様体に変形される。

例2. : $\mathrm{Sing}(X)=\{p\}$. (X,p) は、次数6の del Pezzo 曲面 E 上の錐の頂点と同型とする。$\tilde{X}$ を X の点 p におけるブローイングアップとし、例外因子を E と同一視する。(X,p) は、トーリック特異点になる。(X,p) は、2方向の異なるスムージングを持つ：

(I). E を $\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2$ の中に $(1,1)\cap(1,1)$ 型完全交叉部分多様体として埋め込み、$\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2$ を $\mathbb{P}^8$ に埋め込む。$\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2$ 上の錐を、頂点を通る超平面で2回切ると (X,p) が得られ、一般の超平面で2回切ると、(X,p) のスムージングが得られる。

(II): $E\subset\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\subset\mathbb{P}^7$ に対して、(I) と同じことを行う

(X, p) の倉西空間 $\mathrm{Def}(X, p)$ は、2つの(非特異な)既約成分を持ち、各々が(I)、(II)のタイプのスムージングに対応している。
定理の(i)が満たされているので、X が $\mathbb{Q}$-分解的であれば、非特異な Calabi-Yau 多様体に変形可能である。
命題(ii)より 自然な写像

$$\mathrm{Def}(X) \longrightarrow \mathrm{Def}(X, p)$$

は全射になる。したがって、X は 2つの異なるスムージング X_s, X_t を持つ。ここで、X_s は(I)に対応するスムージング、X_t は(II)に対応するものとする。この時、X_s, X_t, $\tilde{X}$ の Betti 数は、次の関係を持つ:

$$b_2(X_s) = b_2(\tilde{X}) - 1 \qquad b_3(X_s) = b_3(\tilde{X}) + 4$$

$$b_2(X_t) = b_2(\tilde{X}) - 1 \qquad b_3(X_t) = b_3(\tilde{X}) + 2$$

ここで述べた様な X が実際に存在する (cf. [Ni, 3])

Case 2: X が非孤立特異点を持つ場合

$\mathrm{Sing}(X) = \Sigma$ とおく。X は標準特異点しか持たないので、Σ の中の有限集合 Σ_0 を除いたところでは、2次元有理2重点の局所自明な1次元族とみなせる。$H^1(X - \Sigma, \Theta_{X-\Sigma})$ は、

有限次元にならない。かわりに、$U = X - \Sigma_0$と置いて、$H^1(U, \Theta_U)$を考える。この時、次の図式が可換になることが証明できる：

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\alpha} & H^0(X, \mathcal{E}xt^1(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X)) \\
\cup\!\mathsf{I} & & \cup\!\mathsf{I} \\
H^1(U, \Theta_U) & \xrightarrow{\alpha'} & H^2_{\Sigma_0}(X, \Theta_X)
\end{array}
$$

$p \in \Sigma_0$に対して、孤立特異点の場合のμの性質(1)を見慣らって、

$$\mu(X, p) = \dim_{\mathbb{C}}\left(R^1\pi_*\Omega^1_Y(\log E)(-E)\right)_p$$

と定義する。*) 但し、$\pi : Y \longrightarrow X$は、$X$の特異点解消で、$\pi^{-1}(\Sigma) = E$は、$Y$上の単純正規交叉因子とする。

$R^1\pi_*\Omega^1_Y(\log E)(-E)$は、$\Sigma_0$上でのみ台を持つことに注意する。

$\sigma(X, p)$も Case 1 と同様に定義する。

<u>命題</u>：Xを標準特異点のみを持つ$\mathbb{Q}$-分解的 Calabi-Yau 多様体とする。この時、

$$\dim \operatorname{im}(\alpha') \geqq \sum_{p \in \Sigma_0} \{\mu(X, p) + \sigma(X, p)\}.$$

---

*) 右辺は、du Bois complex $(\underline{\Omega}^\bullet_X, F)$を用いて、$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^2(Gr^1_F(\underline{\Omega}^\bullet_{X,p}))$としても定義できるので、$\pi$の取り方に依らない

例3. (cf. [Gr2])

$\tilde{X}$ を非特異 Calabi-Yau 多様体とする。$\tilde{X}$ から正規多様体 X へ、双有理射影的正則写像 ν が存在したとする。次を仮定する:

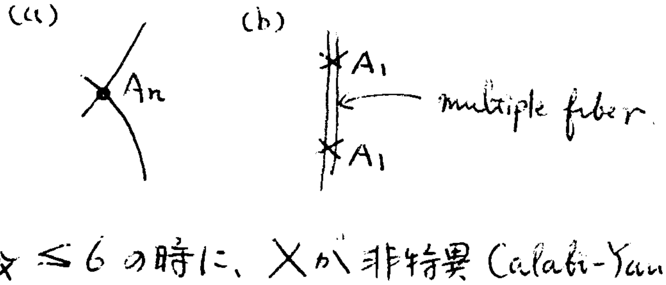
(i) $\Sigma = Sing(X)$ に対して、$\nu^{-1}(\Sigma) = D$ は高々有理2重点を持った曲面で、$\nu|_D : D \longrightarrow \Sigma$ は2次曲線束

(ii) $\Sigma \simeq \mathbb{P}^1$

(iii) $\rho(\tilde{X}) = \rho(X) + 1$

この状況は、Wilson によって研究された Calabi-Yau 多様体の原始的双有理縮約 (primitive birational contraction morphism) の典型として現われる。勿論、X は、$\mathbb{Q}$-分解的 Calabi-Yau 多様体である。

分類による結果、D の特異点は、$\nu|_D$ の特異ファイバー上にのみあらわれ、次の2種類のタイプのいずれかである:



$(D^3)_{\tilde{X}} \leq 6$ の時に、X が非特異 Calabi-Yau 多様体に変形されることを証明してみる。

$T^1_X := \mathcal{E}xt^1(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X)$ と置く。T^1_X は、Σ 上に台を持つ。

Σ 上の一般の点は、A_1-型特異点の局所自明な1次元族である。さらに、次の完全系列が存在する：

$$0 \to \mathcal{J} \to T_X^1 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4-D^3) \to 0$$

$\mathrm{supp}(\mathcal{J}) \subseteq \Sigma$.

$\Sigma \subset X$ の十分小さな近傍を、V とすると、$\mathrm{Ext}^2(\Omega_V^1, \mathcal{O}_V) \simeq H^1(X, T_X^1)$ であることがわかる。*) 上の完全系列から、$\dim H^1(X, T_X^1) \leq 1$ である。($\because$ $D^3 \leq 6$)

本稿の最初に述べた定理より、$\mathrm{Def}(X)$ は、$\mathbb{T}_X^1 := \mathrm{Ext}^1(\Omega_X^1, \mathcal{O}_X)$ の原点の近傍で高々1つの方程式の零点として定義される。$D^3 \leq 6$ なので、

$$\sum_{p \in \Sigma_0} \{\mu(x,p) + \tau(x,p)\} \geq 2$$

である。命題より、$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{im}(\alpha') \geq 2$、特に、$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{im}(\alpha) \geq 2$ である。このことから、$\mathrm{Ext}^1(\Omega_X^1, \mathcal{O}_X)$ の元 ξ で次の性質を持つものが存在する

(i) ξ を X の1次無限小変形とみなしたとき、ξ は X の実際の変形として実現される

(ii) $\alpha(\xi) \neq 0$, $\alpha(\xi) \in H^2_{\Sigma_0}(X, \mathcal{O}_X)$.

$\tilde{X}$ の倉西空間 $\mathrm{Def}(\tilde{X})$ から $\mathrm{Def}(X)$ へ、自然な写像が存在する。最初から、この写像は不分岐と仮定できる。

---

*) X は、hypersurface 特異点のみを持つことが証明できる。

両者の接空間の間の射

$$\nu_* : \mathbb{T}^1_{\tilde{X}} := H^1(\tilde{X}, \Theta_{\tilde{X}}) \longrightarrow \mathbb{T}^1_X$$

を考える。(ii)より、$\xi \notin im(\nu_*)$。したがって、$Def(\tilde{X}) \longrightarrow Def(X)$は、全射ではない。この事実から、$X$がsmoothableであることを導くことは、それほど困難ではない (cf. [Gr 2, Lemma (1.6)])。

References

[Gr 1] Gross, M.: Deforming Calabi-Yau threefolds, preprint

[Gr 2] Gross, M: Primitive Calabi-Yau threefolds, To appear in J. Diff. Geom

[Ka] Kawamata, Y.: Unobstructed deformations, a remark on a paper of Z. Ran J. Alg. Geom **1**, 183–190 (1992)

[Na 1] Namikawa, Y.: Stratified local moduli of Calabi-Yau threefolds, preprint

[Na 2] Namikawa, Y.: On deformations of Calabi-Yau threefolds with terminal singularities, Topology **33** (3), 429–446 (1994)

[Na 3] Namikawa, Y.: Deformation theory of Calabi-Yau threefolds and certain invariants of singularities, to appear in J. Alg. Geom.

[Na-St] Namikawa, Y., Steenbrink, J.: Global smoothing of Calabi-Yau threefolds, Invent. Math. **122**, 403–419 (1995)

[Ra] Ran, Z.: Deformations of manifolds with torsion or negative canonical bundle, J. Alg. Geom **1**, 279–291 (1992)