

Kummer 曲面の自己同型群

名大・多元数理
金 金 銅 誠 之

§0. はじめに

種数 2 の曲線に付随した Kummer 曲面は、19世紀後半に集中的に研究された (e.g. Hudson [3])。この自己同型群は離散無限群であり、多くの興味深い自己同型が知られている。F. Klein は論文 [6] の中で“自己同型群が知られている自己同型で生成されるか”という問題を提出している。1901年、Hutchinson [4] は新しい自己同型を発見することで、この問の否定的解を与えた。以後、新しいものは発見されず、Kummer 曲面の自己同型は classical に知られたもので生成されるかという問題は残されたままであった。が、最近 Keum [5] が、新たな自己同型を発見した。

本論では、“generic” Kummer 曲面の自己同型群が classical 及び Keum が見つけた自己同型で生成されることを見る。証明には、本質的に階数 24 の特別な性質を持つ、Leech 格子の存在が用いられる。

§1. 歴史と主定理

以下、最後まで ① 上で考える。 $C \in \text{genus } 2$ の 曲線，
 $J(C)$ を χ の Jacobian とする。 C は \mathbb{P}^1 上の二重被覆で 6 点。
 $P_0, P_1, \dots, P_5 (\in C)$ で 分岐している。今 C の $J(C)$ への埋め込み

$$\varphi: C \hookrightarrow J(C), \quad \varphi(p) = [p - p_0]$$

を考える。被覆 $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ の 被覆変換は $J(C)$ の involution ι を
 引き起し。 $J(C)$ の 2-torsion points は ι の 固定点 となる。商曲面
 $J(C)/\langle \iota \rangle$ は 16 個の 通常二重点 $\{n_\alpha\}$ を持つ。 χ の極小モデル
 X を C に付随した Kummer 曲面 と呼ぶ。 $Km(C)$ と表す。
 次の事は昔から知られていた：

Fact (i) : X は 16 個の互いに交わらない nodal curve $\{N_\alpha\}$
 (非特異有理曲線) を含む。 N_α は $J(C)/\langle \iota \rangle$ の node n_α 上の
 例外曲線である。一方、 X は 另の互いに交わらない 16 個の
 nodal curves $\{T_\beta\}$ を含む。 $\{T_\beta\}$ は theta 因子 Θ ($\Theta := \varphi(C)$)
 及び、 χ の 2-torsion による translation 1 に対応している。
 これら 32 個の曲線 $\{N_\alpha, T_\beta\}$ の configuration を。
Kummer (16) configuration と呼ぶ。

(ii) : 次の可換図式が存在する。ここで F は 16 個の nodes
 を持つ 4 次曲面である。

$$\begin{array}{ccc} J(C) & \xrightarrow[2:1]{|2\Theta|} & F \subset \mathbb{P}^3 \\ & \searrow & \nearrow \\ & & J(C)/\langle \iota \rangle \end{array}$$

(iii) $\sum (N_\alpha + T_\beta)/4$ は $\text{Pic}(X)$ に含まれる。Xの linear system は、 $X = \text{Km}(C)$ の \mathbb{P}^5 の中への埋め込みを与える。像は、3つの quadric の完全交叉で、 $\{N_\alpha, T_\beta\}$ は、32本の line に写される。

以上 の準備の下に、知られている自己同型を紹介する。

① 16 translations $\{t_\alpha\}$: $J(C)$ の 2-torsion に $\mathbb{Z}/3$ translation 12 involution し て 可換で、 $X = \text{Km}(C)$ の involution $\{t_\alpha\}$ を引き起す。

② Switch σ : F の dual $F^* \subset \mathbb{P}^{3*}$ は F と射影的に同型であり、これから involution $\sigma: X \rightarrow X$, $\sigma(N_\alpha) = T_\alpha$ の存在が従う。

③ 16 projections $\{P_\alpha\}$: F の node n_α からの projection

$$F \setminus \{n_\alpha\} \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^2$$

の被覆変換は X の involution P_α を引き起す。

④ 16 correlations $\{\sigma \circ P_\alpha \circ \sigma\}$: F の dual F^* の projection。

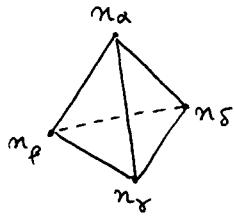
（注）以上は、Klein [6] で述べられている。Klein は $\text{Aut}(X)$ は、これらで生成されるか従うている。

Sixty

⑤ Cremona transformations $\{C_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}\}$ (Hutchinson [4]):

F の 4 個の nodes から成る集合 $\{n_\alpha, n_\beta, n_\gamma, n_\delta\}$ は、どの 3 点を T_α の F の像の conic 上にのらすといふ。Göpel tetrad と呼ばれる。Göpel tetrad $\{n_\alpha, \dots, n_\delta\}$ を頂点とする tetrahedron が

$xyzt=0$ で与えられているとする。このとき F の方程式は



$$\begin{aligned} & A(x^2t^2 + y^2z^2) + B(y^2t^2 + z^2x^2) + C(z^2t^2 + x^2y^2) \\ & + Dxzt + F(yt + zx)(zt + xy) + \\ & G(zt + xy)(xt + yz) + H(xt + yz)(yt + zx) = 0 \end{aligned}$$

で与えられる。Cremona 变換

$$(x, y, z, t) \mapsto (\nu_x, \nu_y, \nu_z, \nu_t)$$

は F を保ち、従って $X = \text{Km}(C)$ の involution $C_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ を引き起す。

Göpel tetrads は 60 個存在し、60 個の involution を得る。

⑥ (Keum [5], 1997). 最近、Keum が新しい 192 個の自己同型を見つけた。方法は、まず Hodge isometry で Kähler cone を保つものを構成し Torelli 型定理より存在を示すものである。正確な定義は Keum [5], Kondo [7] を参照せよ。後で、この自己同型の性質について述べる。

本論文の結果は次の通りである：

主定理.

$X = \text{Km}(C)$ は generic とする。すなはち、 $J(C)$ の Neron-Severi 群は C で生成されているとする。このとき、 $\text{Aut}(X)$ は上記①-⑥の自己同型で生成される。

§2. 代数的 K3 曲面の自己同型群

$X = K_m(C)$ は algebraic K3 曲面である。この節では algebraic K3 曲面の自己同型群の記述について復習する。

$Y \in \text{alg. K3 曲面}$, $S_Y \in Y$ の Picard 群子 (Picard 群と交点形式の組) とする。Hodge の指数定理より, S_Y の符号は $(1, f-1)$ である。 $\mathcal{O}(S_Y)$ で 交点形式を保つ S_Y の 同型全体とする。 $f \geq 2$ ならば $\mathcal{O}(S_Y)$ は 無限群である。

S_Y の元 r が $r^2 = -2$ のとき

$$x \mapsto x + \langle x, r \rangle r$$

は S_Y の鏡映 A_r を定める。Riemann-Roch より r と $-r$ は effective である。一方, $A_r(r) = -r$ より, A_r は自己同型から引き起こされない。今,

$W(S_Y)^{(2)} := \langle \{A_r \mid r \in S_Y, r^2 = -2\} \rangle \triangleleft \mathcal{O}(S_Y)$

とすると、自然な map

$$\text{Aut}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(S_Y)/W(S_Y)^{(2)}$$

の Kernel と cokernel は 有限群 となり, $\text{Aut}(Y)$ は $\mathcal{O}(S_Y)/W(S_Y)^{(2)}$ が 角解れば、ほぼ決定できる。

$P(S_Y)$ を $\{x \in S_Y \otimes \mathbb{R} \mid x^2 > 0\}$ の 連結成分で ample class を含むものとする。 $W(S_Y)^{(2)}$ は $P(S_Y)$ に 自然に作用しており、その基本領域域が Kähler cone

$$C(Y) := \{x \in P(S_Y) \mid \langle x, r \rangle > 0 \text{ for } \forall r \in S_Y, r^2 = -2, r \neq 0\}$$

である。従って $\text{Aut}(Y)$ は $\text{Aut}(C(Y))$ と 有限群を modulo として 同型である。

次の 3 つの Case が起る:

$$(a) \quad |\text{Aut}(Y)| < \infty \quad (\Leftrightarrow [O(S_Y) : W(S_Y)] < \infty \\ \Leftrightarrow \# \text{ nodal curves on } Y < \infty)$$

$$(b) \quad |\text{Aut}(Y)| = \infty, \quad [O(S_Y) : W(S_Y)] < \infty.$$

ここで $W(S_Y)$ は S_Y の 全て の鏡映で生成される群。

$$(c) \quad [O(S_Y) : W(S_Y)] = \infty.$$

(a) の場合は、全ての nodal curves, 従って Kähler cone を書き出すことがで玉。 $\text{Aut}(Y)$ も計算できる。(b) の場合、Vinberg's algorithm [8] によて $W(S_Y)$ の基本領域を見つけることがで玉。これと用いれば $\text{Aut}(Y)$ が計算できること(a)より、難しい。この方法で Vinberg [9] は、transcendental lattice T_Y ($:= S_Y^\perp \text{ in } H^2(Y, \mathbb{Z})$) が

$$T_Y \cong \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

の場合に、 $\text{Aut}(Y)$ を計算している。(c) の場合、一般的な方法は知られていない。結果的には、我々の場合、この Case に属する。

Vinberg は unimodular hyperbolic lattice の鏡映群が、いつ直交群の中で指數有限となるかを研究した。Conway-Sloane [2] は Vinberg の結果を Leech 格子の理論を用いて解釈し直しており。更に、Borcherds [1] は non-reflection-part の計算をしていく。次節で Leech 格子、Conway の一結果を述べる。

§3. Leech 格子

lattice (格子) とは、階数有限の自由 \mathbb{Z} -加群 L と、その上の \mathbb{Z} に値を取る 非退化 対称 双一次形式 \langle , \rangle の組をいう。
 (L, \langle , \rangle) が even とは $\langle x, x \rangle \equiv 0 \pmod{2}$ ($\forall x \in L$) が成り立つとき、unimodular とは 形式に付随した行列の行列式が ± 1 のときをいう。

例 (i) Cartan 行列 A_m, D_n, E_l ($m \geq 1, n \geq 4, l = 6, 7, 8$) で定まる lattice を同じ記号 A_m, D_n, E_l で表わし、これらの直和で表わされる lattice を root lattice と呼ぶ。ここでは、これらは 負定値に符号を違えておく。

(ii) 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で定まる lattice を U で表す。 U は even unimodular で 符号は $(1, 1)$ である。

(iii) Y を K3 曲面とする。 $H^2(Y, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{22}$ \mathbb{Z} cup 積により $H^2(Y, \mathbb{Z})$ は even, unimodular, 符号 $= (3, 19)$ の lattice となる。不定値の場合、lattice の 同型類は、この性質で一意的に定まる。

$(H^2(Y, \mathbb{Z}), \langle , \rangle) \cong U \oplus U \oplus U \oplus E_8 \oplus E_8$
である。

(iv) 定値 even unimodular lattice : この場合、同型類は 階数で 1 つ、一意的に定まらない。

階数	8	16	24	32	40	...
同型類の個数	1	2	24	$\geq 10^7$	$\geq 10^{51}$...

階数 24 の even, definite unimodular lattice を Niemeier 格子 と呼ぶ。この中に一つだけ他と性質が著しく異なるものが、存在する。これが Leech 格子である。

Def. Leech 格子 Λ とは even, negative definite, unimodular lattice で (-2) -vectors を含まない。

Leech 格子の具体的な構成法は Conway-Sloane [2], Chap. 10 を見て下さい。ここでは次の事を注意するにとどめます。

Λ の具体的構成には Steiner system $S(5, 8, 24)$ (または binary Gray code) が用いられます。

Def. 以下最後まで $L = \Lambda \oplus U$ とし L の元 $v \in U = (\lambda, m, n), \lambda \in \Lambda, m, n \in \mathbb{Z}, v^2 = \lambda^2 + 2mn$

と表わす。また $w = (0, 0, 1) \in L$ とする。

$L \ni r$ が Leech root とは

$$(1) \quad r^2 = -2 ;$$

$$(2) \quad \langle r, w \rangle = 1$$

を満たすときをいう。Leech roots 全体の集合を Δ とすると、 Δ と Λ は集合として $1:1$ に対応する:

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xleftrightarrow{\psi} & \Lambda \\ & \downarrow & \downarrow \\ (\lambda, 1, -1 - \frac{\lambda^2}{2}) & \xleftrightarrow{\psi} & \lambda \end{array}$$

$P(L) \in \{x \in L \otimes \mathbb{R} \mid x^2 > 0\}$ の連結成分の一つ, $W(L)$ ($= W(L)^{(1)}$)
を L の鏡映群とすると, $W(L)$ は $P(L)$ に作用する。今

$$D = \{x \in P(L) \mid \langle x, r \rangle > 0 \quad \forall r \in \Delta\}$$

とおくと, 次が成立つ。

定理 (Conway, [2], Chap. 27). D は $W(L)$ と $P(L)$ の
作用に関する基本領域であり。

$$O(L) \cong W(L) \rtimes \text{Aut}(D), \quad \text{Aut}(D) \cong \mathbb{Z}^{24} \rtimes O(1)$$

が成立つ。

(注) $L = \Lambda \oplus U$ の鏡映群は $O(L)$ で指標有限でないが、
 $O(L)/W(L)$ は free abel 群を指標有限で含む。このように
hyperbolic lattice は特別なもので、ほとんどの他にはない。

§4. 主定理の証明

$X = K_m(C)$ を generic Kummer 曲面とする。このとき, S_X は
rank 17, $\det S_X = \pm 64$ である。

Lemma 1. $\text{Aut}(X) \cong \Gamma(S_X)/W(S_X)^{(2)}$.

ここで $\Gamma(S_X) = \{\varphi \in O(S_X) \mid \varphi|S_X^*/S_X = \pm 1\}$, $O(S_X)/\Gamma(S_X) \cong S_6$,
 $S_X^* = \text{Hom}(S_X, \mathbb{Z})$, S_6 は $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ の分岐点の置換群とする。

Lemma 2. S_x の $L = \Lambda \oplus U$ への埋め込みで、次の満たすものが存在する:

- (i) L/S_x は torsion free.
- (ii) S_x^+ in L は $R = A_3 \oplus A_1^6$ を指數 2 で含む。
- (iii) R の simple roots は Leech roots である。

証明は Leech 格子の中の 9 点で、対応する Leech roots の生成する lattice が R と同型にするものと具体的に構成する。

Lemma 3. $D' := D \cap P(S_x)$ とすると D' は 316 個の超平面で直に囲まれている。これらの超平面は (-2)-vector の直交補空間と 2 つ、2 いるものが 32 個、(-4)-vector に対応するものが 32 個、別の (-4)-vector は 32 個、(-12)-vector に対応するものが 60 個、(-16)-vector に対応するものが 192 個に分けられる。

証明のポイントは次の点である: $r \in \Delta$ に対し、
 $H_r := \{x \in P(L) \mid \langle x, r \rangle = 0\}$ とする。

$$H_r \cap P(S_x) \neq \emptyset \iff R' := \langle R, r \rangle \text{ は negative definite}$$

が成り立つことに注意する。 R' は root lattice であり、これが Leech 格子の幾何を用いれば Lemma 3 が示される。Lemma 3 の超平面に
対応する R' は直角に

$$R' = A_3 \oplus A_1^7, D_4 \oplus A_1^6, A_3 \oplus A_3 \oplus A_1^4, A_5 \oplus A_1^5$$

である。

Lemma 4. (i) Lemma 3 に現われる 32 個の (-2)-vector は
modulo $W(S_x)^{(2)}$ で $\{N_\alpha, T_\beta\}$ と同一視できる。

この同一視の下で

(ii) $w = (0, 0, 1) \in \Lambda \oplus U$ の S_x^* への projection は $\sum (N_\alpha + T_\beta)/4$ に
一致する。

(iii) $\text{Aut}(D') \cong (\mathbb{Z}/2)^5 \rtimes S_6$ で、 $(\mathbb{Z}/2)^5$ は translation $\{t_\alpha\}$ と
Switch σ で生成され、 S_6 は $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ の分岐点の置換群である。

(iv) $H \in F$ の超平面切断の X への引き戻しとすると。

- $\{32$ 個の (-4)-vectors $\} = \{H - 2N_\alpha, \sigma(H - 2N_\alpha)\},$
- $\{60$ 個の (-4)-vectors $\} = \{H - (N_\alpha + N_\beta + N_\gamma + N_\delta) \mid \begin{cases} \{n_\alpha, n_\beta, n_\gamma, n_\delta\} \text{ は} \\ \text{Göpel tetrad} \end{cases}\},$
- $\{192$ 個の (-12)-vectors $\} = \{3H - 2(N_\alpha + N_\beta + N_\gamma + N_\delta + N_\epsilon + N_\lambda) \mid \{n_\alpha, n_\beta, n_\gamma, n_\delta, n_\epsilon, n_\lambda\} \text{ は "good hexad"}\}.$

ここで "good hexad" とは、どの 4 点も T_α の像に含まれず。Göpel
tetrad でない node の集合をいう。

6 点の

次に、Lemma 4, (iv) で述べた negative vector と自己同型の
関係について述べる。

Lemma 5. (i) $P_\alpha \in \text{node } n_\alpha (\in F)$ に対応する projection とする。

$$P_\alpha^* | S_x = \text{the reflection w.r.t. } H - 2N_\alpha$$

(ii) $C_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \in \text{Göpel tetrad } \{n_\alpha, n_\beta, n_\gamma, n_\delta\}$ に付随した。

Cremona 变換すると。

$$C_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}^* | S_x \doteq \text{the reflection w.r.t. } H - (N_\alpha + N_\beta + N_\gamma + N_\delta).$$

ここで “ \doteq ” の意味は. $C_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}^*$ は 鏡映面に non-trivial に作用し,
鏡映は 鏡映面を pointwise に fix する違いを表している。

192個の (-12) -vector r に対しては. Hodge isometry

$$\Psi_r : H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$$

で Kähler cone を保つものが構成できる。従って K3曲面の Torelli 型定理より Ψ_r は自己同型 K_r より引き起されている: $\Psi_r = K_r^*$ 。
詳しい定義は Keum [5], Kondo [7] を参照して下さい。

Lemma 6. ① Ψ_r は無限位数。

$$\textcircled{2} \quad \Psi_r^{-1} = \Psi_{\sigma^*(r)}.$$

$$\textcircled{3} \quad H_r^+ = \{x \in P(S_X) \mid \langle x, r \rangle \geq 0\}, \quad H_r^- = \{x \mid \langle x, r \rangle \leq 0\}$$

とすると。

$$\Psi_r(H_{\sigma^*(r)}^+) \subset H_r^-.$$

言い換えると Ψ_r は “鏡映” のごとく ふるまう。

Lemma 5, 6 より P_α^* , $C_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}^*$, $K_r^* = \Psi_r$ は全て D' の面を鏡映面とする鏡映のごとくある。従って標準的議論により次を得る。

Lemma 7. P_α^* , $C_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}^*$, $(\sigma \circ P_\alpha \circ \sigma)^*$, K_r^* で生成される部分群を N とする。このとき。

$$\varphi \in O(S_x), \quad \varphi(C(X)) \subset C(X) = \text{K\"ahler cone}$$

に対して $g \in N$ が存在して $g \circ \varphi \in \text{Aut}(D')$ となる。

以上より Lemma 1 - 7 より主定理が従う。

References

- [1] R. Borcherds, *Automorphism groups of Lorentzian lattices*, J. Algebra **111** (1987), 133-153.
- [2] J.H. Conway, N.J.A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups*, Grundlehren Math. Wiss. Bd 290, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1988.
- [3] J.I. Hutchinson, *On some birational transformations of the Kummer surface into itself*, Bull. Amer. Math. Soc. (2) **7** (1901), 211-217.
- [4] R.W.H.T. Hudson, *Kummer's quartic surface*, Cambridge Univ. Press. 1905.
- [5] J.H. Keum, *Automorphisms of Jacobian Kummer surfaces*, to appear in Compositio Math.
- [6] F. Klein, *Ueber Configurationen, Welche der Kummer'schen Fläche zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind*, Math. Ann. **27** (1886), 106-142.
- [7] S. Kondo, *The automorphism group of generic Jacobian Kummer surface*, J. Algebraic Geometry(to appear).
- [8] E.B. Vinberg, *Some arithmetic discrete groups in Lobachevskii spaces*, in Proc. Int. Coll. on Discrete Subgroups of Lie Groups and appl. to Moduli (Bombay 1973), pp. 323-348. Oxford Univ. Press 1975.
- [9] E.B. Vinberg, *The two most algebraic K3 surfaces*, Math. Ann. **265** (1983), 1-21.