代数幾何学シンポジウム記録
1997年度 pp.168-184

曲面の非可換変形のいくつかの例について

土基善文

ABSTRACT. この小文では可換スキーム、とくに曲面の非可換方向への変形の話題を中心にして、非可換代数幾何学のいくつかの話題について概観する。まず非可換空間および非可換スキームの定義を Rosenberg [8] に従って述べる。(2,3 節。) 次に可換スキームの非可換スキームとしての無限小変形をコホモロジーの言葉を用いて表現し、それが三種類に分かれることを示す。(5 節) そのうちのひとつは良く知られた可換スキームとしての変形であり (6 節)、一つは交換関係の変更により得られる変形である (7 節)。最後の一つはブラウアー群に関係した変形である (9 節)。

CONTENTS

1. 序説

物理量を (微分) 作用素のスペクトルと見ると (原子の輝線「スペクトル」の問題などで) 実験に良くあう結果が出せることが認識されてからほどなく、作用素の非可換性が問題になって来た。

これは数学の言葉でいうと、次のような問題を考えていることにあたる。

可換理論では $\operatorname{Spec} A$ の $\mathbb{C}$-値点を考えるということは、A の線型表現における同時固有値ないし固有スペクトルを求めることに対応しており、A の性質はしばしば $\operatorname{Spec} A(\mathbb{C})$ を調べることにより完全にわか

る。C^* 環の理論においてもこの現象は顕著であり、Gel'fand による表現定理によれば、可換 C^* 代数はその同時スペクトルの構造からもとの環の構造が復元できることがわかる。これらの事実はいずれも「互いに可換な行列の族は、そのおのおのが対角化可能ならば、同時に対角化可能である」という良く知られた事実が元になっている。

一般の "可換な" (つまり、通常の) スキームについては $\mathbb{C}$ のようなひとつの万有体での線型表現で話が済む訳ではないが、上のような精神は受け継がれているといってよい。

一方、非可換な環を扱う際には全く事情が異なる。互いに可換でない行列を同時に対角化するのは一般には不可能であり、正準交換関係

$$px - xp = 1$$

を満たすような行列 x, p はどのような場合においても同時固有値をもち得ない。このことは、これら二つの物理量を同時に観測することは一般には不可能であることを示唆している。

このような事態を解決するには、例えば次のような手立てが考えられる。

1. 近似をとる。量子力学に現れる非可換性 (可換な理論からのずれ) はわずかであるので、それを無視して可換理論で話を進める。巨視的理論では大抵の場合これで十分であるが、微細な世界を研究するためにはそうも言っていられない。
2. 互いに可換な変数のみを観測する。いくつかの変数は互いに可換であるから、それらのみを観測して満足する。でもそれだけでは済まないだろう。
3. amplitude を考える。環の言葉で言うと、環 A から $\mathbb{C}$ への環準同型は少ないので、線型写像 ("amplitude") φ を相手にする。A が可換な時には φ は準同型の線型な重ねあわせになっているので、φ を「 $\operatorname{Spec} A$ の各点に複素数の重みをつけたもの」と解釈できる。あるいは物理的な言葉を使えば φ は古典的な状態の重ねあわせである。A が可換でない時にもおおむねそのような気持ちで取り扱うとある程度解釈できる。

「確率解釈」のキーワードで語られる三番目のアプローチは最初は奇異な印象を与えるものの、成功をおさめて量子力学の骨格の一部をなして来た。

しかし、これは局所的な、相空間が近似的に $\mathbb{R}^{2n}$ と思える時の話であって、相空間が「曲がって」いる時にどうなるかについては十分分かっているとは言えない。n 変数微分多項式のなす環 D の「スペクトル」(量子論的な世界) が近似的に R^{2n} を与えて古典力学的な平坦な世界を見せているように、古典的なリーマン多様体の世界 (重力の働いている世界) を与えている「非可換な空間」があってしかるべきである。非可換幾何学はそのような問題を取り扱おうとする。目標は非可換の世界に可換理論と同等以上の理論を見出すことである。可換理論で言うところの「空間」は全て「非可換空間」に置き換えたい。

但しこれにははじめから困難が見えている。例えば非可換空間の「モデュライ空間」も非可換なものに置き換えたいのであるが、前述の通り非可換空間には十分な点がないため、「モデュラス」が十分にはないことになる。すなわち、「ひとつの」非可換空間を取り出すのは一般には不可能で、実際に扱えるのはそれらの「重ねあわせ」としてのモデュライ空間上の amplitude だと言うことになる。

そこでひと安心か、と思うとそうではなくて、今度はモデュライ空間自身にもこの問題が当てはまる。モデュライ空間自身が「ひとつで」存在するのは幸運であって、一般にはおそらくそうではない。(これは無限に続く)

この状況をうまく処理する方法があるのかどうかは定かではない。(告白しなければならないのだが、私は神秘主義者である。いままでの殻を破ろうと思って外に出てみると、そこは数学の世界ではなかった、と言うことがしばしばある。ZFC(Zermero-Fraenkel の公理+連続体仮説) から出発する様な、大きな入れものをつくってその中で遊ぼう、と言う縮み思考の立場は放棄され、神、界王、界王神などと必要に応じて作っていくトリヤマアキラ的な方法が検討されねばならないのかも知れない。)

が、そう言っていても仕方がないので、とりあえずどっかの段階で幸運な状況が起こっているとして先に進まねばなるまい。

はじめのステップは非可換多様体を定義し、その性質を調べることである。

この小文では可換スキーム、とくに曲面の非可換方向への変形の話題を中心にして、非可換多様体がどのようなものになるかについて調べる。まず非可換空間および非可換スキームの定義を Rosenberg [8] に従って述べる。(2,3 節。) 次に可換スキームの非可換スキームとしての

無限小変形をコホモロジーの言葉を用いて表現し、それが三種類に分かれることを示す。(5節) そのうちのひとつは良く知られた可換スキームとしての変形であり(6節)、一つは交換関係の変更により得られる変形である(7節)。ここでは $\mathbb{P}^1 \times X$ と二次元トーラスの二つの例をとりあげてこの変形について考察する。

最後の一つは幾何学的ブラウアー群に関係した変形である。この部分については今少し研究が必要である(9節)。

なお、余談であるが、「非可換-」はしばしば「量子-」と呼ばれる。それにはいくつか理由があって、

1. 「非可換-」と言う呼び方は紛らわしく、混乱を生じやすい。例えば「非可換群スキーム」と「群非可換スキーム」とを区別しなければならなくなる。
2. 「非」可換という言葉が否定的なイメージを与える。

等々。もっともなところもあるのだが、「量子」数学は量子論の思想を盛り込んだ数学を(必要なら数学を一から書き直したものを)指すべきであろう。(それが最終的に「非可換」の方向なのかどうかもわからない。) そういう意味でこの小文では「量子」と言う言葉は使わずにもっぱら「非可換」と言う言葉を用いることにする。

2. 非可換空間の定義

非可換幾何学を始める上でまず問題になるのは、非可換スキームというものをいかにして定義するかである。ここでは Rosenberg [8] の見方を採用する事にする。まず、「非可換空間」を定義する事から始めよう。ここでは空間をその上の準連接層のなすアーベル圏によりとらえる。すなわち非可換空間とはこの立場では単にアーベル圏のことである。(層のセクションとは「場」の別名であると解釈できる。そう考えるとここの考え方は空間をその上の場の「種類」と場の間の「関係」により捉えようとしているとも言えて、なかなか面白い。) 非可換空間の間の射は次のようにして定義する。

Definition 2.1. [8] Let $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ be abelian categories. A morphism f from $\mathcal{C}_1$ to $\mathcal{C}_2$ (in the sense of Rosenberg) is an isomorphness class of right exact additive functors from $\mathcal{C}_2$ to $\mathcal{C}_1$. A representative of the class is called an inverse image functor. And if we made a choice of one such, we denote it by f^*. f is said to be continuous if the inverse image functor f^* has a right adjoint (called a direct image functor f_* of f).

注意 右 adjoint f_* の存在は f^* の順極限との可換性を保証している。実際、$\mathcal{C}_2$ の任意の帰納系 $\{M_i\}$ をとって来ると、任意の $N \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_1)$ について、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}(f^*(\varinjlim M_i), N) \cong \mathrm{Hom}(\varinjlim M_i, f_*N) \\
&\cong \varprojlim \mathrm{Hom}(M_i, f_*N) \cong \varprojlim \mathrm{Hom}(f^*M_i, N) \\
&\cong \mathrm{Hom}(\varinjlim(f^*M_i), N).
\end{aligned}
$$

が成り立つから、$f^*(\varinjlim M_i) = \varinjlim(f^*M_i)$ が成り立つことが分かる。上の定義で言うところの「連続」にはおそらくそういう意味がこめられているのだろう。

(適当な universe に関する) アーベル圏の全体に、上のような morphism を導入した物が、我々の「非可換空間」のカテゴリーである。

もちろん、普通の意味のスキーム、環付き空間等々は、その上の準連接層を考える事により、このカテゴリーの対象とみなす事ができる。

十分すぎるぐらい大きく見えるこの「空間」の捉え方にも補うべき点があって、

1. C^*-代数の理論のような、環と加群に位相をもたせる理論では、加群の全体はアーベル圏になり得ない。(同型でない全単射が存在したりする。) このことは、例えば通常の環の (ベクトル空間としての) 双対を考えたい時などにはこれは少し問題になる。(Manin [7] にも少しそのような位相の問題について触れてある。)

2. 定義できる限りは、正しくない (笑)。(1 節をみよ)

そうは言うものの上の定義は代数的にはさしあたって考えられる限りいちばん大きな風呂敷を広げていると言っても良いだろう。ここまで空間の概念を広げておくと、貼り合わせ等の諸概念についていちいち正当化の心配をしなくて済む。安心感を与えてくれる定義である。

ところで、“準連接層の全体のカテゴリー” は、元の空間を復元できるぐらい十分多くのデータを持っているのか、と言う疑問が生じる。結論から言えば、「構造射」をコミにして考えれば答えは肯定的である。以下そのことについて述べることにしよう。

まず、(可換とは限らない) 環 R について、圏 (R-mod) が R を復元できるかどうかについては、次の補題が答を与える。

Lemma 2.1. *Let k be a ring, R_1, R_2 be k-algebras. Let $\rho_i : (R_i\text{-mod}) \to (k\text{-mod})$ be structure morphisms (that is, morphism defined by the structure homomorphisms $k \to R_i$) ($i = 1, 2$). We define an equivalence of homomorphisms from R_1 to R_2 by saying that two homomorphisms $\phi, \psi : R_1 \to R_2$ are equivalent if and only if there exists an invertible element u of R_2 such that $u\phi u^{-1} = \psi$. Then there is a bijection between the set $\mathrm{Hom}_k(R_1, R_2)/\sim$ of equivalence classes of k-algebra homomorphism and the set of morphisms $f : (R_2\text{-mod}) \to (R_1\text{-mod})$ which satisfies $f \circ \rho_1 = \rho_2$. In particular, a category isomorphism $(R_2\text{-mod}) \cong (R_1\text{-mod})$ which commutes with ρ_1, ρ_2 exists if and only if the two k-algebras R_1 and R_2 are isomorphic.*

この補題の証明には、容易に分かる次の事実を使えば良い。

$\rho_i^*(k) \cong R_i \quad (i = 1, 2)$

$\mathrm{Hom}_{R_i}(R_i, R_i) \cong R_i^{\mathrm{opp}}($ $i = 1, 2$, 代数としての同型)

$\mathrm{Hom}_{R_i}(R_i, M_i) \cong M_i(i = 1, 2$, 加群としての同型)

上の議論を追うと分かるのだが、構造射 ρ_i を指定する事には、「基点」$\rho_i^*(k)$ を決める役割がある。実は基点を決めないでおくと、圏 $(R\text{-mod})$ だけでは R を同定するのに十分な情報を与えない。二つの環 R, R' は $(R\text{-mod})$ と $(R'\text{-mod})$ とが圏として同値の時森田同値と言われる。ある環に森田同値な環がどのようなものかについては次の補題でわかる。

Lemma 2.2. *(Theorem 3.23 in* [4] *For a given ring R let e be an idempotent in a matrix ring $M_n(R)$, $n \geq 1$, such that the ideal $M_n(R)eM_n(R)$ generated by e is $M_n(R)$. Then $R' = eM_n(R)e$ is Morita similar to R. Moreover, any ring Morita similar to R is isomorphic to a ring of this form.*

複数の環 R に対して対応するアーベル圏 $(R\text{-mod})$ が同値になることは問題のようにも見えるが、この状況はうまく利用すれば面白いことができると思われる。9節を参照のこと。

さて、可換環のみを考えるとどうなるか、と言う問いに関しては、通常の意味のスキームにまで一般化して次のような事が分かっている。

Lemma 2.3. [8] *Every (usual) scheme X may be recovered from the category $(\mathrm{Qcoh}(X))$ of quasicoherent sheaves on X.*

3. 非可換スキームの定義

標語的にいえば、スキームというのは「扱いやすい」アーベル圏の事であるといえる。どの程度扱いやすいのが良いかは場合にもよろうが、ここでは前節に続いて Rosenberg [8] の見方を採用し、そのスキームの定義を述べる。

まずは「局所化」の定義である。

Definition 3.1. [8] A morphism f (in the sense of Rosenberg) between categories is said to be flat if the inverse image functor f^* is exact. f is called a flat localization if f is flat and has a fully faithful direct image functor.

次に、「アファインスキーム」の定義をする。

Definition 3.2. [8] A continuous morphism f (in the sense of Rosenberg) between categories is said to be almost affine if the direct image functor f_* is exact and faithful. f is said to be affine if f_* is faithful and has a right adjoint.

この定義がどうして「アファインスキーム」に当たるものを定義していることになるのかについては少々注釈が必要だろう。Monad の定義について思い出しておくことにする。

Definition 3.3. A monad $F = (F, \mu^{(F)}, \eta^{(F)})$ on a category $\mathcal{C}$ is a functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ with a natural transformations $\mu^{(F)} : F^2 \to F$ ("multiplication") and $\eta^{(F)} : \mathrm{id} \to F$ ("unity") which satisfies certain axioms ("associativity" and ""unity" being unity")[5]. We denote by (F-mod) the category of F-modules (F-algebra in the language of Mac Lane[5]). By definition, an F-module is a pair (M, α) of an object M of the category $\mathcal{C}$ and an arrow $\alpha : FM \to M$ ("action") which satisfies "axioms of action".

詳しくは [5] を参照のこと。Monad の言葉を使うと上記アファインスキームの定義は次のように言い替えられる

Lemma 3.1. [8] *Let $\mathcal{C}_2$ be an abelian category. For any right-exact monad F on $\mathcal{C}_2$, we have a morphism $f : (F\text{-mod}) \to \mathcal{C}_2$. A continuous morphism $f : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ is almost affine if and only if $\mathcal{C}_1$ is equivalent over $\mathcal{C}_2$ to (F-mod) for some right-exact monad F on $\mathcal{C}_2$.*

Monad の代表例として次のものがある。

Example . Let A be an algebra and B an A-algebra. Then a functor $F : \mathcal{C} = (A\text{-mod}) \to \mathcal{C}$ given by tensor products $F(M) = B \otimes_A M$ is a monad. The category (F-mod) is isomorphic to the category (B-mod) of B-modules. The morphism $f : (F\text{-mod}) \to \mathcal{C}$ in this case is identified with the morphism associated to the structure morphism $A \to B$.

以上のことから、環準同型 $A \to B$ があれば (B-mod) は (A-mod) 上のアファインスキームとみなすことができることが分かる。

一般の monad を扱う時には、$F(M)$ を心の中で $B \otimes_A M$ と読みかえてダイアグラムを書くと、上の例と同様に処理できることが多い。例えば、次の補題のような調子である。

Lemma 3.2. *Let $\mathcal{C}$ be an abelian category. Let F, G be monads on $\mathcal{C}$. Let $\theta : F \to G$ be a morphism of monads* [5]. *Then there exists a morphism (in the sense of Rosenberg) such that its direct- and inverse image functors are given as follows.*

$$f_*(y, \beta) = (y, \beta \circ \theta_y)$$
$$f^*(x, \alpha) = (Gx/\langle(\eta_x^{(G)} \circ \alpha - \theta_x)Fx\rangle_G, \mu^{(G)})$$

where the symbol $\langle m\rangle_G$ denotes a "G-submodule of $(Gx, \mu^{(G)})$ generated by a sub object m of Gx". That is,

$\langle m\rangle_G = \mathrm{Image}(\mu^{(G)} \circ G\lambda : Gm \to Gx)$ $\quad$ *($\lambda : m \to Gx$ is the inclusion)*

お待ちかねのスキームの定義は次のようになる。

Definition 3.4. [8] A set of flat localizations $\{f_i : \mathcal{C}_i \to \mathcal{C}\}$ is said to be a Zariski cover of $\mathcal{C}$ if any arrow s of $\mathcal{C}$ such that $f_i^*(s)$ is invertible for all i is invertible. A continuous morphism $f : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ is said to be a quasi-scheme over $\mathcal{C}$ if there exists a Zariski cover $\{u_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}\}$ such that $f \circ u_i$ is almost affine for each i.

上のスキームの定義は、「局所的にアファイン」と言う従来のスキームの定義をカテゴリーの言葉を使って非可換の場合にまで拡張した物で、分かりやすいが、この定義がどのくらい良いかは、あとあとの判断を待たねばなるまい。

非可換空間の例としてアファインスキームの次に現れるのは、やはり射影「スキーム」であろう。

Definition 3.5. (See [2] and references cited there.) Let A be an $\mathbb{N}$-graded algebra We define the projective spectrum of A as follows.

$$\mathrm{Proj}(A) = (\text{graded A-module})/(\text{Torsion}),$$

where "(Torsion)" is a collection of modules M which satisfy the following property.

$$M = \sup\{M_{(n)}\}, \quad M_{(n)} = (\text{elements of } M \text{ annihilatate by } R_{>n})$$

A の乗法が適当な交換関係(Öre property) を持てば、Proj A は Rosenberg の意味のスキームになる。一般にはおそらく Proj A は Rosenberg の意味のスキームにならないこともあると思われる。(が、「スキームにならない」証明は難しそうである。) 要は非可換空間が Rosenberg の意味のスキームになっていれば可換理論と平行な理論が進む幸運に感謝しながら先を進め、そうなっていなければ他の意味で「扱いやすい」かどうか検討してみれば良いのである。

4. 非可換スキームをつくろう。

スキームの定義は前節に述べたようなものがあるので、次の目標は非特異多様体に当たる「良い」スキームを定義することである。

どのような意味で「良い」かはいろいろ考えられようが、いくつか羅列してみると、

1. (コ) ホモロジー論的な定義を考える。スムース性の最終的な定義はホモロジー代数の言葉で述べられるのが妥当であると思われる。既にいくつか定義が提出されているようであるが、いまのところ私は余り詳しくないのでここで述べることは控えさせて頂く。
2. 非特異性の本質はその等質性にある、と見ることもできる。例えば、C^∞ 多様体はその自己微分同相群上の等質空間であり、スムースな可換スキームには自己同型は少ないがその無限小版であるベクトル場が局所的には十分多くある。
3. 良いものの小さい変形はよいはずである。と言う仮設をたてることもできる。たとえば、通常の意味のスムースなスキームは良いものであろうから、その小さい変形を考えれば良いスキームの例を作れるのではないか。(ただし話を「プロパーな」スキームに限るべきである。プロパーでない多様体の変形はいきなり悪くなる可能性がある。)

4. generic なものは良いものである。すなわち、非可換スキームの族において、大多数を占めるものの特徴が良いものを表現している。

次節以降では、3. の考えに従って、「良い」非可換スキームの例を得ることを試みよう。

5. 可換スキームの非可換スキームとしての無限小変形

三種類の無限小変形 X を $\mathbb{C}$ 上の可換スキームとする。X の一次の無限小変形を考えよう。X を $\mathbb{C}[\epsilon]/(\epsilon^2)$ 上の非可換スキームに延長しようと言うわけである。これには要は X 上の加群の層 $\mathcal{O}_X + \mathcal{O}_X\epsilon$ に $\mathbb{C}[\epsilon]$-双線型な乗法 m_ϵ を

$$m_\epsilon(f,g) = fg + \epsilon\beta(f,g) \quad (f,g \in \mathcal{O}_X)$$

という具合に定義し、この乗法が結合律を満たすようにすればよい。(ここでは暗黙のうちに次の二つの仮設がおかれている。

1. 無限小変形においては、関数環の線型空間としての「サイズ」は元の物と変わらない。
2. ϵ は 新しく作った層の元と可換である。

二番目の仮設については、モデュライ空間の可換な部分のみを眺めていることに当たるので、将来は見直さねばならないと思われる。)

さて、m_ϵ が結合律を満たすための条件を書き下してみると、β があるコサイクル条件を満たすべし、と言うかたちに落ち着くのがわかる。このコサイクルを然るべき同値類で類別したものはホッホシルトコホモロジーの言葉で $H^2(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)$ と書かれるものである。あるいは別の言葉で言えば上のことは $\mathcal{O}_X$ の $\mathcal{O}_X$ による拡大を考えていることに当たるので、 $H^2(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)$ の変わりに $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_X^\flat}(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)$ ($\mathcal{O}_X^\flat = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X$) と書いても良い。両者は同じものである。

この Ext^2 をもう少し見慣れたもので表現することを考えてみよう。導来函手の間の等式

$$\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X^\flat}(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X) = \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{O}_X^\flat}{\bigotimes}} \mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)$$

により、スペクトル系列

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X^\flat}(\mathcal{T}or_j^{\mathcal{O}_X^\flat}(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)) \to \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{O}_X^\flat}(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X) \tag{5.1}$$

が得られる。X がスムースなら、

$$\mathcal{T}or_j^{\mathcal{O}_X^b}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \cong \Omega_X^j$$

と言う同型がある。(特に、これらの層はフラットである)

正確な条件は何だったか忘れたが、X が良いものの場合には上のスペクトル系列 (5.1) は退化する。したがって、一次の無限小変形をパラメトライズする空間は

$$\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_X^b}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \cong H^0(\Omega_X^{2*}) \oplus H^1(\Omega_X^{1*}) \oplus H^2(\mathcal{O}_X)$$

($*$ は 双対加群をあらわす) と分解する。すなわち、スキームの (非可換) 無限小変形は大きく三つの種類に分かれる。この三つについて、それぞれ対応する変形がどういうものか、無限小変形ではなく本当の変形で実現することに注意を払いながら、以下の数節で様子を見る事にする。

以下の議論での引用のためにここで二次元射影非可換スキームに関する次の予想を載せておく。

Conjecture of M. Artin ([2])

Let k be an algebraically closed field of characterstic zero, and let A be k-algebra of dimension 3 sastisfying the “good” properties. Then one of the following holds:

(i) $X = \mathrm{Proj}\, A$ is finite over its center,
(ii) X is q-rational, or
(iii) X is q-ruled.

(ステートメントは一部 省略してある。“good” がどのような意味か、等詳しくは原論文を参照のこと。)

容易に想像がつくように、q-rational, q-ruled な非可換スキームとはそれぞれ rational, ruled な (通常の) 曲面の変形に当たる。上の予想は、それ以外は可換スキームに毛を生やしたようなもの (可換スキーム上の代数の層) しかないと主張している。

6. 可換方向への変形

無限小変形のうちで、おそらく読者にとってお馴染みなものは $H^1(\Omega_X^{1*})$ であろう。(人によっては $\mathrm{Ext}^1(\Omega_X^1, \mathcal{O}_X)$ と書いた方がお気に召すかも知れない。)

この空間の元に対応する無限小変形は「可換方向」への変形であって、その理論は小平・スペンサー理論として有名である。チェックコホモロジー的な解釈によれば、これは多様体全体をいくつかの「プレート」に分け、プレート間の微小な変位を記述することにより多様体の変形を記述しようという「プレートテクトニクス」理論を考えることになる。

7. 交換関係の変更

この節では、$H^0(\Omega_X^{2*})$ の元の解釈について述べる。スペクトル系列(5.1) を追ってみると、$\alpha \in H^0(\Omega_X^{2*})$ によって、$\mathcal{O}_X[\epsilon]$ に次のような乗積表がきまることが分かる。

$$m_\epsilon(f,g) = fg + \frac{\epsilon}{2}\alpha(df \wedge dg)$$

この乗積において本質的なのは、f と g との交換関係の変更である。すなわち、元の積では $fg - gf = 0$ であったものが、$m_\epsilon(f,g) - m_\epsilon(g,f) = \epsilon\alpha(df \wedge dg)$ と変わっている。 以下では $\alpha(df, dg)$ のことを $\{f, g\}$ と書き、f, g のポアソン括弧と呼ぶ。

2-フォームの空間の双対の元 α (ポアソン括弧 $\{\cdot,\cdot\}$) を与える事により決まるこのような量子化は C^∞ 多様体のを相手にしている場合にはポアソン多様体の量子化として良く知られたものである。(なお、この一次の変形が高次の変形に延びるための、いわゆる可積分条件は、ポアソン括弧 $\{\cdot,\cdot\}$ が Jacobi の恒等式を満たす事であることが知られている。(この周辺のことについては例えば [3] を参照のこと))

(余談であるがリーマン多様体の無限小変形では、S^2T と $\wedge^2 T$ のセクションが肩を並べて出て来ることになるので、$T \otimes T$ のセクションがフルに必要になる。これは面白い事実のような気がする。)

もう少し C^∞ 多様体の量子化の話を続けると、考えている多様体が偶数次元の時にスムースな非可換スキームを得るのには、5 節の 4. によれば、α が非退化な方向に変形するのが良いと思われる。このような場合の量子化はシンプレクティック量子化と言われて特に良く調べられている。ところが代数幾何的な状況においては、α が全ての点で非退化であることを望むのは一般には不可能である。後述するように、α が退化している場所では退化していない所に比べて特異な現象が起こっており、5 節の 2. に照らしてもあまり嬉しくない。このことは、ひょっとしたら α が正則な関数であると言う要請が (多様体の計量が正

則関数であると言うのが望みすぎ、と言うのと同様に) 望みすぎであるのではないか、とも思わせる。しかしこれはこの段階であまり憂慮しても仕方がないというものだろう。

非可換変形の実現の簡単な例として、接合積による構成を扱ってみることにする。X を $\mathbb{C}$ 上の可換なプロパー、スムースなスキームとし、X には自己同型の 1 パラメーター群 $\{\sigma_t\}$ が与えられているとする。特に、X 上には ベクトル場 V (σ_t の無限小生成元 $\dot{\sigma_0}$) が一つ与えられていることになる。$\mathbb{P}^1 \times X$ 上に α として

$$\alpha = z\frac{d}{dz} \wedge V \quad (z \text{ は } \mathbb{P}^1 \text{ の非斉次座標})$$

を採用して、これに対応する $\mathbb{P}^1 \times X$ の変形がどうなるか、というのが問いである。z と X 上の関数 ϕ との交換関係は、

$$z\phi = \phi z + \epsilon z V(\phi)$$

となるが、これを書き直すと、

$$z\phi = (\phi + \epsilon V(\phi))z = \sigma_\epsilon(\phi)z$$

となる。この交換関係は容易に無限小ではない「本当の」パラメータ t にまで延長される。すなわち各 $t \in \mathbb{C}$ にたいし、

$$z\phi = \sigma_t(\phi)z \tag{7.1}$$

なる交換関係で与えられるような関数環を考えれば、$\mathbb{P}^1 \times X$ の変形族が得られることになる。上記の関係式は ($\mathbb{N}$ と関数環との) 接合積として良く知られているものであり、この話は (Rosenberg の意味の) スキームの言葉で全て正確に記述することができる。([9])

Proposition 7.1. [9] *Let $\mathcal{C}$ be an abelian category with direct sums of countable objects. Let $h : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ be a morphism in the sense of Rosenberg which is invertible. Consider an action of $\mathbb{Z}$ on $\mathcal{C}$ generated by h. Then we may define a "skew projective line" $\mathbb{P}(h)$ associated to h as follows*

$$\mathbb{P}(h) = (\mathbb{N} \ltimes \mathcal{C}) \cup_{\mathbb{Z} \ltimes \mathcal{C}} ((-\mathbb{N}) \ltimes \mathcal{C})$$

it is a quasi scheme on $\mathcal{C}$. If $\mathcal{C}$ is a quasi scheme over a base scheme $\mathcal{C}_0$ and there exists a h-invariant Zariski cover of $\mathcal{C}$, then $\mathbb{P}(h)$ is a quasi scheme over $\mathcal{C}_0$.

この構成を使えば q-rational/q-ruled な曲面を作ることができる。

ここで α の退化した点で起こる現象について観察してみよう。$\{0\}\times X$ の各点において α は明らかに退化している (のみならず、完全に 0 である。) これらの点は変形後も生き残っていて、非可換空間では珍しいはずの $\mathbb{C}$-値点を生み出している。すなわち $z=0$ は交換関係 7.1 の解になっている。この例に限らず一般的に言って α が 0 になる点では交換関係の変更後も $\mathbb{C}$-値点が残り、他の部分と明白な相違を見せていて、いわば「特異な」印象を与える。逆に言うとこれら $\mathbb{C}$-点が十分たくさんあるおかげで、そこを「切れ目」に上の命題で言うところの $\mathcal{C}$ をアファインスキームの和に分割でき、quasi-scheme たり得ているのであって、そういう切れ目のない対象 (もしあれば–前述の M.Artin の予想は曲面ではそういうものはないことを主張している) に出食わしたらうまく扱えるかどうか、興味深いところである。

8. マーニンの量子化されたテータ関数 [6] との関係

前節での話では $\mathbb{P}^1$ という「大域的な」座標変数 z をもったスキームを使っているので楽だったが、一般の場合はそうはいかない。一般の交換関係の変更の様子を知るために、話を "analytic" (ないし、formal) な場合にまで広げて、二つの楕円曲線 (というか、一次元複素トーラス) $E_i=\mathbb{C}/L_i$ ($L_i=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau_i$ は $\mathbb{C}$ の maximal lattice)$(i=1,2)$ の積 $E_1\times E_2$ の変形について考えてみることにしよう。今度は (トーラス全体で定義された関数という訳ではないが) 平坦な座標関数を用いることができる。また、$E_1\times E_2$ の双対 2-form は (0 以外は) 必ず非退化であり、ある意味では最も「非特異」の語にふさわしいものが期待できそうである。

E_1, E_2 の平坦な座標関数をそれぞれ z,ζ と書くことにする。z と ζ との交換関係を次のように変更しよう。

$$z\zeta-\zeta z=t \quad (t\in\mathbb{C})$$

z や ζ は周期関数ではないので E_1, E_2 の関数とみなすことはできない。そこで例えば $\wp(z)$ と $\wp(\zeta)$ との交換関係がどうなるかが問題になる。(なお、以下の計算を間に合わせ的に正当化するには、z 及び ζ をそれぞれ $z\times$, $-td/dz$ という $\mathbb{C}((z))/\mathbb{C}[z,z^{-1}]$ 上の (可逆な) 作用素と見做し、作用素の収束はその関数空間上の単純収束の位相を考えれば良い。逆に言えば以下では $\wp(z)$ と擬微分作用素 $\wp(d/dz)$ との交換関係を計算し

ていることになる。) まず、上の式から一般に、$z\phi(\zeta) = t\phi'(\zeta) + \phi(\zeta)z$ が ζ の多項式あるいはその極限で与えられるような ϕ (以下このようなものを単に「式」と言い表す) について成り立つ。とくに、$\xi = e^{2\pi\sqrt{-1}\zeta}$ とおくと、

$$z\xi = \xi(z + 2\pi\sqrt{-1}t)$$

が成り立つことが分かる。これは、任意の z の「式」 $f(z)$ にたいして

$$f(z)\xi = \xi f(z + 2\pi\sqrt{-1}t)$$

が成り立つことを示しており、とくに、$x = e^{2\pi\sqrt{-1}z}$ とおくと、$x\xi = a\xi x$ と書けることになる。マーニン [6] はこの交換関係から出発して、テータ関数の量子版について論じている。その考察は (2 次元とは限らない) 一般のトーラスの量子化にあたるものを関数環の位相まで込めて議論していることになっていて興味深いものであるが、その全部をここで紹介するわけにもいかない。そこでここではとくに a が特別の値をとる時について議論したい。(実質的には [6] において「a が 1 の巾根の時」として扱われている。) $\xi \to a\xi$ は E_2 のある自己同型 σ で書けることに着目すると、これは $x\xi = \sigma(\xi)x$ とかくこともできる。そこで、ξ の任意の「式」に対して

$$x\phi(\xi) = \sigma(\phi(\xi))x$$

が成り立つことになる。いま、σ の位数 N が有限であるとする(このようなσ に対応する t は $\mathbb{C}$ のなかで稠密である) と、E_2 の上の「関数空間」(例えば、有理関数体) は σ によって固有分解を受ける。ϕ_k がそのひとつの固有関数、すなわち、

$$\sigma(\phi_k) = \omega^k\phi_k \quad (\omega = e^{2\pi\sqrt{-1}/N})$$

ならば、上の関係式は、$x\phi_k = \omega^k\phi_k x = \phi_k\tau^k(x)$ となり、$x \to \omega x$ が E_1 のひとつの自己同型 τ に対応することに着目すると、上と同様の議論により、任意の x の「式」$f(x)$ にたいし、$f(x)\phi_k = \phi_k\tau^k(f(x))$ が成り立つことが分かる。この最後の式は、代数的に取り扱い可能であって、次のような補題に一般化できる。

Lemma 8.1. *Let H be a $\mathbb{C}$-bialgebra, A an H-module $\mathbb{C}$-algebra and B be an H-comodule $\mathbb{C}$-algrebra. Then $A \otimes_{\mathbb{C}} B$ has a structure of a (unital associative) $\mathbb{C}$-algebra given by*

$$(a \otimes b) \cdot (x \otimes y) = ab_{(-1)} \rightharpoonup x \otimes b_{(0)}y,$$

where we denote the left comultiplication $\psi B \to H \otimes B$ *by*

$$\psi(b) = b_{(-1)} \otimes b_{(0)},$$

and multiplication of an element $h \in H$ *on* $x \in A$ *by* $h \rightharpoonup x$

出て来る述語等については [1] を参照のこと。(とくに、「H-module $\mathbb{C}$-algebra と言う述語に対しては注意が必要かと思われる。) この補題は、A と B との間に交換関係を設定して、$A \otimes B$ に積を導入するには、bialgebra による action と coaction がそれぞれ B, A にあれば十分であることを示している。少し考えると分かるのだが、A, B が有限次元の時などはこれは必要でもある。(これらの事実や上の補題は基本的かつ簡単なのだがどこを引用すべきか分からなかった。土基にお教え願えると幸いである。)

有限群 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ とその双対によるトーラスへの作用 (平行移動) をホップ代数で表現し、上の補題を適用すると上の議論と同等のことができる。しかし、反省してみると、上の議論で、σ の 1-固有空間は E_2/σ の関数空間と同一視でき、それらの元は変形された代数の中心に属するので、容易に分かるように変形された環は $(E_1/\tau) \times (E_2/\sigma)$ の上の有限階数の代数の層のセクションと見做すことができる。したがって、残念ながら以上の考察のみからは Artin の予想の反例を得ることはできない。トーラスの変形族のうち射影的なものが本当に上に挙げたものしか無いかどうかは面白い問題だと思われる。

とりあえず、この場合には変形は “analytic” ないし “formal” なカテゴリーでうまく実現されており、その中の “rational” な点に対応しているもの (のみ？) が代数的である。

9. 幾何学的ブラウアー群の方向への変形

さて、

$$H^2(X, \mathcal{O}_X)$$

の方向の変形については、幾何学的ブラウアー群のコホモロジー群による表示

$$\mathrm{Br}(X) = H^2_{\text{ét}}(X, \mathcal{O}_X^\times)_{\text{torsion}}$$

を想起させる。(聞く所によると普通右辺のエタールコホモロジー群にはもともと位数有限の元しか無いらしいが解析幾何の場合も睨んでこう書くのを許して頂きたい。)

この表示の作り方を思い出してみると、右辺の元に対して X の 被覆 $\{U_i\}$ をとり、$M_n(\mathcal{O}_{U_i})$ を うまくつなぎ直すことにより、X 上の代数の層 $\mathcal{A}$ (東屋代数) を構成するというものであった。先に述べたように $\mathcal{O}_X$ と $M_n(\mathcal{O}_X)$ とは森田同値であるから、$\mathcal{A}$ 加群のカテゴリーを構成するのは単に $\mathcal{O}_{U_i}$ 加群のカテゴリーをつなぎ直すことにほかならない。すなわち、上の表示の解釈においては、カテゴリー論的に考える方がかえって自然であることが納得頂けるだろう。

前節でも見られたことだが、非可換スキームの族を考えようとするとある連続的な対象の有理点ないしトージョン点に対応する部分のみが捉えられることがあるようだ。「解析幾何学」の様な対象にまで話を広げて、とびとびにしか出て来ていない「東屋代数 $\mathcal{A}$ の上の module の圏」を補間するような圏が「解析幾何学」の様な対象にまで話を広げて出て来ると面白い。

また、前節で見た二次元トーラスの変形はこの節で述べた構成と深く関連している。この奇妙な合致が何を意味しているかは、興味深い研究材料になると思われる。

References

[1] Eiichi Abe, *Hopf algebras*, Cambridge Univ. press, 1980.

[2] M. Artin, *Geometry of quantum planes*, Contemporary Math. **124** (1992), 1–15.

[3] 大森英樹, 一般力学系と場の幾何学, 裳華房, 1991.

[4] N. Jacobson, *Basic algebra ii*, W. H. Freeman and company, 1980.

[5] S. S. Mac Lane, *Categories for the working mathematicians*, Springer Verlag, 1971.

[6] Yuri I. Manin, *Quantized theta-functions*, Progress of theoretical physics supplement **102** (1990), 219–228.

[7] ———, *Topics in non commutative geometry*, Princeton University Press, 1991.

[8] A. L. Rosenberg, *Noncommutative schemes*, MPI preprint MPI-96-109.

[9] Y. Tsuchimoto, *Constructions on non commutative schemes*, Mem. Math. Kochi Univ. (To appear).

Kochi University

Department of Mathematics

Faculty of Science

Kochi, 780 Japan

E-mail: docky@math.kochi-u.ac.jp