代数幾何学シンポジウム記録
1997年度 pp.142-154

K3 曲面上のベクトル束のモジュライ空間について（向井の演習問題について）

吉岡康太（神戸大学理学部）

K3 曲面上のベクトル束のモジュライ空間についての結果は，実は（最近の Huybrechts [H1,2] や O'Grady [O2] などは除き）ほとんどすべて向井先生により 10 数年前に得られているものである．ここではその 1 例について述べたいと思う．なお本文を読まれた方は

$\boxed{\text{階数は便宜的なものであり，向井ベクトルの長さのみが本質的}}$

ということに同意していただけるのではないかと思う．ともかく K3 曲面（あるいは Abel 曲面）の場合，あらゆる階数にわたってモジュライ空間を扱うのは単なる一般化ではなく大変自然なことなのである．もっとも，向井先生の Fourier 変換を考えればこんなことはあたりまえのことなのだが．なお今回の話にしろ Fourier-Mukai 変換にしろ，K_X が自明であるといろいろとおもしろいことがいえる．これはどうしてなのか，理由をご存知のかたは教えてください．以下敬称は略す．

Notation. 複素多様体 M とコホモロジー類 $x \in H^*(M,\mathbb{Z})$ にたいし，$[x]_i \in H^{2i}(M,\mathbb{Z})$ で x の第 $2i$-成分をあらわす．また $x=\sum_i x_i$, $x_i \in H^{2i}(M,\mathbb{Z})$ にたいし，$x^\vee = \sum_i (-1)^i x_i$ とおく．X を K3 曲面としたとき，射影 $S \times X \to S$ を p_S とあらわす．

1. 向井格子. $p : X \to \operatorname{Spec}(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}$ 上定義された K3 曲面とする．まず最も重要な概念である向井格子 [Mu2] を定義する．これは向井により [Mu2] において導入されたもので，今回の話でも大変重要な役割を果たす（本当は，そうなるように定義したのであろう）．

$H^*(X,\mathbb{Z})$ 上の対称形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle :&= -p_*(x^\vee y)\\ &= p_*([x]_1[y]_1 - [x]_0[y]_2 - [x]_2[y]_0),\end{aligned}$$

$x,y \in H^*(X,\mathbb{Z})$ で定めることにより，$H^*(X,\mathbb{Z})$ は格子の構造をもつ．この格子を向井格子と呼ぶ．$H^2(X,\mathbb{Z})$ と $H^0(X,\mathbb{Z}) \oplus H^4(X,\mathbb{Z})$ は直交するので，この格子 $\Gamma_{4,20}$ は符号数 $(4,20)$ の格子で次の分解をもつ:

$$\begin{aligned}\Gamma_{4,20} &= \Gamma_{3,19} \oplus H\\ &= (-E_8)^{\oplus 2} \oplus H^{\oplus 4}.\end{aligned}$$

ここで $\Gamma_{3,19}$ は K3 格子，また H は双曲格子である．

$H^2(X,\mathbb{Z})$ の Hodge 構造により，$H^*(X,\mathbb{Z})$ にも Hodge 構造がはいる．

1991 *Mathematics Subject Classification.* 14D20.

この格子の優れた点は Riemann-Roch の定理と大変相性が良いことである．X 上の連接層 E に対し, E の向井ベクトルを次で定義する:

$$\begin{aligned} v(E) :&= \mathrm{ch}(E)\sqrt{\mathrm{Td}(X)} \\ &= \mathrm{ch}(E)(\mathbf{1}+\omega) \in H^*(X,\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

ここで ω は X の基本類. すると Riemann-Roch の定理は次のように表わされる.

$$\begin{aligned} \chi(E,F) &:= \sum_{i=0}^{2} \dim \mathrm{Ext}^i(E,F) \\ &= -\langle v(E), v(F)\rangle. \end{aligned}$$

注意 1. 技術的には K_X が数値的に自明であることが本質的である．

ある連接層の向井ベクトルになっている $H^*(X,\mathbb{Z})$ の元も向井ベクトルと呼ぶことにする．

2. 向井格子の isometry.

(1) N を X 上の直線束としたとき，簡単な計算により

$$\langle x\,\mathrm{ch}(N), y\,\mathrm{ch}(N)\rangle = \langle x, y\rangle$$

がわかる．よって

$$\begin{aligned} T_N : H^*(X,\mathbb{Z}) &\longrightarrow H^*(X,\mathbb{Z}) \\ x &\longmapsto x\,\mathrm{ch}(N) \end{aligned} \tag{1}$$

は $\Gamma_{4,20}$ の isometry である．

(2) $\mathrm{O}(\Gamma_{3,19})$ を $\Gamma_{3,19}$ の直交群, $\mathrm{O}(3,19)$ を $\Gamma_{3,19}\otimes\mathbb{R}$ の直交群, $\mathrm{O}^+(3,19)$ を $\mathrm{SO}(3)\times \mathrm{O}(19)$ と同じ連結成分をもつ $\mathrm{O}(\Gamma_{3,19})$ の指数 2 の部分群とする．$\mathrm{O}^+(\Gamma_{3,19}) = \mathrm{O}(\Gamma_{3,19})\cap \mathrm{O}^+(3,19)$ とおく．これは X の微分同相写像群の $H^2(X,\mathbb{Z})$ への作用により定まる群である．H に自明に作用させることにより，これは $\Gamma_{4,20}$ にも作用する．

(3)

$$\begin{aligned} D : H^*(X,\mathbb{Z}) &\longrightarrow H^*(X,\mathbb{Z}) \\ x &\longmapsto x^\vee \end{aligned} \tag{2}$$

は isometry

(4) $v_1 \in H^*(X,\mathbb{Z})$ が $\langle v^2\rangle = -2$ を満たすとする．この時 v_1 は $\Gamma_{4,20}$ の鏡映変換を定める:

$$\begin{aligned} R_{v_1} : H^*(X,\mathbb{Z}) &\longrightarrow H^*(X,\mathbb{Z}) \\ x &\longmapsto x + \langle x, v_1\rangle v_1 \end{aligned} \tag{3}$$

これを向井の鏡映変換という．

$O(\Gamma_{4,20})$ はこれらで生成され，長さの同じ原始的ベクトルに推移的に作用する．

3. 向井の演習問題.

定義 1. L を X の偏極とする．向井ベクトル $v \in H^*(X,\mathbb{Z})$ に対し，$M_L(v)$ を $v(E) = v$ を満たす安定層がなすモジュライ空間とする．ここで $[v]_0 = 0$ の場合の安定性は Simpson [S] の定義を使う．

向井 [Mu1] により，$M_L(v)$ は次元が $\langle v^2 \rangle + 2$ の symplectic 多様体である．v が原始的ならば一般の偏極 L にたいし，$M_L(v)$ は射影的になる．

さて M を $2n$ 次元（コンパクト）既約 symplectic 多様体とするとき，Beauville [B] は $H^2(M,\mathbb{Z})$ 上に自然な対称形式 $B(\ ,\ )$ を定義した．B は原始的で，次の対称形式 B' に比例する．

$$B'(x,x) = \frac{n}{2}\int \phi^{n-1}\wedge\overline{\phi}^{n-1}\wedge x^2 + (1-n)\int \phi^n \wedge \overline{\phi}^{n-1}\wedge x \cdot \int \phi^{n-1}\wedge\overline{\phi}^n \wedge x, \quad (4)$$

ここで $\phi \in H^0(M,\Omega^2_M)$ は$\int \phi^n \wedge \overline{\phi}^n = 1$ を満たすようにとる．さて B の符号数は $(3, b_2(M)-3)$ である．M の局所変形族 $\mathcal{M} \to T$, $\mathcal{M}_0 = M$ にたいし，格子 $(H^2(\mathcal{M}_t,\mathbb{Z}), B_t)$ を考える．このとき同一視 $H^2(\mathcal{M}_t,\mathbb{Z}) \cong H^2(M,\mathbb{Z})$ により B_t は B に同一視される．

さて M の周期を格子 $(H^2(M,\mathbb{Z}),B)$ と $H^2(M,\mathbb{C})$ の部分ベクトル空間 $H^0(M,\Omega^2_M)$ の組の事として定義する．M の周期は双有理不変量である．つまり，

命題 1. $f : M \cdots \to M'$ を既約 *symplectic* 多様体の間の双有理写像とすると，f は準同型写像 $H^2(M',\mathbb{Z}) \to H^2(M,\mathbb{Z})$ を誘導し，これは *Hodge isometry* になる．

さて $M_L(v)$ が既約 symplectic 多様体であるか？またその場合周期がどうなるか？というのは自然な問いである．向井はこの問題について解答を与えた．

$$v^\perp := \{x \in H^*(X,\mathbb{Z}) | \langle v, x\rangle = 0\}$$

とおく．向井は Hodge 構造を保つ準同型写像

$$\theta_v : v^\perp \longrightarrow H^2(M_L(v),\mathbb{Z})_f$$

を次で定義した:

$$\theta_v(x) := \frac{1}{\rho}\left[p_{M_L(v)*}(\mathrm{ch}(\mathcal{E})\sqrt{\mathrm{Td}(X)}x^\vee)\right]_1,$$

ここで $H^2(M_L(v),\mathbb{Z})_f$ は $H^2(M_L(v),\mathbb{Z})$ の自由商加群，また $\mathcal{E}$ は準普遍族と呼ばれる $M_L(v)$ 上平坦な $M_L(v)\times X$ 上の連接層で $\mathcal{E}_{|\{E\}\times X} \cong E^{\oplus\rho}$ を満たす．普遍族の存在は一般にはいえないが，ρ を適当にとれば準普遍族は必ず存在することが向井により証明されている．E を X 上のベクトル束とすると，Grothendieck-Riemann-Roch の定理により，$\theta_v(v(E))$ は行列式直線束 $(\det(p_{M_L(v)!}(E^\vee \otimes \mathcal{E})))^{\otimes 1/\rho}$ の第 1 Chern 類になる．

このとき問題は次のように定式化される．

問題 1. v を $\langle v^2\rangle \geq 2$ をみたす原始的向井ベクトルとする．このとき

(1) いつ $M_L(v)$ は空でないか？
(2) $M_L(v)$ は既約か？
(3) $M_L(v)$ が既約のとき，既約 symplectic 多様体か？ またその場合 θ_v は isometry か？

注意 2 (向井). (1) $\langle v^2\rangle = 0$ の場合は周期が $v^{\perp}/v$ で与えられる K3 曲面になることが知られている．
(2) $\langle v^2\rangle = -2$ の場合, $M_L(v)$ は一点からなる．

階数が 1 と 2 の場合に向井はこの問題を肯定的に解決した．向井の方法（詳しくは知らないが）は一般階数の場合にも通用するものであったが，本人いわく

「やればできるが、面倒くさいしやらなかった」

とのことである（修士の学生へのよい演習問題のつもりでいたのかもしれない）．以下この問題を向井の演習問題と呼ぼう．なお演習問題ではあるが誰かがやらなきゃいけない基本的な問題だと私は思っている．そこでできれば完全に解いてしまいたいのであるが，情けないことに(修士の) 演習問題にもかかわらず 部分的にしか解けていません．

注意 3. 私がこの演習問題を完全に解けていないのは，向井の考えを理解していないからかもしれない．この問題に興味を持たれた方はご本人に直接質問するのがよいと思います．またすべての場合をカバーする賢い方法をご存知の方は教えてください．

定義 2. X, X' を K3 曲面, $v \in H^*(X,\mathbb{Z})$, $v' \in H^*(X',\mathbb{Z})$ を $\langle v^2\rangle = \langle v'^2\rangle$ なる原始的な向井ベクトルとしたとき，

$$\begin{aligned} & M_L(v) \sim M_{L'}(v') \\ \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}\ & M_{L'}(v') \text{ は } M_L(v) \text{ から変形と双有理変換の合成で得られる}, \end{aligned}$$

ここで L, L' は一般の偏極.

定理 2. 原始的向井ベクトル $v \in H^*(X,\mathbb{Z})$ を $v = l(r+\xi)+a\omega$, $\xi \in H^2(X,\mathbb{Z})$, $r+\xi$ は原始的, $(l,a)=1$ とあらわす．このとき $r>0$, $\langle v^2\rangle/2l \geq l$ であれば $M_L(v)$ は μ-安定層を含み，$M_L(v) \sim \mathrm{Hilb}_X^{\langle v^2\rangle/2+1}$，ここで L は一般の偏極. 特に $M_L(v)$ は既約 *symplectic* 多様体. さらに $\langle v^2\rangle/2l \neq l$ または $l=1$ であれば

$$\theta_v : v^{\perp} \longrightarrow H^2(M_L(v),\mathbb{Z})$$

は *Hodge isometry.*

この定理の重要な根拠は$O(\Gamma_{4,20})$ が長さが同じ原始的ベクトルに推移的に作用することである．

注意 4. $r=0$ の場合: $l=1$ の場合も定理は成立する．$l>1$ の場合は $a\equiv 1 \mod l$ なら我々の方法で証明できると思うが，$a\not\equiv 1 \mod l$ の時はわからない．向井ベクトルの長さに条件が付くのは仕方ない気もするが，$a\not\equiv 1 \mod l$ の時が証明できないのは困る気がする．そこで次の問題をあげておこう．

「$r=0$, $a\not\equiv 1 \mod l$ の場合にも適当な条件のもと定理が成立することを示せ.」

注意 5. $l=1$ の場合は O'Grady [O1] が証明を書いているが，彼の方法は楕円 K3 曲面を利用するもので $l=1$ の場合にしか通用しないと思われる．また彼の解答は向井の方法に比べて複雑である.（演習問題なんだからもっと簡単に解けなきゃいけない！）

注意 6 (中島徹). w を $\langle w^2\rangle=-2$ をみたす向井ベクトルとする．$M_L(v)$, $v=lw-a\omega$ が μ-安定層を含む条件を求める．E_1 を $M_L(w)$ の元とする．今 E が μ-安定で $v(E)=v$ とする．Riemann-Roch の定理により，$\chi(E_1,E)=-\langle w,v\rangle=2l-a[w]_0$. 一方 E が μ-安定であるから，$\mathrm{Hom}(E_1,E)=\mathrm{Hom}(E,E_1)=0$. Serre 双対性とあわせ，$2l-a[w]_0=-\dim\mathrm{Ext}^1(E_1,E)\le 0$. よって $\langle v^2\rangle/2l=a[w]_0-l\ge l$. つまりある場合には（たとえば $c_1=0$ の場合など), 定理の条件が μ-安定層の存在のための必要条件になっている．

注意 7. 実は既約 symplectic 多様体にならない例として次のものがある．$v_l=lv(\mathcal{O}_X)-(l+1)\omega$, $l>1$ の場合次の自明でない拡大で定義される層は安定である．

$$0\longrightarrow F\longrightarrow E\longrightarrow I_P\longrightarrow 0,$$

ここで $F\in M_L(v_{l-1})$, $P\in X$. Riemann-Roch の定理と l に関する帰納法によりこのような拡大が存在することはすぐ分かり、また $M_L(v_l)$ が $\mathrm{Hilb}^2_X\times X^{l-1}$ と双有理同値な連結成分をもつ事が分かる．とくに既約 symplectic 多様体ではない．

この現象をどう理解するのが良いのかわからない．一つの考えは μ-安定層のモジュライ空間のコンパクト化として構成される空間が重要とみなす立場であろう．(安定ベクトル束ではなく安定層としたのは Hilb^n_X を考察の対象としたかったからである.)

4. 証明の方針． 我々の方法は $l=1$ の場合が最もうまくいくので，ここではこの場合を詳しく説明したいと思う．まず階数が 1 の場合は，対称積 S^nX の特異点解消である事から，既約 symplectic 多様体である事と θ_v が isometry である事がしたがう．そこで一般の階数の場合を階数 1 の場合に帰着させるのが我々の目標となる．さて簡単な計算で T_N, $N\in\mathrm{Pic}(X)$ は

$$\theta_{T_N(v)}(T_N(x))=\theta_v(x) \tag{5}$$

を満たすことがわかる．K3 曲面の変形と T_N, $N\in\mathrm{Pic}(X)$ を利用して次の命題が示される．

命題 3. X_1, X_2 を *K3* 曲面, $v_i=l(r+\xi_i)+a_i\omega\in H^*(X_i,\mathbb{Z})$, $i=1,2$ を原始的向井ベクトルで次をみたすものとする．

(1) $r+\xi_i$, $i=1,2$ は原始的,
(2) $\langle v_1^2\rangle=\langle v_2^2\rangle$,

(3) $a_1 \equiv a_2 \mod l$.
このとき $M_{L_1}(v_1)$ と $M_{L_2}(v_2)$ は変形同値, また

$$\theta_{v_1} \text{ が } isometry \Longleftrightarrow \theta_{v_2} \text{ が } isometry,$$

ここで L_1, L_2 は一般の偏極.

略証. $T_{nL_i}(v_i) = v_i \operatorname{ch}(nL_i)$, $n \gg 0$ を考えることにより, ξ_i は ample としてよい. もし $\rho(X_1) = 1$ のときは偏極 K3 曲面の 1 次元族 $(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \to T$ で $\mathcal{X}_{t_0} = X_1$, $\rho(\mathcal{X}_{t_1}) \geq 2$, $t_0, t_1 \in T$ を満たすものを考える. このときモジュライ空間の族 $\cup_{t \neq t_1} M_{\mathcal{L}_t}(v_1) \cup M_{L'_1}(v_1) \to T$ が存在する, ここで L'_1 は $\mathcal{X}_{t_1}$ 上の一般の偏極. X_1 を $\mathcal{X}_{t_1}$ に取り替えて $\rho(X_1), \rho(X_2) \geq 2$ としてよい. 適当な直線束をかけることによって,

$$(\xi_i^2) \geq 4,\ \xi_i \text{ は ample},\ \xi_i \text{ は原始的}$$

とできる. 偏極 K3 曲面とモジュライ空間の組の族を考えることによって

$$X_1 = X_2 = X,\ \xi_i = \sigma + n_i f,\ \text{ここで } X \text{ は楕円 K3 曲面}, \sigma \text{ は断面}, f \text{ はファイバー}$$

とできる. $n := (a_1 - a_2)/l$ とおく. このとき $T_{nf}(v_2) = v_1$. 後半は (5) とモジュライ空間の族にたいし, θ_{v_i} の族が構成できることから明らか. □

この命題により $l = 1$ のときは階数が等しい安定層のモジュライ空間はすべて同値である事が分かる. 実は向井の鏡映変換を利用すると階数も動かせる.

例 1 (Göttsche-Huybrechts). (X, H) を偏極 K3 曲面で $\operatorname{Pic}(X) = \mathbb{Z}H$ を満たすものとする. $v_1 = v(\mathcal{O}_X) = 1 + \omega$, $v = 2 + H - \omega$ とおく. $E \in M_H(v)$ にたいし $\chi(\mathcal{O}_X, E) = -\langle v_1, v \rangle = 1$. E の次数は正であるから, $\operatorname{Ext}^2(\mathcal{O}_X, E) = \operatorname{Hom}(E, \mathcal{O}_X)^\vee = 0$. よって以下のような完全列が存在する:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow E \longrightarrow I_Z(H) \longrightarrow 0, \tag{6}$$

ここで I_Z はイデアル層. E を一般の安定層とすると, $\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_X, E) = \mathbb{C}$ がわかる. $v(I_Z(H)) = v - v_1 = R_{v_1}(v)$ であるから R_{v_1} はモジュライ空間のあいだの有理写像 $M_H(v) \cdots \to M_H(R_{v_1}(v)) = \operatorname{Hilb}_X^{(H^2)/2+3}$ を引き起こす. 実はこの有理写像は余次元 2 を除いて自然に同型となり θ_v が isometry であることが示される. 更にこの事の系として Donaldson 不変量が計算でき, 特に不変量が交叉形式だけで表せることがわかる.

次の補題は例 1 を一般化するのに必要である.

補題 4. X を $\operatorname{NS}(X) \cong \mathbb{Z}H$ なる非特異射影曲面とする. $c_1(F) = dH$ である連接層 F にたいし, $\deg(F) = d$ とおく. r と d を互いに素な正整数とし r_1 と d_1 を $r_1 d - r d_1 = 1$ をみたす整数とする.

(1) E_1 を階数が r_1 で $\deg(E_1) = d_1$ をみたす安定ベクトル束 E_2 を階数が r_2 で $\deg(E_2) = d_2$ をみたす安定層とする．このとき自明でない拡大

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0$$

は安定層を定める．

(2) E_1 を階数が r_1 で $\deg(E_1) = d_1$ なる安定ベクトル束 E を階数が r で $\deg(E) = d$ なる安定層とする．V を $\mathrm{Hom}(E_1, E)$ の部分ベクトル空間とする．このとき $\phi : V \otimes E_1 \to E$ にたいし，次のいずれかが成立する．

(a) ϕ は単射で $\mathrm{coker}\,\phi$ は安定，

(b) ϕ は余次元 2 を除き全射で $\ker\phi$ は安定．

系 5. 補題 4 (1) の仮定のもと，普遍的拡大

$$0 \longrightarrow E_1 \otimes \mathrm{Ext}^1(E_2, E_1)^\vee \longrightarrow E \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0$$

は安定層をさだめる．

5. 鏡映変換による対応. r と d を互いに素な正整数とし r_1 と d_1 を $r_1 d - r d_1 = 1$ なる整数とする．X を $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}H$ をみたす K3 曲面とする．次を満たす向井ベクトル $v_1, v \in H^*(X, \mathbb{Z})$ を考える．

$$\begin{cases} v_1 = r_1 + d_1 H + a_1\omega, \\ v = r + dH + a\omega, \\ \langle v_1^2 \rangle = -2, \end{cases} \tag{7}$$

ここで $a_1, a \in \mathbb{Z}$. このとき $v(E_1) = v_1$ を満たす安定ベクトル束が存在する．E_1 は

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}(E_1, E_1) = \mathbb{C}, \\ \mathrm{Ext}^1(E_1, E_1) = 0, \\ \mathrm{Ext}^2(E_1, E_1) = \mathbb{C}, \end{cases} \tag{8}$$

を満たす．このようなベクトル束は例外ベクトル束と呼ばれている．

条件(7) は強い条件であるが，十分に多くの条件をみたす組がある．

$$\begin{cases} (H^2) := 2(sr_1^2 + rr_1 t - r^2),\ s \in \mathbb{Z}, \\ a_1 := d_1^2 rt + d_1^2 sr_1 - r_1 d^2 + 2d, \\ a := (2dd_1 r_1 - rd_1^2)s + d^2(r_1 t - r), \end{cases} \tag{9}$$

とおくと，

$$\begin{cases} \langle v_1^2 \rangle = -2, \\ \langle v^2 \rangle = 2s, \\ \langle v, v_1 \rangle = -t. \end{cases} \tag{10}$$

注意 8. r_1, r, s, t は $(H^2) = 2(sr_1^2 + rr_1t - r^2) > 0$ を満たすようにとらねばならない.

定義 3. $i \geq 1$ にたいし,

$$\begin{aligned} M_L(v)_i :=& \{E \in M_L(v) | \dim \mathrm{Hom}(E_1, E) = -\langle v_1, v\rangle - 1 + i\} \\ =& \{E \in M_L(v) | \dim \mathrm{Ext}^1(E_1, E) = i - 1\} \end{aligned}$$

とおく. これは $M_L(v)$ の局所閉集合である.

$M_L(v)_1$が稠密であることをいいたい. そのための準備をする.

定義 4. $w := v - mv_1$, $[w]_0 \geq 0$ にたいし,

$$N(mv_1, v, w) := \{E_1^{\oplus m} \subset E | E \in M_L(v)\}$$

とおく. $\pi_v : N(mv_1, v, w) \to M_L(v)$ を $E_1^{\oplus m} \subset E$ に Eを対応させる射, $N(mv_1, v, w)_i = \pi_v^{-1}(M_L(v)_i)$ とおく.

$N(mv_1, v, w)$ は $M_L(v)$ 上の射影的概型として構成できる. 補題 4 により, $F := E/E_1^{\oplus m}$ は安定である. よって射$\pi_w : N(mv_1, v, w) \to M_L(w)$ を得る. π_w のファイバーをみる. $F \in M_L(w)_{i+m}$ にたいし, $\dim \mathrm{Ext}^1(F, E_1) = i - 1 + m$. $U^\vee$ を $\mathrm{Ext}^1(F, E_1)$ の m-次元部分空間とする. 包含写像 $U^\vee \subset \mathrm{Ext}^1(F, E_1)$ に対応する $U \otimes \mathrm{Ext}^1(F, E_1)$ の元 e は拡大

$$0 \longrightarrow U \otimes E_1 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

を定義する. 拡大類の取り方と系 5 により, E は安定層である. よって F でのファイバーは Grassman 多様体 $Gr(i - 1 + m, m)$ である.

補題 6. $i \geq 1 + \langle v, v_1\rangle$ にたいし,

$$\mathrm{codim}\, M_L(v)_i = (i - 1)(i - 1 - \langle v, v_1\rangle).$$

特に $\langle v, v_1\rangle \leq 0$ なら, $M_L(v)_1$ は稠密な $M_L(v)$ の開集合になる.

証明. $M_L(v)_i$ の元 E にたいし, $\dim \mathrm{Ext}^1(E_1, E) = -\chi(E_1, E) + \dim \mathrm{Hom}(E_1, E) = i - 1$. 普遍的拡大

$$0 \longrightarrow E_1^{\oplus(i-1)} \longrightarrow G \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

を考える. 系 5により, G は $\mathrm{rk}(G) = (i - 1)r_1 + r$, $\deg(G) = (i - 1)d_1 + d$ なる安定層. よって $\mathrm{Ext}^2(E_1, G) = 0$. 簡単な計算で

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Hom}(E_1, G) &= i - 1 + \dim \mathrm{Hom}(E_1, E) \\ &= 2i - 2 - \langle v_1, v\rangle, \\ \dim \mathrm{Ext}^1(E_1, G) &= 0 \end{aligned}$$

がわかるので G は $M_L(v(G))_1$ に属する．$k := 2i-2-\langle v_1, v\rangle$ と置く．すると $V := \mathrm{Hom}(E_1, G)$ の $i-1$ 次元部分空間は Grassman 多様体 $Gr(k, i-1)$ でパラメーター付けられる．$v(G) = v + (i-1)v_1$ であるから，

$$\begin{aligned}\dim M_L(v(G)) &= \langle v(G)^2\rangle + 2 \\ &= -2(i-1)^2 + 2(i-1)\langle v_1, v\rangle + \langle v^2\rangle + 2.\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\dim M_L(v)_i &= \dim M_L(v(G)) + \dim Gr(k, i-1) \\ &= -(i-1)(i-1-\langle v_1, v\rangle) + \dim M_L(v).\end{aligned}$$

□

注意 9. $u_i := v+(i-1)v_1$ とおくと，$M_L(v)_i$ は $M_L(u_i)_1$ 上の étale 局所自明 $Gr(k, i-1)$-束になる．また $\pi_v : N(mv_1, v, w)_i \to M_L(v)_i$ は étale 局所自明 $Gr(l, m)$-束で，$\pi_w : N(mv_1, v, w)_i \to M_L(w)_{i+m}$ は étale 局所自明 $Gr(i-1+m, m)$-束になる，ここで $l := i-1-\langle v_1, v\rangle$.

$N(mv_1, v, w)_i$ の元 $E_1^{\oplus m} \subset E$ にたいし，$F := E/E_1^{\oplus m}$ とおく．E, F の E_1 による普遍的拡大を考えると次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
 & & F \arrow[u] \arrow[r, equal] & F \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & V_1 \otimes E_1 \arrow[r] & G \arrow[u] \arrow[r] & E \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & V_1 \otimes E_1 \arrow[r] \arrow[u, equal] & V_2 \otimes E_1 \arrow[r] \arrow[u] & V_2/V_1 \otimes E_1 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{11}$$

ここで $G \in M_L(u_i)_1, u_i = v + (i-1)v_1$, $\dim V_j = i-1+(j-1)m$. とくに $\dim V_2/V_1 = m$. $V := \mathrm{Hom}(E_1, G)$ とおく．完全系列

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V \longrightarrow \mathrm{Hom}(E_1, E) \longrightarrow 0$$

により，E の部分層 $E_1^{\oplus m}$ を与えることは V_1 を含む V の $m+i-1$ 次元ベクトル空間を与えることに対応する．よって $N(mv_1, v, w)_i$ は以下のような構造を持つ．

$$\begin{array}{ccc} N(mv_1,v,w)_i & \xrightarrow{\pi_w} & M_L(w)_{i+m} \\ {\scriptstyle \pi_v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varpi_1} \\ M_L(v)_i & \xrightarrow[\varpi_2]{} & M_L(u_i)_1, \end{array} \tag{12}$$

$$N(mv_1,v,w)_i = \left\{ 0 \subset V_1 \subset V_2 \subset V \,\middle|\, \begin{array}{l} V = \mathrm{Hom}(E_1, G), G \in M_L(u_i)_1 \\ \dim V_j = i-1+(j-1)m \end{array} \right\}$$
$$\subset M_L(v)_i \times_{M_L(u_i)_1} M_L(w)_{i+m}.$$

ここで $\pi_v, \pi_w, \varpi_1, \varpi_2$ は étale 局所自明な射である．

注意 10. 前に $\pi_w^{-1}(F) = Gr(\mathrm{Ext}^1(F,E_1),m)$ であることを示した．この事と上の図式との間の関係をみよう．$\mathrm{Ext}^1(F,E_1)$ を $V_2^\vee$ と同一視し，さらに (11) 第2列の完全系列を普遍的拡大に対応するものに取り替えると第3列の拡大は包含写像 $(V_2/V_1)^\vee \subset V_2^\vee$ に対応する事がわかる．この対応により $\pi_w^{-1}(F) = Gr(V_2, i-1)$ となる．

さて $\langle v_1, v\rangle = -t < 0$, $[v]_0 - t[v_1]_0 \geq 0$ の仮定のもと，$N(tv_1, v, R_{v_1}(v))$ による代数的対応を考えよう．注意 9 により，$M_L(v)_1 = N(tv_1, v, R_{v_1}(v)) = M_L(R_{v_1}(v))_{t+1}$. ところで $\langle R_{v_1}(v), v_1\rangle = t$ であるから，$M_L(R_{v_1}(v))_{t+1}$ は $M_L(R_{v_1}(v))$ の稠密な開集合である．よって $M_L(v)$ と $M_L(R_{v_1}(v))$ の間の双有理対応が得られた．さらにこの対応はファイバー構造 $M_L(v)_i \to M_L(u_i)_1$ をその双対ファイバー構造 $M_L(w)_{i+t} \to M_L(u_i)_1$ に取り替える，ここで $w = R_{v_1}(v) = v - tv_1$, $u_i = v + (i-1)v_1$．とくに

$$M_L(v) \setminus \cup_{i>2} M_L(v)_i \cdots \to M_L(w) \setminus \cup_{i>2} M_L(w)_{i+t}$$

は既約 symplectic 多様体の基本変換 [Mu3] になる．

命題 7. 次の図式は可換

$$\begin{array}{ccc} v^\perp & \xrightarrow{R_{v_1}} & w^\perp \\ {\scriptstyle \theta_v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_w} \\ H^2(M(v),\mathbb{Z})_f & \xrightarrow[\pi_{w*}\pi_v^*]{} & H^2(M(w),\mathbb{Z})_f. \end{array}$$

証明. 簡単のため $M_L(v) \times X$ 上普遍族 $\mathcal{E}_v$ が存在するとする．$\mathcal{V} := \mathrm{Hom}_{p_{M_L(v)_1}}(E_1 \boxtimes \mathcal{O}_{M_L(v)_1}, \mathcal{E}_v)$ とおくと $M_L(v)_1 \times X$上次の完全系列が存在する:

$$0 \to E_1 \boxtimes \mathcal{V} \to \mathcal{E}_v \to \mathcal{F}_w \to 0$$

ここで $\mathcal{F}_w$ は向井ベクトルが w の安定層の族．$M_L(v)_1$ の定義と固有射についての底変換定理により

$$\begin{cases} p_{M_L(v)_1*}(\mathcal{F}_w \otimes E_1^{-1}) = 0, \\ R^1 p_{M_L(v)_1*}(\mathcal{F}_w \otimes E_1^{-1}) = \mathcal{V}, \\ R^2 p_{M_L(v)_1*}(\mathcal{F}_w \otimes E_1^{-1}) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

よって $c_1(p_{M_L(v)_1!}(\mathcal{F}_w \otimes E_1^{-1})) = -c_1(\mathcal{V})$. ゆえに

$$\begin{aligned} \theta_v(x) &= \left[p_{M_L(v)_1*}(\mathrm{ch}(\mathcal{E}_v)\sqrt{\mathrm{Td}(X)}x^\vee)\right]_1 \\ &= \left[p_{M_L(v)_1*}(\mathrm{ch}(\mathcal{F}_w)\sqrt{\mathrm{Td}(X)}x^\vee)\right]_1 + \left[p_{M_L(v)_1*}(\mathrm{ch}(E_1 \boxtimes \mathcal{V})\sqrt{\mathrm{Td}(X)}x^\vee)\right]_1 \\ &= \theta_w(x) - \langle v_1, x\rangle c_1(\mathcal{V}) \\ &= \theta_w(x) + \langle v_1, x\rangle \theta_w(v_1) \\ &= \theta_w(R_{v_1}(x)). \end{aligned}$$

□

あとは鏡映変換を $\langle v, v_1\rangle = -1$ かつ $[v_1]_0 = [v]_0 - 1, [v]_0 - 2$ として適用すれば定理を証明できる．

6. $[R_{v_1}(v)]_0 < 0$ の場合． 次に $-\langle v_1, v\rangle = t > 0$, $[v]_0 - t[v_1] < 0$ の場合を考えよう．$[v]_0 \geq 3$ を仮定する．

$$Z(v) := \{E | E \in M_L(v), E\text{はベクトル束でない}\}$$

とおくと $Z(v)$ の 余次元は $[v]_0 - 1 \geq 2$ [Y1, Thm. 0.4] である．$E \in M_L(v)_1 \setminus Z(v)$ にたいし，$F := \mathrm{coker}(E^\vee \to E_1^\vee \otimes \mathrm{Hom}(E_1, E)^\vee)$ を対応させる写像は双有理写像 $M_L(v) \cdots \to M_L(-(R_{v_1}(v))^\vee)$ を誘導する．さらに次の図式は可換になる．

$$\begin{array}{ccc} v^\perp & \xrightarrow{-D\circ R_{v_1}} & w^\perp \\ {\scriptstyle -\theta_v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_w} \\ H^2(M(v), \mathbb{Z})_f & = & H^2(M(w), \mathbb{Z})_f, \end{array}$$

ここで $w = -(R_{v_1}(v))^\vee$.

注意 11. いま $[v]_0 \geq 3$ を仮定したが，$t[v_1]_0 - [v] \geq 3$ を仮定すれば E に $G := \ker(E_1 \otimes \mathrm{Hom}(E_1, E) \to E)$ を対応させる写像は双有理写像 $M_L(v) \cdots \to M_L(-(R_{v_1}(v)))$ を誘導し，同様な可換図式が得られる．

命題 8. $r_1 t - r > 0, r > s + 1, t > s$ なら $M_L(v) \cong M_L(-(R_{v_1}(v))^\vee)$

我々は「$\langle v^2\rangle = -2$ なら $M_L(v) \neq \emptyset$」を既知の事として利用したが，この命題を $v_1 = v(\mathcal{O}_X)$ として利用すればこの事実の一つの証明が得られる．また Huybrechts [H2, Cor. 4.8] の初等的な別証が得られる．

系 9. (X, L) を偏極 $K3$ 曲面とし，$v = r + \xi + a\omega \in H^*(X, \mathbb{Z})$ を $r + \xi$ が原始的な向井ベクトルとする．$\langle v^2\rangle \geq -2$ とすると一般の L について $M_L(v) \neq \emptyset$，また $M_L(v)$ は$\mathrm{Hilb}_X^{\langle v^2\rangle/2+1}$ に変形同値.

多くの場合，階数に関する帰納法を使ってモジュライ空間の性質を調べるが，この系の証明では $M_L(v)$ を階数が十分高い安定層のモジュライ空間と結び付けるという方法をとる．このことから，階数２の場合を調べるのですら一般階数で考察することが重要であるといえる．

最後に K_X が自明にみえると，“鏡映変換”が定義できることの例を述べる．X を非特異射影曲面とし，$(K(X)_{\mathrm{top}}, -\chi(\ ,\ ))$ を考えよう．ここで $K(X)_{\mathrm{top}}$ は位相的 Grothendieck 群，$\chi(\ ,\ )$ は Riemann-Roch の定理を形式的に適用して定義する．この場合最大の欠点は K_X が数値的に自明でないと$-\chi(\ ,\ )$ は対称にならない事である．X が (-2)-曲線 C を含むとする．このとき $(K_X, C) = 0$ であるから $-\chi(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C) = -2$. また任意の連接層 E にたいし，$\chi(\mathcal{O}_C, E) = \chi(E, \mathcal{O}_C(K_X)) = \chi(E, \mathcal{O}_C)$. よって $E \mapsto E - \chi(\mathcal{O}_C, E)\mathcal{O}_C$ は $K(X)_{\mathrm{top}}$ の長さを変えない同型になる．よってモジュライ空間の間の双有理変換を導く可能性がある．これはその場合幾何学的に解釈でき、(-2)-曲線上の層に沿った層の基本変換になる．

参考文献

[B] Beauville, A., *Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 755–782

[G-H] Göttsche, L., Huybrechts, D., *Hodge numbers of moduli spaces of stable bundles on K3 surfaces*, Internat. J. Math. **7** (1996), 359–372

[H1] Huybrechts, D., *Birational symplectic manifolds and their deformations*, J. Diff. Geom. **45** to appear

[H2] Huybrechts, D., *Compact Hyperkähler Manifolds: Basic Results*, alg-geom/9705025

[Ma1] Maruyama, M., *Moduli of stable sheaves II*, J. Math. Kyoto Univ. **18** (1978), 557–614

[Ma2] Maruyama, M., *Moduli of algebraic vector bundles*, in preparation

[Mu1] Mukai, S., *Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or K3 surface*, Invent. math. **77** (1984), 101–116

[Mu2] Mukai, S., *On the moduli space of bundles on K3 surfaces I*, Vector bundles on Algebraic Varieties, Oxford, 1987, 341–413

[Mu3] Mukai, S., *Moduli of vector bundles on K3 surfaces, and symplectic manifolds*, Sugaku Expositions, **1** (1988), 139–174

[O1] O'Grady, K., *The weight-two Hodge structure of moduli spaces of sheaves on a K3 surface*, preprint (1995)

[O2] O'Grady, K., *Desingularized moduli spaces of sheaves on a K3*, alg-geom/9708009

[S] Simpson, C., *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety I*, Publ. Math. I.H.E.S. **79** (1994), 47-129

[Y1] Yoshioka, K., *The Betti numbers of the moduli space of stable sheaves of rank 2 on P^2*, J. reine angew. Math. **453** (1994), 193–220

[Y2] Yoshioka, K., *An application of exceptional bundles to the moduli of stable sheaves on a K3 surface,* alg-geom/9705027

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE, KOBE UNIVERSITY, KOBE, 657, JAPAN

E-mail address: yoshioka@math.s.kobe-u.ac.jp