

Calabi-Yau Threefolds in characteristic  $p$ 

東京大学大学院数理科学研究科  
廣門正行

## §1. INTRODUCTION

複素多様体としての Calabi-Yau 多様体の理論は最近ミラーシンメトリーとも関連して目覚ましい発展を遂げています. そこでそれを手本として, 70 年及び 80 年代から勢力的に研究が進められて来た正標数  $K3$  曲面の理論を使い, 正標数 Calabi-Yau 多様体の理論が構成出来ないだろうかという動きが最近起こり始めています. ここでは それに関連した幾つかの話題のうちの一部について解説を試みます.

**定義 1.1.**  $X$  を 正標数代数閉体上定義された三次元非特異射影代数多様体とする. もし  $K_X \cong \mathcal{O}_X$  かつ  $h^1(\mathcal{O}_X) = h^2(\mathcal{O}_X) = 0$  が満たされる時  $X$  を Calabi-Yau threefold と呼ぶ.

正標数 C.Y. の重要な特徴の一つに, 次で与えられる高さと呼ばれる不変量が定まることが挙げられます.

**定義 1.2** (Artin-Mazur [1]).  $X$  を C.Y. threefold としたとき,  $X$  に付随した高さ  $ht(X)$  を以下で定める.

$$ht(X) := (X \text{ に付随した Artin-Mazur 形式群 } \Phi^3(X/k, \mathbb{G}_m) \text{ の高さ})$$

また,  $W\mathcal{O}_X$  を Serre が定義した Witt ベクトル環の層としたとき, 上の定義は以下と同値であることが知られている

$$ht(X) = \begin{cases} \dim_K H^3(X, W\mathcal{O}_X) \otimes K & \text{if } H^3(X, W\mathcal{O}_X) \otimes K \neq 0 \\ \infty & \text{if } H^3(X, W\mathcal{O}_X) \otimes K = 0 \end{cases}$$

但し,  $K$  は Witt ベクトル環  $W(k)$  の商体とする. 特に  $ht(X) = \infty$  のとき  $X$  を超特異 C.Y. と呼ぶ.

M. Artin は  $K3$  曲面に付随した形式群 (形式 Brauer 群) を上と同様に定義し, その高さを用いて変形の stratification を与えたのだが, この不変量はまた 正標数の病理的現象と深く関わっていることが知られている. ところで 正標数での多様体を考えた時, 最も困難な点の一つに標数零の時のような完全な形の Hodge 理論が存在しないことが挙げられるが, それに関連して以下の問題が考えられる:

## 問題 1.3.

i)  $X$  を C.Y. threefold としたとき, 以下の等式は成立するか?

$$H^0(\Omega_X^1) = H^0(T_X) = 0.$$

ii) C.Y. threefold  $X$  にはどのような正標数特有のファイブレーションが存在するか?

(i) の等式が成立することは  $X$  について Hodge duality  $h^q(\Omega_X^p) = h^p(\Omega_X^q)$  が成立することと同値であることが容易に確かめられる. 勿論, この先の段階としては Hodge spectral sequence の退化,  $H_{\text{crys}}^i(X)$  のトーション部分の有無などが問題として考えられる.

特に  $X$  が  $K3$  曲面の場合には上の問題は次のように解決されている: 等式

$$h^0(T_X) (= h^0(\Omega_X^1)) = 0$$

は最初に Rudakov-Shafarevich [12] が超特異  $K3$  曲面の楕円ファイブレーションの構造を調べることで示し, 更に Nygaard [10] は de Rham-Witt complex から定まるコホモロジー (Hodge-Witt コホモロジー) を用いることで別証を与えた. 特に  $K3$  曲面の場合, 上記の結果より Hodge spectral sequence

$$E_1^{i,j} = H^j(X, \Omega_X^i) \implies H_{\text{DR}}^{i+j}(X)$$

が  $E_1$ -項で退化し, また de Rham betti 数  $b_l^{\text{DR}}(X) := \dim_k H_{\text{DR}}^l(X)$  は  $l$ -adic betti 数  $b_l(X) := \dim_{\mathbb{Q}_l} H_{\text{ét}}^l(X, \mathbb{Q}_l)$  ( $l \neq p$ ) と一致することが従う.

また (ii) に関連して,  $K3$  曲面  $X$  が準楕円ファイブレーションを持つための必要十分条件は  $X$  が超特異 (塩田氏の定義で), かつ  $p = 2$  又は  $p = 3$  で Artin 不変量  $\sigma_0 \leq 6$  であることが知られている (cf. [13]).

そこで問題の正標数 C.Y. threefold についてであるが, 現在以下のことが分かっている.

定理 1.4 (宮岡 [9]).  $X$  を C.Y. threefold とする. もし  $H^0(T_X)$  が零でないなら以下の二つの場合を除いて  $X$  は uniruled である, i)  $\Omega_X \cong \mathcal{O}_X^{\oplus 3}$ , 又は ii)  $H^0(T_X) = k$  でこのグローバルセクションによるインクルージョンのコカーネル  $T_X/\mathcal{O}_X$  が局所フリー.

上定理 (i), (ii) の様な現象が起こることは実際考え難いのであるが, 今の所この様な C.Y. threefold の存在, 不存在は知られていない.

定理 1.5.  $X$  を C.Y. threefold とした時, もし  $X$  が uniruled ならば  $X$  は超特異である.

また諏訪紀幸氏は Hodge-Witt コホモロジーについて Ekedahl duality を適用することで以下の定理が成り立つことを指摘した (cf. [16]).

定理 1.6.  $X$  を C.Y. threefold としたとき, もし  $\text{Pic } X$  が  $p$ -トーシオンフリーであれば  $H^0(\Omega_X^1) = 0$  が成立する.

上の諸定理は 問題 1.3 および 超特異 C.Y. の関係について示唆的である. そこで以下ではどのような正標数の病的現象が実際に起こるかを例を構成して調べる.

## §2. 構成

このセクションでは超特異 C.Y. threefold を実際に構成し, 正標数での病的現象について調べる. 扱う構成法は以下の二つである

- (I) 有理準楕円曲面と有理楕円曲面のファイバー積として,
- (II)  $\mathbb{P}^3$  上の  $p$ -閉有理ベクトル場の商として.

(I). C. Schoen は有理楕円曲面二つのファイバー積を  $\mathbb{P}^1$  上にとることによって C.Y. threefold が構成されることを示した. ここでは彼の方法を真似て, 一方を有理準楕円曲面とした時どの様になるかを考察する.

$$\begin{array}{ccc} W := Y_1 \times_{\mathbb{P}^1} Y_2 & \xrightarrow{\text{pr}_2} & Y_2 \\ \downarrow \text{pr}_1 & \square & \downarrow \phi_2 \\ Y_1 & \xrightarrow{\phi_1} & \mathbb{P}^1, \end{array}$$

ここで  $\phi_1 : Y_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ ,  $\phi_2 : Y_2 \rightarrow \mathbb{P}^1$  はそれぞれ有理楕円曲面 及び 有理準楕円曲面でセクションを持つとする. 更に, 全てのファイバーのコンポーネントは被約と仮定した時, 以下が成り立つ (cf. [15]):

- i)  $W$  は高々孤立超曲面特異点をもつ,
- ii)  $W$  の dualizing sheaf は trivial.

そこで 特異点解消  $\pi : \tilde{W} \rightarrow W$  を考える訳であるが, 以下の定理が成立することがわかる.

定理 2.1.  $\phi_1, \phi_2$  を以下のような可約ファイバーのみを持つとする:

$$\begin{array}{ll} p = 2, & \phi_1 : \text{four } I_3 \text{'s,} \\ & \phi_2 : \text{eight III's;} \\ p = 3, & \phi_1 : \text{two } I_2 \text{'s and two } I_4 \text{'s,} \\ & \phi_2 : \text{four IV's.} \end{array}$$

更に  $\{t \in \mathbb{P}^1 \mid \phi_1^{-1}(t) : \text{特異ファイバー}\} \subset \{t \in \mathbb{P}^1 \mid \phi_2^{-1}(t) : \text{可約ファイバー}\}$  が満たされる様  $\mathbb{P}^1$  上にファイバー積を取った場合 small resolution  $\pi : \tilde{W} \rightarrow W$  が存在する. 実際にこれ等を満たす  $\phi_1, \phi_2$  は存在し 以下が成立する:

- i)  $\tilde{W}$  は Calabi-Yau threefold である, i.e.,  $K_{\tilde{W}} \cong \mathcal{O}_{\tilde{W}}, h^1(\mathcal{O}_{\tilde{W}}) = h^2(\mathcal{O}_{\tilde{W}}) = 0$ ,
- ii)  $\tilde{W}$  は unirational, 即ち 超特異 C.Y.,

- iii)  $\pi_1^{\text{alg}}(\tilde{W}) = \{1\}$ ,
- iv)  $b_2(\tilde{W}) = 27$  if  $p = 2$ ,  $b_2(\tilde{W}) = 35$  if  $p = 3$  が成立する,
- v)  $h^0(\Omega_{\tilde{W}}) = h^0(T_{\tilde{W}}) = 0$  である, 即ち Hodge duality が成立する.
- vi)  $\mathbb{P}^1$  上ファイブレーションで一般ファイバーが, (a) 楕円曲線とカスプを一つ持つ有理曲線との直積, 及び (b) 有理二重点を持つ  $K3$  曲面であるようなものが存在する.

(II). ここでは正標数特有の  $p$ -閉ベクトル場による商多様体の構成を用いる (cf. [4], [12]). 即ち  $Z$  を非特異多様体とし, その上の有理ベクトル場  $\delta \in T_Z \otimes k(Z)$  で  $p$ -閉なもの (i.e.,  $\delta^p = \alpha\delta$  for some  $\alpha \in k(Z)$ ) を一つ取る. この時, 正規多様体  $V$  が商として得られ,  $Z$  の相対フロベニウス射は  $V$  を経由する.

$$Z \xrightarrow{g} V \rightarrow Z^{(-1)},$$

$g$  は有限, 純不分離射で次数  $p$  である. この様にして得られる  $V$  は勿論  $\delta$  の取り方によって様々に変化するのであるが, ここでは  $Z$  として三次元有理多様体を考え, その商として C.Y. threefold を構成する.

定理 2.2. 以下のような  $\mathbb{P}^3$  上の  $p$ -閉有理ベクトル場を考える:

$$\delta := (x^p - x) \frac{\partial}{\partial x} + (y^p - y) \frac{\partial}{\partial y} + (z^p - z) \frac{\partial}{\partial z}.$$

$\delta$  による商を  $\mathbb{P}^3 \rightarrow V$  とする. ここで標数  $p = 3$  の時,  $V$  は crepant resolution  $\pi: X \rightarrow V$  を持ち, 以下が成り立つ:

- i)  $X$  は Calabi-Yau threefold である,
- ii)  $X$  は unirational, 即ち 超特異 C.Y.,
- iii)  $\pi_1^{\text{alg}}(X) = \{1\}$ ,
- iv)  $b_2(X) = 41$ ,  $b_3(X) = 0$  が成立する,
- v)  $h^0(\Omega_X) = h^0(T_X) = 0$  である, 即ち Hodge duality が成立する,
- vi)  $X$  は準楕円ファイブレーションを持つ.

注意 2.3. 上の (I), (II) のようにして得られた C.Y. threefold は次の形の Hodge diamond を持つ,

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & h^{1,2} & h^{2,2} & 0 \\ 0 & h^{1,1} & h^{2,1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1. \end{array}$$

特に (II) で構成された例  $X$  について,  $b_3 = 0$  であるため  $X$  は標数零に持ち上がらないことがわかる. このことは全ての  $K3$  曲面は標数零に射影的に持ち上がる (P. Deligne [2]) という性質が C.Y. threefold では必ずしも成立しないことを示している.

## §3. 証明

(1) 特異点について.

各構成 (I), (II) において, 先ず 特異点の解消を求めることが大きな問題である. ここでは 以下の手法を用いる.

**Case (I):** ファイバー積  $W$  の特異点  $\text{Sing } W$  は既に述べたように孤立超曲特異点であり, 次の様に与えられる:

$$\text{Sing } W = \{w \in W \mid pr_1(w) \in \text{Sing } \phi_1^{-1}(t) \text{ and} \\ pr_2(w) \in \text{Sing } \phi_2^{-1}(t) \text{ for some } t \in \mathbb{P}^1\},$$

但し,  $pr_1, pr_2$  は  $W = Y_1 \times_{\mathbb{P}^1} Y_2$  の第一, 第二プロジェクションとする. そこでそれぞれの特異ファイバー  $\phi_1^{-1}(t), \phi_2^{-1}(t)$  のタイプの組合せについてどの様な特異点が出てくるかを観察する. また 実際にどの様な有理準楕円曲面, 有理楕円曲面が存在するかはそれぞれ伊藤浩行氏 ([5, 6]), W. Lang ([8]) の結果が使える.

そこで  $(\phi_1^{-1}(t), \phi_2^{-1}(t))$  の組合せとしてそれぞれ

$$\begin{aligned} (\text{type } I_n, \text{type III}) & \quad \text{if } p = 2; \\ (\text{type } I_n, \text{type IV}) & \quad \text{if } p = 3 \end{aligned}$$

を考える. この時, 各ファイバーの特異点は,  $x, y$  及び  $z, w$  をそれぞれ  $Y_1, Y_2$  の局所変数,  $t$  を  $\mathbb{P}^1$  の局所変数,  $\alpha, \beta$  をユニットとした時, 以下のように与えられる:

$$\begin{aligned} t = \alpha xy, \quad t = \beta z(z + w^2) & \quad \text{if } p = 2; \\ t = \alpha xy, \quad t = \beta zw(z + w) & \quad \text{if } p = 3. \end{aligned}$$

よって形式巾級数環内で適当に変数変換を行なうことによって特異点は以下の方程式で与えられる事がわかる.

$$\begin{aligned} xy + z(z + w^2) = 0 & \quad \text{if } p = 2; \\ xy - zw(z + w) = 0 & \quad \text{if } p = 3. \end{aligned}$$

そこで, それぞれの特異点を 因子をセンターとしたブローアップで解消して行くのだが,  $p = 2$  の場合は  $I := (x, z)$  をセンターとした一回のブローアップで;  $p = 3$  の場合は  $I_1 := (x, z), I_2 := (y, w)$  をセンターとした二回のブローアップで解消される.

注意 3.1. i) 上の考察より  $\phi_1 : Y_1 \rightarrow \mathbb{P}^1, \phi_2 : Y_2 \rightarrow \mathbb{P}^1$  として例えば以下のものが選ばれる:

$$\begin{aligned} p = 2 & \quad \phi_1 : y^2 + (t + 1)xy + y = x^3 + t(t^2 + t + 1), \\ & \quad \phi_2 : y^2 = x^3 + (t^3 + at^2 + bt)x + t^3, \quad a \in k, b \in k^*. \\ p = 3 & \quad \phi_1 : y^2 = x^3 + (t^2 + 1)x^2 + t^2x, \\ & \quad \phi_2 : y^2 = x^3 + t^4 + t^2. \end{aligned}$$

それぞれの特異ファイバー(可約ファイバー)は  $p=2$  の時,  $\phi_1$  は  $I_3$  型のものを 4 つ,  $\phi_2$  は III 型のものを 8 つ;  $p=3$  の時,  $\phi_1$  は  $I_2$  型 及び  $I_4$  型のものをそれぞれ 2 つずつ,  $\phi_2$  は IV 型のものを 4 つ持つ. よって定理の条件が満たされるよう  $\mathbb{P}^1$  上にファイバー積を取れば良いことがわかる.

ii)  $\tilde{W}$  が  $g$  unirrational であることは  $\tilde{W} \rightarrow Y_1$  に対し  $Y_1$  のフロベニウス射による底変換を観察することより判る.

**Case (II):**  $p$ -閉有理ベクトル場 (フォリエーション) の理論より, 商多様体の特異点  $\text{Sing } V$  は  $\delta$  の特異点  $\text{Sing } \delta$  の  $g$  による像に対応していることが知られている. 但し, ここで言う  $\text{Sing } \delta$  は  $\delta$  が誘導するタンジェントバンドルの saturated なサブインバーティブシーフがサブバンドルになっていない点の集合 (cf. [12]). よって我々の場合には局所的に  $\text{Sing } \delta$  は  $\{x^p - x = 0, y^p - y = 0, z^p - z = 0\}$  で与えられる. また他のアファインチャート, 例えば  $(1, x, y, z) = (x_1, 1, y_1, z_1)$  で見ると

$$\begin{aligned} \delta &:= (x^p - x) \frac{\partial}{\partial x} + (y^p - y) \frac{\partial}{\partial y} + (z^p - z) \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \frac{-1}{x_1^{p-1}} \left[ (x_1^p - x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + (y_1^p - y_1) \frac{\partial}{\partial y_1} + (z_1^p - z_1) \frac{\partial}{\partial z_1} \right], \end{aligned}$$

となり  $\text{Sing } \delta$  は素体上定義された  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^3$  の  $\mathbb{F}_p$ -有理点の集合に対応していることがわかる. 更に  $q \in \text{Sing } \delta$  に対して特異点は

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{P}^3, q} & \longleftarrow & \widehat{\mathcal{O}}_{V, g_0(q)} \\ \parallel & & \parallel \\ k[[x, y, z]] & \longleftarrow & k[[x^i y^j z^k \mid i+j+k \equiv 0 \pmod{p}]] \end{array}$$

で与えられる. この特異点はタイプ  $\frac{1}{p}(1, 1, 1)$  のトーリック特異点であり, 特に  $p=3$  の時 crepant resolution が存在する.

注意 3.2. 実は  $\mathbb{P}^3$  上の  $\delta$  の特異点は  $p^3 + p^2 + p + 1$  個の点  $\text{Sing } \delta$  をブローアップすることによって解消されることが簡単な計算により確かめられる (即ち,  $\delta$  は [3] で言う smoothable なベクトル場である).  $S \rightarrow \mathbb{P}^3$  をそのブローアップとした時,  $\delta$  はサブバンドル  $\mathcal{L} \hookrightarrow T_S$  を誘導し (smooth 1-foliation), 次の可換図式を与える:

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{g} & X & \longrightarrow & S^{(-1)} \\ \downarrow \text{b-ups} & & \downarrow \text{resol.} & & \downarrow \\ \mathbb{P}^3 & \xrightarrow{g_0} & V & \longrightarrow & \mathbb{P}^{3(-1)} \end{array}$$

ここで  $g$  は有限, 平坦射で  $S$  のフロベニウス射をファクターする. この  $g$  は後に幾何不変量を求める際に有効である.

## (2) 不変量の計算 1.

ここでは上のように構成された非特異多様体が実際 C.Y. になっていることを示す.

**Case (I):** 特異点解消  $\pi: \tilde{W} \rightarrow W$  が small resolution であるので  $K_{\tilde{W}} \cong \mathcal{O}_{\tilde{W}}$  は明らか. また  $W \subset Y_1 \times Y_2$  について  $\tilde{W}$  はある四次元非特異有理多様体  $Y_1 \times Y_2$  の anti-canonical 因子のメンバーになっていることがわかる. よって完全列:

$$\cdots \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{Y_1 \times Y_2}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{\tilde{W}}) \rightarrow H^2(K_{Y_1 \times Y_2}) \rightarrow \cdots,$$

及びセール双対性により  $h^1(\mathcal{O}_{\tilde{W}}) = h^2(\mathcal{O}_{\tilde{W}}) = 0$  が従う.

**Case (II):**  $p$ -閉有理ベクトル場の一般論より 次の完全系列が成立する:

$$(3-A) \quad 0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow T_S \rightarrow g^*T_X \rightarrow \mathcal{L}^{\otimes p} \rightarrow 0.$$

よって  $\{E_i\}$  を  $\pi: S \rightarrow \mathbb{P}^3$  の例外因子とした時 次の等式が成り立つ.

$$g^*K_X \cong \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}((p-1)^2 - 4) \otimes \mathcal{O}_X \left( (3-p) \sum_{i=1}^{p^3+p^2+p+1} E_i \right).$$

これより 特に  $p=3$  の時,  $K_X \equiv_{\text{num.}} 0$  であることがわかる. ここでリーマン・ロッホより  $\chi(\mathcal{O}_X) = 0$  が得られ, もし  $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$  ならば

$$1 \leq h^0(\mathcal{O}_X) + h^2(\mathcal{O}_X) = h^3(\mathcal{O}_X).$$

また セール duality より, 右辺  $= h^0(K_X) \leq 1$ , よって  $h^2(\mathcal{O}_X) = 0$  かつ  $h^0(K_X) = 1$ , 即ち  $X$  は C.Y. threefold が従う. よって以下  $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$  が成立することを示せばよい. 我々の場合,  $H^0(\mathcal{L}^\vee) = 0$  を先ず示し, 以下に述べる命題を用いた. 詳細は省略する.

**命題 3.3** (cf. [3]).  $S$  を非特異三次元有理多様体,  $X$  を  $S$  の smooth 1-foliation  $\mathcal{L} \rightarrow T_S$  による商多様体とする. もし  $H^0(\mathcal{L}^\vee) = 0$  ならば,  $H^1(\mathcal{O}_X) = 0$  が成立する.

## (3) 不変量の計算 2.

問題 1.3 に関連して, ここではグローバルベクトル場について考える. 先ず, 以下の命題が成立する.

**定理 3.4** (cf. [4]).  $X$  を C.Y. threefold,  $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$  を  $\mathbb{P}^1$  上のファイブレーションとする.

i) もし  $f$  の一般ファイバーが  $K3$  曲面である時, 次の不等式が成立する:

$$\dim H^0(T_X) \leq \max \{0, 3 - \#\{f \text{ の特異ファイバー}\}\}.$$

ii)  $f$  の一般ファイバーがアーベル曲面であり, セクション  $C$  を持つと仮定する.  $\mathcal{N}_{C/X} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1+a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1-a)$  ( $a \geq 0$ ) をノーマルバンドルとした時 以下が成立する:

$$\dim H^0(T_X) \leq \max \{0, 3 + a - \#\{f \text{ の特異ファイバー}\}\}.$$

命題 3.5. 次の形で与えられる  $\mathbb{P}^3$  上の  $p$ -閉有理ベクトル場を考える.

$$\delta = (G_1^p - x) \frac{\partial}{\partial x} + (G_2^p - y) \frac{\partial}{\partial y} + (G_3^p - z) \frac{\partial}{\partial z}$$

但し,  $G_1, G_2, G_3 \in k[x, y, z]$ .  $g_0 : \mathbb{P}^3 \rightarrow V$  を  $\delta$  による商とし,  $V$  の特異点解消  $\pi : X \rightarrow V$  で  $X \setminus \pi^{-1}(\text{Sing } V) \cong V \setminus \text{Sing } V$  を満たすものが存在したとする. 更に  $1, x, x^2, y, y^2, z, z^2, G_1^p, G_2^p, G_3^p$  は  $k[x, y, z]$  内で  $k$ -線形独立かつ  $X$  は有理多様体でないと仮定する. この時  $H^0(T_X) = 0$  が成り立つ.

よって case (II) の場合,  $H^0(T_X) = 0$  は上の命題 3.5 より即従う. また case (I) については, 定理 3.4 及び以下の考察により  $H^0(T_{\tilde{W}}) = 0$  が成り立つことが示される.

ここでは  $\tilde{W}$  の持つファイバー構造について考える.  $Y_2$ : 有理曲面より,  $\mathbb{P}^1$ -ファイブレーション構造  $\rho_2 : Y_2 \rightarrow \mathbb{P}^1$  ( $\mathbb{P}^1$  上のファイブレーションで一般ファイバーが  $\mathbb{P}^1$  と同型なもの) が存在し, 射の合成により  $\tilde{W}$  のファイブレーション  $f_2 := \rho_2 \circ \text{pr}_2 \circ \pi : \tilde{W} \rightarrow \mathbb{P}^1$  を誘導する. 特に,  $f_2$  の一般ファイバーは次のファイバー積で与えられる:

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{W} & & \\ & & \downarrow \pi & & \\ f_2^{-1}(t) \cong \rho_2^{-1}(t) \times_{\mathbb{P}^1} Y_1 & \hookrightarrow & W & \xrightarrow{\text{pr}_1} & Y_1 \\ & \downarrow \square & \downarrow \text{pr}_2 & \square & \downarrow \phi_1 \\ & \mathbb{P}^1 \cong \rho_2^{-1}(t) & \hookrightarrow & Y_2 & \xrightarrow{\phi_2} \mathbb{P}^1 \end{array}$$

よって二重被覆  $\rho_2^{-1}(t) \hookrightarrow Y_2 \rightarrow \mathbb{P}^1$  による  $Y_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  の底変換を観察することで  $f_2$  の一般ファイバーが決定できる.

定理 3.6 ([4]).  $f_2 : \tilde{W} \rightarrow \mathbb{P}^1$  の一般ファイバーは

- (1)  $p = 3$  の時  $K3$  曲面,
- (2)  $p = 2$  の時  $K3$  曲面 及び 12 個の有理二重点  $A_1$  を持つ正規曲面で超特異  $K3$  曲面と双有理.

特に  $\tilde{W}$  には特異ファイバーを 3 つ以上持つ  $K3$ -ファイブレーションが存在する.

以上の考察によって  $H^0(T_{\tilde{W}}) = 0$  であることがわかる. また  $Y_2$  の代わりに  $Y_1$  の  $\mathbb{P}^1$ -ファイブレーション  $\rho_1 : Y_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  を同様に考えることで, 以下のような  $\tilde{W}$  のファイブレーション  $f_1 := \rho_1 \circ \text{pr}_1 \circ \pi : \tilde{W} \rightarrow \mathbb{P}^1$  が存在することが判る.

定理 3.7 ([4]).  $f_1 : \tilde{W} \rightarrow \mathbb{P}^1$  の一般ファイバーは

- (1)  $p = 3$  の時 2 個の有理二重点  $A_2$  を持つ正規曲面で超特異  $K3$  曲面と双有理,
- (2)  $p = 2$  の時 1 個の有理二重点  $D_4$  を持つ正規曲面で超特異  $K3$  曲面と双有理.

また  $\tilde{W}$  はその構成法より一般ファイバーが楕円曲線とカスプを一つ持つ有理曲線との直積であるような  $\mathbb{P}^1$  上ファイブレーションを持つことが判る. この様な特異な一般ファイバーを持つファイブレーションは超特異  $K3$  曲面の準楕円ファイブレーションとも関連して興味深い対象である.

#### (4) 不変量の計算 3.

その他の不変量の計算は以下の様にして行った.

$\pi_1^{\text{alg}} = \{1\}$  は  $\tilde{W}$  及び  $X$  が  $\mathbb{P}^3$  から有理射により純不分離にドミネートされることから従う.

また Nygaard の結果よりこの様な unirational な多様体に関して  $\rho = b_2$  が成立することが知られている ([10]).

更に case (II) の場合, 注意 3.2 の可換図式中の純不分離射  $g$  の存在より  $b_i(X) = b_i(S)$  が成立することが判る, 特に  $b_2(S) = (\text{ブローアップ } S \rightarrow \mathbb{P}^3 \text{ の回数}) + 1$ ,  $b_1(S) = b_3(S) = 0$  である.

グローバル 1-フォームについて: case (I) では  $K3$ -ファイブレーション  $f_2: \tilde{W} \rightarrow \mathbb{P}^1$  からの完全系列  $0 \rightarrow f_2^* \Omega_{\mathbb{P}^1} \rightarrow \Omega_{\tilde{W}} \rightarrow \Omega_{\tilde{W}/\mathbb{P}^1} \rightarrow 0$  を, case (II) では完全系列 (3-A) を用いることでグローバル 1-フォームの不存在が証明可能である.

#### REFERENCES

1. M. Artin, B. Mazur, *Formal groups arising from algebraic varieties*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4<sup>e</sup> série) 10, 87-132 (1977).
2. P. Delign, *Relèvement des surfaces  $K3$  en caractéristique nulle*, Lect. Notes in Math. 868, Springer-Verlag, 58-79, (1981).
3. M. Hirokado, *Zariski surfaces as quotients of Hirzebruch surfaces by 1-foliations*, preprint.
4. ———, *Calabi-Yau threefolds obtained as fiber products of elliptic and quasi-elliptic rational surfaces*, preprint.
5. H. Ito, *The Mordell-Weil groups of unirational quasi-elliptic surfaces in characteristic 3*, Math. Z., 211, 1-40 (1992).
6. ———, *The Mordell-Weil groups of unirational quasi-elliptic surfaces in characteristic 2*, Tôhoku Math. J., 46, 211-251 (1994).
7. W. Lang, *Extremal rational elliptic surfaces in characteristic  $p$* , Math. Z. 207, 429-438 (1991).
8. W. Lang, N. Nygaard, *A short proof of the Rydakov-Safarevic theorem*, Math. Ann. 251, 171-173 (1980).
9. Y. Miyaoka, *Vector fields on Calabi-Yau manifolds in characteristic  $p$* , 代数幾何学シンポジウム記録 (於城崎), 149-156 (1995).
10. N. Nygaard, *On the fundamental group of a unirational 3-fold*, Inv. Math. 44, (1978), 75-86.
11. ———, *A  $p$ -adic proof of the non-existence of vectorfields on  $K3$  surfaces*, Ann. of Math. 110, 515-528 (1979).
12. A. Rudakov, I. Shafarevich, *Inseparable morphisms of algebraic surfaces*, Math. USSR Izv,

- 10, 1205-1237 (1976).
13. ———, *Surfaces of type K3 over fields of finite characteristics*, J. Soviet Math. 22, 1476-1533 (1983).
  14. K. Sakamaki, *Artin-Mazur formal groups and Picard-Fuchs equations attached to certain Calabi-Yau threefolds*, Master's Thesis, Kyoto University, 1994.
  15. C. Schoen, *On fiber products of rational elliptic surfaces with section*, Math. Z. 197, 177-199 (1988).
  16. N. Suwa, *Hodge-Witt cohomology of complete intersections*, J. Math. Soc. Japan, vol. 45, no. 2, 295-300 (1993).