代数幾何学シンポジウム記録
1997年度 pp.66-80

RELATIVE BOGOMOLOV'S INEQUALITY IN THE ARITHMETIC CASE (A JOINT WORK WITH ATSUSHI MORIWAKI)

川口 周

1. はじめに

本稿では、森脇淳先生との共同研究で得られた結果を報告します。証明などの詳細は、プレプリント [7] を参照して下さい。

はじめに、タイトルに出てくる arithmetic と relative について説明したい。

Bogomolov 不等式の算術化は、宮岡先生や森脇先生によってなされた（[8]、[9]、[10]）：

定理 1.1 (Arithmetic Bogomolov-Gieseker's inequality). X を次元が $d+1$ の正則で射影的な算術的多様体とする。$\overline{H}$ を算術的に豊富なエルミート直線束、$\overline{E}$ を階数が r のエルミートベクトル束とする。このとき $E_{\mathbb{Q}}$ が $H_{\mathbb{Q}}$- 半安定であれば、

$$f_*\left((2r\widehat{c}_2(\overline{E})-(r-1)\widehat{c}_1(\overline{E})^2)\widehat{c}_1(\overline{H})^{d-1}\right)\geq 0$$

また最近、森脇先生は次を証明し（[11]）、この不等式を安定曲線のモデュライ空間に適用した。

定理 1.2 (Relative Bogomolov's inequality). $f: X \to Y$ を $\mathbb{C}$ 上の半安定曲線の族とし、E を X 上の階数が r のベクトル束とする。y を Y の点とする。このとき f が y でスムーズで、$E|_{X_y}$ が半安定であれば、$\mathrm{dis}_{X/Y}(E)=f_*(2rc_2(E)-(r-1)c_1(E)^2)$ は y で weakly positive である。

これの算術的な場合を考えることが本稿の目標である（§5）。そのために、f_* や weak positivity を算術的なときに定める必要があるが、それらなどの枠組み（一般論）について §2 で述べる。証明は [11] とパラレルに進むが、そのときに用いる算術的 Riemann-Roch について、§3 で述べる。また §4 で定理の証明に使われるいくつかの補題（Analytic torsion の評

価、$L^2 - L^\infty$ 比較）を述べる。最後に §5 で定理と定理の証明の概略を述べる（冗長に述べている部分もあろうかと思いますが、ご容赦下さい）。

2. Arakelov 幾何

2.1. 算術的 Chow 群. はじめに、Gillet と Soulé による算術的交叉理論（arithmetic intersection theory）について、簡単に説明したい。詳しくは、原論文 [4] または [12] を参照して下さい。

X を次元が d の正則な算術的多様体（regular arithmetic variety）、つまり X は $\mathbb{Z}$ 上平坦かつ擬射影的な整スキームで、さらに X は正則とする。各 $p \geq 0$ に対して、$X(\mathbb{C})$ 上のタイプ (p,p) の実微分形式 α で $F_\infty^*(\alpha) = (-1)^p\alpha$ を満たすものからなる実ベクトル空間を、$A^{p,p}(X)$ と書く。但し、ここで $F_\infty : X(\mathbb{C}) \to X(\mathbb{C})$ は複素共役を表わしている。さらに、上で微分形式をカレントに置き換えた実ベクトル空間を、$D^{p,p}(X)$ と書くことにする。

余次元が p のサイクルとは、形式的な有限和 $\sum_\alpha n_\alpha Z_\alpha$（$n_\alpha$ は整数、Z_α は余次元 p の既約な閉多様体）である。このようなサイクルに対して、Dirac 型のカレント $\delta_{Z(\mathbb{C})} \in \mathrm{D}^{p,p}(X)$ を、$\eta \in A^{d-p,d-p}(X(\mathbb{C}))$ での値を、

$$\delta_{Z(\mathbb{C})}(\eta) = \sum_\alpha n_\alpha \int_{Z_\alpha(\mathbb{C})_{nsg}} \eta$$

とすることによって、定めることができる。

Z の Green カレントとは、任意のカレント $g_Z \in D^{p-1,p-1}(X)$ で

$$[\omega_Z] = dd^c(g_Z) + \delta_{Z(\mathbb{C})}$$

が $A^{p,p}(X)$ に属しているものである（$A^{p,p}(X) \subset D^{p,p}(X)$ と見なしている）。ω_Z を $\omega(Z, g_Z)$ とも書く。さて、X の任意の既約な閉多様体 Y に対し、Y の Green カレントが存在する。さらに、Y の Green カレントとして、$X - Y$ 上滑らかな微分形式 g_Y で、Y に沿って logarithmic type なものがとれる。このような微分形式を、Y の log-type の Green 形式と呼ぶことにしよう。

対 (Z, g)（Z は余次元が p のサイクル、g は Z の Green カレント）を、余次元が p の算術的サイクル（arithmetic cycle）と呼ぶことにし、これらで生成される加群を $\widehat{Z}^p(X)$ で表わ

す。さらに $\widehat{R}^p(X) \subset \widehat{Z}^p(X)$ を、対 $(\mathrm{div}(f), [-\log|f|^2])$ （f は余次元が $p-1$ のある既約な閉多様体上の、零でない有理関数）と、対 $(0, \partial u + \overline{\partial} v)$ （u はタイプ $(p-1,p)$ のカレント、v はタイプ $(p,p-1)$ のカレント）で生成される部分加群とする。そして余次元が p の**算術的 Chow 群**（arithmetic Chow group）を、商 $\widehat{\mathrm{CH}}^p(X) = \widehat{Z}(X)/\widehat{R}^p(X)$ で定義する。

Gillet と Soulé は、$\oplus_{p\geq 0}\widehat{\mathrm{CH}}^p(X)_{\mathbb{Q}}$ に（可換で結合的な）交叉積

$$\widehat{\mathrm{CH}}^p(X)_{\mathbb{Q}} \otimes \widehat{\mathrm{CH}}^q(X)_{\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathrm{CH}}^{p+q}(X)_{\mathbb{Q}}$$

が入ることを証明した。例えば、(Z_1, g_1) と (Z_2, g_2) が固有に交わっていれば、その積は

$$(Z_1, g_1) \cdot (Z_2, g_2) = (Z_1 \cdot Z_2, g_1 \delta_{Z_2(\mathbb{C})} + \omega_{Z_1} g_2)$$

で定められる。

算術的 Chow 群は、次のような functorial な性質をもつ。すなわち、$f: X \to Y$ を正則な算術的多様体の間の射とする。このとき、引き戻し $f^*: \widehat{\mathrm{CH}}^p(Y) \to \widehat{\mathrm{CH}}^p(X)_{\mathbb{Q}}$ で、交叉積と可換なものが存在する。例えば、Z を $f^{-1}(Z) \neq X$ をみたす既約閉多様体、g_Z を Z の log-type の Green 形式とすれば、$f^*(Z, [g_Z])$ は、$(f^*Z, [f^*g_Z])$ となる。

また、f が射影的で、$f_{\mathbb{Q}}: X_{\mathbb{Q}} \to Y_{\mathbb{Q}}$ がスムーズであれば、push-forward $f_*: \widehat{\mathrm{CH}}^p(X) \to \widehat{\mathrm{CH}}^{p-d}(Y)$ $(d = \dim X - \dim Y)$ も定義される。これは、$(Z, g) \in \widehat{Z}^p(X)$ に対して、$f_*(Z,g) = (f_*Z, f_*g)$ として定められる。実際、$dd^c(f_*g) + \delta_{Z(\mathbb{C})} = [f_*\omega_Z]$ であり、$f_{\mathbb{Q}}$ がスムーズなので、ファイバーに沿っての積分で得られる $f_*\omega_Z$ も滑らかな微分形式となる。

2.2. 算術的 L^1-Chow 群. $f: X \to Y$ を正則な算術的多様体の間の射とする。（f が半安定曲線の族の場合などを、念頭に置いている。）一般には、$f_{\mathbb{Q}}: X_{\mathbb{Q}} \to Y_{\mathbb{Q}}$ がスムーズでないので、前小節の最後の push-forward の部分は、$f_*(Z,g) = (f_*Z, f_*g)$ が $\widehat{\mathrm{CH}}^{p-d}(Y)$ に入らない。しかし f がスムーズになるような Y の開集合上では、$f_*\omega_Z$ は滑らかな微分形式になっている。そこで算術的 Chow 群を、少し広げることを考えよう。

対 (Z,g) が、余次元が p の**算術的 L^1- サイクル**（arithmetic L^1-cycle）とは、Z は余次元が p のサイクルで、ある局所可積分な $(p-1, p-1)$ 形式 ϕ と、ある局所可積分な (p,p) 形式 ω があって、$g = [\phi]$ と $dd^c(g) + \delta_{Z(\mathbb{C})} = [\omega]$ となっているものである。これらで生成され

る加群を $\widehat{Z}^p_{L^1}(X)$ で表わす。そして余次元が p の**算術的 L^1-Chow 群** (arithmetic L^1-Chow group) を、商 $\widehat{\mathrm{CH}}^p_{L^1}(X) = \widehat{Z}_{L^1}(X)/\widehat{R}^p(X) \cap \widehat{Z}_{L^1}(X)$ で定義する。

主に用いるのは $\widehat{\mathrm{CH}}^p_{L^1}(X)$ であるが、次も定義しておく。対 (Z,g) が、余次元が p の**算術的 D- サイクル** (arithmetic D-cycle) とは、Z は余次元が p のサイクルで $g \in D^{p,p}(X)$ となっているものである。これらで生成される加群を $\widehat{Z}^p_D(X)$ で表わし、余次元が p の**算術的 D-Chow 群** (arithmetic D-Chow group) を、商 $\widehat{\mathrm{CH}}^p_D(X) = \widehat{Z}_D(X)/\widehat{R}^p(X) \cap \widehat{Z}_D(X)$ で定義する。任意の Z に対して、Z の log-type の Green 形式が存在することから、

$$\widehat{\mathrm{CH}}^p(X) \subset \widehat{\mathrm{CH}}^p_{L^1}(X) \subset \widehat{\mathrm{CH}}^p_D(X)$$

となっていることに注意しよう。

$\widehat{\mathrm{CH}}^p_{L^1}(X)$ の性質として、$\oplus_{p\geq 0}\widehat{\mathrm{CH}}^p_{L^1}(X)_{\mathbb{Q}}$ は、自然な $\oplus_{p\geq 0}\widehat{\mathrm{CH}}^p(X)_{\mathbb{Q}}$ 加群の構造をもつ。具体的には、$(Y,f) \in \widehat{Z}^p(X)$ と $(Z,g) \in \widehat{Z}^q_{L^1}(X)$ が与えられたとき、Z の Green カレント g_Z をひとつとり、

$$(Y,f)\cdot(Z,g) = (Y,f)\cdot(Z,g_Z) + (0, \omega(Y,f)\ (g-g_Z))$$

で、作用させる（右辺の第 2 項は、通常の算術的交叉積）ことによって、加群の構造が得られる。

また、算術的 L^1- Chow 群については、期待されるとおり f の仮定を少し弱めても、push-forward が存在する。つまり $f: X \to Y$ を正則な算術的多様体の間の射とする。f が射影的で全射であれば、

$$f_*: \widehat{\mathrm{CH}}^p_{L^1}(X) \to \widehat{\mathrm{CH}}^{p-d}_{L^1}(Y) \quad (d = \dim X - \dim Y)$$

が存在する。これは、ω を局所可積分な形式とするとき $f_*\omega$ も局所可積分な形式になることから従う。

まとめて、

命題 2.1. (1) X を正則な算術的多様体とするとき、$\oplus_{p\geq 0}\widehat{\mathrm{CH}}^p_{L^1}(X)_{\mathbb{Q}}$ は、自然な $\oplus_{p\geq 0}\widehat{\mathrm{CH}}^p(X)_{\mathbb{Q}}$ 加群の構造をもつ。

(2) $f: X \to Y$ を正則な算術的多様体の間の射とする。f が射影的で全射であれば、push-forward

$$f_*: \widehat{\mathrm{CH}}^p_{L^1}(X) \to \widehat{\mathrm{CH}}^{p-d}_{L^1}(Y) \quad (d = \dim X - \dim Y)$$

が存在する。

同様の命題は $\widehat{\mathrm{CH}}^p_D(X)$ でも成り立つが、次の補題は $\widehat{\mathrm{CH}}^p_{L^1}(X)$ であることが必要である（この補題は §3 で使われる）。

補題 2.2. X を正則な算術的多様体、U をその空でない Zariski 開集合とし、$i: U \to X$ を包含写像とする。$X - U$ が、$X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ のファイバーの成分を含まなければ、制限写像

$$i^*: \widehat{\mathrm{CH}}^p_{L^1}(X) \to \widehat{\mathrm{CH}}^p_{L^1}(U)$$

は単射である。

証明の概略 $\alpha = (D, [\phi]) \in \widehat{Z}^p_{L^1}(X)$ が、$i^*(\alpha) = 0 \in \widehat{\mathrm{CH}}^p_{L^1}(U)$ とする。すると、X 上の有理関数 f があって、$\widehat{Z}^p_{L^1}(X)$ の中で

$$(D|_U, [\phi]|_{U(\mathbb{C})}) = (\mathrm{div}(f)|_U, [-\log|f|^2]|_{U(\mathbb{C})})$$

となる。$dd^c([\phi]) + \delta_{D(\mathbb{C})} = [h]$ （h は L^1- 形式）とすれば、$dd^c([-\log|f|^2]) + \delta_{\mathrm{div}(f)(\mathbb{C})} = 0$ より、

$$\delta_{D(\mathbb{C})} - \delta_{\mathrm{div}(f)(\mathbb{C})} = [h].$$

左辺は Dirac 型のカレント、右辺は L^1- 形式から定まるカレント（ここで、L^1- Chow 群というのを用いている）だから、$h = 0$ $(a.e)$ かつ $D(\mathbb{C}) = \mathrm{div}(f)(\mathbb{C})$ 。$X - U$ の仮定より、$D = \mathrm{div}(f)$。 □

2.3. 算術的 Chern 類. X を正則な算術的多様体、(E,h) を階数が r のエルミートベクトル束とする。ϕ を、$\mathbb{Q}$- 係数の対称な r 変数巾級数とする。このとき、**算術的特性類** (arithmetic characteristic class)

$$\widehat{\phi}(E,h) \in \oplus_{p\geq 0}\widehat{\mathrm{CH}}^p(X)_{\mathbb{Q}}$$

が定まって、次の性質を満たす ([5], [12]) 。

(1) (L,h) がエルミート直線束のときには、

$$\widehat{c}_1(L,h) = (\mathrm{div}(s), [-\log h(s,s)]) \in \widehat{\mathrm{CH}}^1(X)$$

である。また、 $P(T) = \phi(T,0,\cdots,0)$ とすれば、

$$\widehat{\phi}(L,h) = P(\widehat{c}_1(L,h)) \oplus_{p\geq 0} \widehat{\mathrm{CH}}^p(X)_{\mathbb{Q}}$$

(2) $f : X \to Y$ を正則な算術的多様体の間の射とすれば、

$$f^*\widehat{\phi}(E,h) = \widehat{\phi}(f^*E, f^*h).$$

(3) $\omega(\widehat{\phi}(E,h)) = \phi(E,h) \in \oplus_{p\geq 0}A^{p,p}(X)$

(4) $\overline{\mathcal{E}} : 0 \to (S,h') \to (E,h) \to (Q,h'') \to 0$ をベクトル束の完全列とすると、

$$\widehat{\phi}(S\oplus Q, h'\oplus h'') - \widehat{\phi}(E,h) = a(\widetilde{\phi}(\mathcal{E})).$$

(5) $\widehat{\phi}$ は、テンソル積に関してよく振るまう。例えば、

$$\widehat{\mathrm{ch}}((E,h)\oplus(F,k)) = \widehat{\mathrm{ch}}(E,h) + \widehat{\mathrm{ch}}(F,k)$$

$$\widehat{\mathrm{ch}}((E,h)\otimes(F,k)) = \widehat{\mathrm{ch}}(E,h)\cdot\widehat{\mathrm{ch}}(F,k)$$

が成り立つ。

もちろん、(1) から (5) は独立した条件ではなくて、例えば、(1) と (3) から、Poincaré-Lelong の公式

$$dd^c([-\log h(s,s)]) + \delta_{\mathrm{div}(s)(\mathbb{C})} = [dd^c(-\log h(s,s))]$$

が出てくる。

さて、これらの性質を用いて、算術的 Chern 類も、普通の Chern 類のように計算できる。例えば、

例 2.3. X を正則な算術的多様体、$\overline{E}=(E,h)$ を階数が r のエルミートベクトル束とする。このとき

1. $\widehat{\mathrm{ch}}_2(E,h)=\frac{1}{2}\widehat{c}_1(E,h)^2-\widehat{c}_2(E,h)$
2. $\widehat{\mathrm{ch}}_2(E\otimes E^\vee,h\otimes h^\vee)=(r-1)\widehat{c}_1(E,h)^2-2r\widehat{c}_2(E,h)$
3. $\widehat{c}_1(\mathrm{Sym}^n(\overline{E}))=\frac{n}{r}\binom{n+r-1}{r-1}\widehat{c}_1(\overline{E})+a\left(\sum_{|\alpha|=n,\alpha\geq 0}\log\frac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_r!}\right)$
4.

$$\widehat{\mathrm{ch}}_2(\mathrm{Sym}^n(\overline{E}))$$
$$=\binom{n+r}{r+1}\widehat{c}_1(\overline{E})+\frac{1}{2}\binom{n+r-1}{r+1}\widehat{c}_1(\overline{E})^2+\left(\frac{n}{r}\sum_{|\alpha|=n,\alpha\geq 0}\log\frac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_r!}\right)a(c_1(\overline{E}))$$

2.4. **generalized metrics.** $\oplus_{p\geq 0}\widehat{\mathrm{CH}}^p(X)$ を少し広げたのに対応して、エルミート直線束のなす同値類も少し広げる。[1] に従って generalized metric を次のように定義する。

X を正則な算術的多様体、L を直線束とする。h が、**generalized metric** とは、$L(\mathbb{C})$ 上の（C^∞ な）エルミート内積 h_0 と、$X(\mathbb{C})$ 上の局所可積分な関数 φ が存在して、$h=e^\varphi h_0$ となっているものである。

(L,h) を generalized metric の入った直線束とし、s を 0 でない有理切断とする。このとき

$$\widehat{c}_1(L,h)=(\mathrm{div}(s),[-\log h(s,s)])$$

によって、$\widehat{\mathrm{CH}}^1_D(X)_\mathbb{Q}$ の元が定まる（$dd^c([-\log h(s,s)])+\delta_{\mathrm{div}(s)(\mathbb{C})}$ が L^1- 関数になるとは限らないので、$\widehat{\mathrm{CH}}^1_{L^1}(X)_\mathbb{Q}$ の元には一般にはならない）。

一方、$(Z,[\phi])$ を $\widehat{\mathrm{CH}}^1_{L^1}(X)_\mathbb{Q}$ の元としよう。そして $\mathbf{1}$ を $\mathcal{O}_X(Z)$ の有理切断で、$\mathrm{div}(\mathbf{1})=Z$ となるものとする。このとき、$\mathcal{O}_X(Z)$ の generalized metric h で、$-\log h(s,s)=\phi$ (a.e.) となるものが存在する。これを、$\mathcal{O}_X((Z,[\phi]))$ と書く。

要するに、generalized metric の入った直線束の同値類は、$\widehat{\mathrm{CH}}^1_{L^1}(X)_\mathbb{Q}$ よりも広い類といえる。

2.5. weak positivity. この小節では weak positivity の定義などを述べる。

X を正則な算術的多様体とし、$x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ とする。

$$\widehat{\mathrm{CH}}^1_{L^1}(X,x)_{\mathbb{Q}} = \{\alpha \in \widehat{\mathrm{CH}}^1_{L^1}(X)_{\mathbb{Q}} \mid \omega(\alpha) \text{ は、} x \text{ で滑らか}\}$$

とおく。同様に、$\widehat{\mathrm{CH}}^1_{L^1}(X,x)$ 、$\widehat{Z}^1_{L^1}(X,x)_{\mathbb{Q}}$ と $\widehat{Z}^1_{L^1}(X,x)$ も定める。

$\alpha \in \widehat{\mathrm{CH}}^1_{L^1}(X)_{\mathbb{Q}}$ が **semi-ample at** x とは、ある自然数 n と、ある $(E,g) \in \widehat{Z}^1_{L^1}(X,x)$ があって、

(1) E は正の因子で、$x \notin \mathrm{Supp}(E)$ 。

(2) 各 $y \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \cdot x$ に対して、$g(y) \geq 0$ 。($g(y) = \infty$ もあり得る)。

(3) $n\alpha = (E,g) \in \widehat{\mathrm{CH}}^1_{L^1}(X,x)_{\mathbb{Q}}$

を満たしているものをいう。

L を X 上の直線束、h を L の generalized metric で、x の周りで滑らかであるとき、(L,h) が、**generated by small sections at** x とは、$s \in H^0(X,L)$ で、$s(x) \neq 0$ かつ $h(s,s)(x) \leq 1$ となっているものである。

U を X の Zariski 開集合、F を U 上自由な連接層として、h_F が $U(\mathbb{C})$ 上の滑らかな metric とするときにも、(F,h_F) について generated by small sections at x が同様に定義される。

$(Z,g) \in \widehat{Z}^1_{L^1}(X,x)$ について、(Z,g) が semi-ample at x ということと、ある自然数 n があって $\mathcal{O}_X(n(Z,g))$ が generated by small sections at x ということは、同値である。

さて、$\alpha \in \widehat{\mathrm{CH}}^1_{L^1}(X)_{\mathbb{Q}}$ が **weakly positive at** x とは、ある semi-ample at x な元 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ があって、$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ となっているものである。ここで lim は、次の意味である：

ある $Z_1, \cdots, Z_{l_1} \in \widehat{\mathrm{CH}}^1_{L^1}(X,x)_{\mathbb{Q}}$ と、ある x の周りで滑らかな局所可積分な関数 $g_1, \cdots, g_{l_2}$ と、ある $\mathbb{Q}$- 係数の数列 $\{a_n^1\}_{n=1}^{\infty}, \cdots, \{a_n^{l_1}\}_{n=1}^{\infty}$ とある $\mathbb{R}$- 係数の数列 $\{b_n^1\}_{n=1}^{\infty}, \cdots, \{b_n^{l_2}\}_{n=1}^{\infty}$ とが存在して、

(1) l_1, l_2 は、n に依らない；

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n^i = 0$、$\lim_{n\to\infty} b_n^j = 0$；

(3) $\alpha = \alpha_n + \sum_{i=1}^{l_1} a_n^i Z_i + \sum_{j=1}^{l_2} a(b_n^j g_j)$

と書ける。

3. Riemann-Roch

Gillet と Soulé によって証明された算術的 Riemann-Roch 定理を、まず述べる（[6], [12]）。

定理 3.1. $f: X \to Y$ を正則な算術的多様体の間の射影的な射で、$f_{\mathbb{Q}}: X_{\mathbb{Q}} \to Y_{\mathbb{Q}}$ がスムーズとする。(E,h) をエルミートベクトル束とする。このとき、$\widehat{\mathrm{CH}}^1(Y)_{\mathbb{Q}}$ において、

$$\widehat{c}_1(\det Rf_*(E), h_Q^{\overline{E}}) = f_*\left(\mathrm{ch}(E,h)\widehat{\mathrm{td}}(Tf,h_f) - a(\mathrm{ch}(E_{\mathbb{C}})\,\mathrm{td}(Tf_{\mathbb{C}})R(Tf_{\mathbb{C}}))\right)^{(1)}$$

が成り立つ。ここで $h_Q^{\overline{E}}$ は Quillen metric（Quillen metric については、§4.1 に簡単に説明してあります）。

これを、$f: X \to Y$ のファイバーが 1 次元のとき（従って、$f_{\mathbb{Q}}: X_{\mathbb{Q}} \to Y_{\mathbb{Q}}$ のファイバーが非特異な曲線のとき）に用いると、

系 3.2. $f: X \to Y$ を正則な算術的多様体の間の射影的な射で、$f_{\mathbb{Q}}: X_{\mathbb{Q}} \to Y_{\mathbb{Q}}$ がスムーズとする。(E,h) をエルミートベクトル束とする。$f: X \to Y$ のファイバーが 1 次元だとすると、$\widehat{\mathrm{CH}}^1(Y)_{\mathbb{Q}}$ において

(3.2.1) $$\widehat{c}_1(\det Rf_*(E), h_Q^{\overline{E}}) - \mathrm{rk}(E)\widehat{c}_1(\det Rf_*(\mathcal{O}_X), h_Q^{\overline{\mathcal{O}_X}}) = f_*\left(\frac{1}{2}(\widehat{c}_1(\overline{E}) - \widehat{c}_1(\overline{E})\cdot\widehat{c}_1(\omega_{X/Y})) - \widehat{c}_2(\overline{E})\right)$$

が成り立つ。

今度は、$f: X \to Y$ のファイバーが 1 次元だが、$f_{\mathbb{Q}}: X_{\mathbb{Q}} \to Y_{\mathbb{Q}}$ がスムーズとは限らない場合も考えてみよう。このときには Bisumut と Bost によって、次のことが示されている（[1]）。

定理 3.3. $f: X \to Y$ を $\mathbb{C}$ 上の非特異な代数多様体の間の固有射で、各ファイバーが特異点として高々通常 2 重点しかもたない被約連結な曲線とする。$\Sigma = \{x \in X \mid f \text{ は } x \text{ でスムーズでない}\}$ とおき、$\Delta = f_*(\Sigma)$ とおく。(E,h) をエルミートベクトル束とする。このとき $Y - \mathrm{Supp}(\Delta)$ 上の $\det Rf_*(E)$ の Quillen metric $h_Q^{\overline{E}}$ は、Y 上に generalized metric として伸びる。さらに、$D^{(1,1)}(Y)$ の元として、

$$c_1\left(\det Rf_*(E), h_Q^{\overline{E}}\right) = -f_*[\mathrm{td}(\omega_{X/Y}^{-1})\,\mathrm{ch}(\overline{E})]^{(2,2)} - \frac{\mathrm{rk}\,E}{12}\delta_\Delta$$

が成り立つ。

元に戻って、$f : X \to Y$ を正則な算術的多様体の間の射影的な射で、$f_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \to Y_{\mathbb{C}}$ の各ファイバーが、特異点として高々通常 2 重点しかもたない被約連結な曲線とする。このとき(3.2.1) の両辺は、アプリオリには $\widehat{\mathrm{CH}}^1_D(Y)$ の元であるが、上の Bisumut-Bost 公式によって $\widehat{\mathrm{CH}}^1_{L^1}(Y)$ の元であることがわかる。すると、補題 2.2 によって、(3.2.1) がこの場合にも成り立つ。つまり

定理 3.4. $f : X \to Y$ を正則な算術的多様体の間の射影的な射で、$f_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \to Y_{\mathbb{C}}$ の各ファイバーが、特異点として高々通常 2 重点しかもたない被約連結な曲線とする。(E, h) をエルミートベクトル束とする。このとき $\widehat{\mathrm{CH}}^1_{L^1}(Y)_{\mathbb{Q}}$ において、

$$\widehat{c}_1(\det Rf_*(E), h_Q^{\overline{E}}) - \mathrm{rk}(E)\widehat{c}_1(\det Rf_*(\mathcal{O}_X), h_Q^{\overline{\mathcal{O}_X}}) = f_*\left(\frac{1}{2}(\widehat{c}_1(\overline{E}) - \widehat{c}_1(\overline{E}) \cdot \widehat{c}_1(\omega_{X/Y})) - \widehat{c}_2(\overline{E})\right)$$

が成り立つ。

f が広義有限射のときには、Riemann-Roch は次のようになる。

命題 3.5. $f : X \to Y$ を正則な算術的多様体の間の広義有限射とする。(E, h) をエルミートベクトル束とする。このとき $\widehat{\mathrm{CH}}^1_{L^1}(Y)_{\mathbb{Q}}$ において、

$$\widehat{c}_1(\det Rf_*(E), h_Q^{\overline{E}}) - \mathrm{rk}(E)\widehat{c}_1(\det Rf_*(\mathcal{O}_X), h_Q^{\overline{\mathcal{O}_X}}) = f_*(\widehat{c}_1(E, h))$$

が成り立つ。

4. いくつかの補題

4.1. Analytic torsion の評価. まず Quillen metric などについて簡単に説明したい。詳しくは [2] を参照して下さい。

$f : X \to Y$ を正則な算術的多様体の間の固有射とし、(E, h) を X 上のエルミートベクトル束とする。determinant 直線束は、$\det Rf_*(E) = \otimes_{q \geq 0}(\det R^q f_* E)^{(-1)^q}$ で定義された。$y \in Y(\mathbb{C})$ に対し、$\det Rf_*(E)_y = \otimes_{q \geq 0}(\det H^q(X_y, E))^{(-1)^q}$ である。双対接ベクトル束 $Tf_{\mathbb{C}}$

にエルミート内積 h_f を入れる。すると $A^{0,q}(X_y, E) = C^\infty(X_y, \bigwedge^q(TX_y^*) \otimes E)$ にも、自然に L^2- 内積が入る。

$\Delta_q = \overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}$ を $A^{0,q}(X_y, E)$ 上の Laplace 作用素とする。$H^q(X_y, E) \simeq \mathrm{Ker}(\Delta_q)$ から、$\det Rf_*(E)_y$ に L^2- 内積 h_{L^2} を入れることができた。

$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \ldots$ を Δ_q の（重複度を許した）正の固有値とし、対応する ζ 関数を、

$$\zeta_q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s}$$

とする。(E, h) の analytic torsion $T(E, h)$ は、

$$T(E, h) = \sum (-1)^q q \zeta_q'(0)$$

で定義される。そして $\det Rf_*(E)_y$ に Quillen metric h_Q が、$h_Q = h_{L^2} e^{-T(E,h)}$ で定義される。Quillen metric は、$y \in Y(\mathbb{C})$ に関して滑らかに動くことが、示されている。

[13] と同様にして、次の analytic torsion の漸近的な評価が得られる。

命題 4.1. $U \in \mathbb{C}$ を開単位円板 C をコンパクト Riemann 面、(A, h_A) を C 上のエルミート直線束、(E, h) を C 上の階数が r の平坦なエルミートベクトル束とする。このときある正の定数 c があって、任意の自然数 n について

$$T(\mathrm{Sym}^n(E, h) \otimes (A, h_A)) \leq c n^r \log n$$

が成り立つ。

4.2. L^2-L^∞ **比較.** $U \in \mathbb{C}$ を開単位円板、$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ を U 上正則で $\overline{U}$ 上連続な関数とすれば、

$$\begin{aligned}\iint_{|z|<1} |\phi(z)|^2 dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} |\phi(re^{i\theta})|^2 d\theta \right) r dr \\ &= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} \\ &\leq \pi |a_0|^2 = \pi |\phi(0)|^2.\end{aligned}$$

この不等式は、正則関数について、その原点の値を、L^2- ノルムで評価していると思うことができる。

コンパクトな Kähler 多様体上の、エルミートベクトル束の(巾などの)大域切断について、同様な不等式(L^2-L^∞ 比較)を得ることが、この小節の目標である。一般に L^2- ノルムの方が扱いやすく、このような不等式があれば、L^2- ノルムの上からの評価から sup- ノルムの上からの評価が得られる。

一般に M を d 次元コンパクト Kähler 多様体、Ω を Kähler 形式とする。(E, h) を M 上のエルミートベクトル束、$s \in H^0(M, E)$ を E の M 上の切断とするとき、その sup- ノルムは

$$\|s\|_{\sup} = \sup_{z \in M} \sqrt{h(s,s)(z)},$$

でまた、その L^2- ノルムは

$$\|s\|_{L^2} = \int_M h(s,s)\Omega^d$$

で定義された。

次の評価は Gromov によるものである。詳しくは [3]、[6] または [9] を参照して下さい。

命題 4.2. M を d 次元コンパクト Kähler 多様体、(V, k) を M 上のエルミート直線束とする。このとき、ある正の定数 C があって、任意の自然数 n と、M 上の任意の切断 $s \in H^0(M, V^{\otimes n})$ について、

$$\|s\|_{\sup} \leq Cn^d \|s\|_{L^2}$$

が成り立つ。

評価が、n に関して、多項式のオーダーになっているところが、大事なところである(安易にすると、n に関して指数関数のオーダーの評価になってしまう)。

証明は、この節の最初のように劣調和関数であることを用いる。但し、l を L の局所基底として、$H = h(l,l)$ は劣調和関数ではないので、ある定数 c_1 があって、$H(z) \geq H(0) - c_1(|z_1| + \cdots + |z_d|) \geq 0$ $(z \in U)$ という様な評価を用いる。

上の L^2-L^∞ 比較のいろいろな変種を考えることができるが、その一つとして、

命題 4.3. M を d 次元コンパクトケーラー多様体、(A, h_A) を M 上のエルミート直線束、(E, h) を M 上の階数が r の平坦なエルミートベクトル束とする。このときある正の定数 C があって、任意の自然数 n と、M 上の任意の切断 $s \in H^0(M, \mathrm{Sym}^n(E) \otimes A)$ について、

$$\|s\|_{\sup} \leq C n^{d+r-1} \|s\|_{L^2}$$

が成り立つ。

証明は、$P = \mathbb{P}(E) \to X$ として、P と $\mathcal{O}_P(1)$ に対する L^2-L^∞ 比較から導く。

5. 定理とその証明の概略

定理 5.1. $f : X \to Y$ を正則な算術的多様体の間の射影的な射で、$f_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \to Y_{\mathbb{C}}$ の各ファイバーが、特異点として高々通常2重点しかもたない被約連結な曲線とする。(E, h) を X 上の階数が r のエルミートベクトル束とする。y を $Y(\mathbb{Q})$ の点とする。このとき、f が y でスムーズで、$E|_{X_y}$ が poly-stable であれば、$\widehat{\mathrm{dis}}_{X/Y}(E) = f_*(2r\widehat{c}_2(E) - (r-1)\widehat{c}_1(E)^2)$ は y で weakly positive である。

証明のあらすじを述べる。

(1) まず、h が $f_{\mathbb{C}}^{-1}(z)$ $(z \in S)$ に沿って、Einstein-Hermitian の場合に帰着させる。

(2) $\overline{A} = (A, h_A)$ を X 上のエルミート直線束、$\overline{H} = (H, h_H)$ を Y 上のエルミート直線束とし（$\overline{A}$、$\overline{H}$ が満たす条件はあとで書く）、

$$\begin{aligned}\overline{F_n} &= \mathrm{Sym}^n(\overline{F} \otimes f^*(\overline{H})) \otimes \overline{A} \otimes f^*(\overline{H}) \\ &= (\mathrm{Sym}^n(F \otimes f^*(H)) \otimes A \otimes f^*(H), k_n)\end{aligned}$$

とおく。但し、$(F, h_F) = (E \otimes E^\vee, h \otimes h^\vee)$ 。

(3) $\overline{F_n} = (F_n, h_n)$ に、算術的 Riemann-Roch（系 3.4）を適用する：$\widehat{\mathrm{CH}}_{L^1}(Y)_{\mathbb{Q}}$ において、

$$\begin{aligned}&- \widehat{c}_1(\det Rf_*(F_n), h_Q^{\overline{F_n}}) + \mathrm{rk}(F_n)\widehat{c}_1(\det Rf_*(\mathcal{O}_X), h_Q^{\overline{\mathcal{O}_X}}) \\ &\qquad = -f_*\left(\frac{1}{2}(\widehat{c}_1(\overline{F_n}) - \widehat{c}_1(\overline{F_n}) \cdot \widehat{c}_1(\omega_{X/Y})) - \widehat{c}_2(\overline{F_n})\right)\end{aligned}$$

(4) 例 2.3 から、右辺は、$\frac{1}{(r^2+1)!}\widehat{\mathrm{dis}}_{X/Y}(\overline{E})n^{r^2+1} + O(n^{r^2})$ がでる。

(5) 左辺について、第 2 項は $O(n^{r^2})$ である。第 1 項の $-\widehat{c}_1(\det Rf_*(F_n), h_Q^{\overline{F_n}})$ について評価しよう。A を十分豊富、$A \otimes \omega_{X/Y}^{-1}$ を豊富になるように、A をとっておく。$B \in |A^{\otimes 2}|$ を、B が正則で、$g = f|_B : B \to Y$ が、y で étale になっているようにとる（正確には、一般には、このような B はとれないので少し修正がいる）。$\overline{G_n} = \overline{F_n}|_B$、$g = f|_B$ とおく。

$0 \to F_n \otimes A^{\otimes -2} \to F_n \to G_n \to 0$ から導かれる完全列

$$0 \to f_*(F_n) \to g_*(G_n) \to R^1 f_*(F_n \otimes A^{\otimes -2})$$

を考え、

$$0 \to f_*(F_n) \to g_*(G_n) \to Q_n \to 0$$

を最初の短完全列とする。

$g_*(G_n)$ には、L^2-metric g_n が入っている。各 $y' \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \cdot y$ の周りで、Q_n に $g_*(G_n)$ から quotient metric を入れることができる。$\det Q_n$ に Y 上の metric q_n を、y' の周りでこの quotient metric と両立するように入れる。

さて、

$$\det Rf_*(F_n)^{\otimes -1} = (\det g_*(G_n))^{\otimes -1} \otimes \det Q_n \otimes \det R^1 f_*(F_n)$$

より、$\det R^1 f_*(F_n)$ に generalized metric t_n を

$$(\det Rf_*(F_n)^{\otimes -1}, h_n^{-1}) = (\det g_*(G_n), g_n)^{\otimes -1} \otimes (\det Q_n, q_n) \otimes (\det R^1 f_*(F_n), t_n)$$

が成り立つように定める。

(5-1) 広義有限射に対する、算術的 Riemann-Roch（系 3.5）を用いることによって、

$$\widehat{c}_1(\det g_*(G_n), g_n) = O(n^{r^2})$$

がでる。

(5-2) $\overline{H}$ を、$g_*(\overline{F}|_B) \otimes \overline{H}$ と $g_*(\overline{A}|_B) \otimes \overline{H}$ が generated by small sections at y になるように取っておけば、$g_*(G_n)$ が generated by small sections at y となる。これから、$(\det Q_n, q_n)$

も generated by small sections at y となる。とくに $(\det Q_n, q_n)$ は、semi-ample at y である。

(5-3) s_n を $\det R^1 f_*(F_n)$ の canonical な切断として、$a_n = \max_{y' \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\cdot y}\{\log t_n(s_n, s_n)(y')\}$ とおけば、補題 4.1、4.2 から $a_n \le O(n^{r^2} \log n)$ が示される。

(5-1)、(5-2) と (5-3) から、大まかにいって (3) の左辺は、semi-ample なものと、$o(n^{r^2+1})$ なものの和で書けることがわかる。 □

References

[1] J.-M. Bismut and J.-B. Bost, *Fibré déterminants, métriques de Quillen et dégénérescence des courbes*, Acta Math. **165** (1990), 1-103

[2] J.-M. Bismut, H. Gillet and C. Soulé, *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles I*, Comm. Math. Physics. **115** (1988), 49-78

[3] H. Gillet and C. Soulé, *Amplitude arithmétique*, C. R. Acad. Sci. Paris **307** Série I (1988), 887-890

[4] H. Gillet and C. Soulé, *Arithmetic intersection theory*, Publ. Math. IHES **72** (1990), 94-172

[5] H. Gillet and C. Soulé, *Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metric I, II*, Annals of Math. **131** (1990), 163-203

[6] H. Gillet and C. Soulé, *An arithmetic Riemann-Roch Theorem*, Invent.Math. **110** (1992), 473-543

[7] S. Kawaguchi and A. Moriwaki, *Relative Bogomolov's inequality in the arithmetic case*, preprint

[8] Y. Miyaoka, *Bogomolov inequality on arithmetic surfaces*, talk at the Oberwolfach conference on "Arithmetical Algebraic Geometry". G. Harder and N. Katz org., (1988)

[9] A. Moriwaki, *Inequality of Bogomolov-Gieseker's type on arithmetic surfaces*, Duke Math. Journal **74** (1994), 713-761

[10] A. Moriwaki, *Arithmetic Bogomolov-Gieseker's inequality*, Amer J. Math. **117** (1995), 1325-1347

[11] A. Moriwaki, *Relative Bogomolov's inequality*, preprint

[12] C. Soulé, D. Abramovich, J.-F. Burnol, J. Kramer, *Lectures on Arakelov geometry*, Cambridge studies in advanced mathematics **33** (1992)

[13] P. Vojta, *Siegel's Theorem in the compact case*, Ann. of Math. **133** (1991), 509-548

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University, Kyoto, 606-01, Japan