代数幾何学シンポジウム記録
1997年度　pp.1-9

超平面配置と超幾何積分

寺尾宏明（北大・理・数学）

1. はじめに

重み付き超平面配置に付随して、（青本－Gelfand の意味での）超幾何積分が考えられるのであるから、その超平面配置の性質や、その重みたちが、超幾何積分に反映されるのは当然のことである。ここでは、まず、ひとつの固定された重み付き超平面配置を考えた時、その組み合わせ的性質が、どのように超幾何積分に反映されるか、を述べる。特に、ツイストコホモロジーの基底の組み合わせ的記述が中心的な話題になる。次に、組み合わせ的状況の固定されたような超平面配置の族を考えて、退化する超平面配置に対応するモヂュライ空間内の境界点の近くでの超幾何積分の挙動を、超幾何関数の満たす微分方程式を通して、観察したい。それは、n 点の族の場合の Knizhnik-Zamolodchikov 方程式を一般化した微分方程式であり、それが、一般的に、境界上で対数的な極を持つことが示される。ただし、その微分方程式が、重みたちに、具体的にどのように依存しているのかは、まだ完全にはわからない。

2. 定義など

この節では、[AK] や [OT] から必要な定義を述べる。

定義 1． 超平面配置とは、ℓ-次元アファイン空間 $V := \mathbb{C}^\ell$ （$\mathbb{C}$ は、複素数体）の中の有限個のアファイン超平面の族を言う。

今後、n を超平面の個数とする。即ち、超平面配置を $\mathcal{A}$ で表して、$\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ と書いておく。各 i に対して、 H_i が、方程式 $\alpha_i = 0$ で定義されている、とする。（α_i は一次式である。）今、

$$M(\mathcal{A}) = V \setminus \bigcup_{i=1}^{n} H_i$$

とすると、$M(\mathcal{A})$ は、ℓ-次元 Stein 多様体である。$\mathcal{A}$ がはっきりしている時は、$M(\mathcal{A})$ の代わりに、単に M と書く。

定義 2． 超平面配置 $\mathcal{A}$ に対して、 重みとは、$\mathcal{A}$ から、複素数体 $\mathbb{C}$ への写像のことを言う。$\lambda_i = \lambda(H_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ とする。

定義 3． M 上の正則 1 型式 ω_i を

$$\omega_i = d\alpha_i/\alpha_i$$

で定義する $(i=1,\ldots,n)$。$\lambda:\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ を、 超平面配置 $\mathcal{A}$ の重みとして、M 上の正則 1 型式 ω_λ を

$$\omega_\lambda=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\omega_i$$

で定義する。

M 上の正則関数の芽の層を $\mathcal{O}_M$ として、M 上の正則 1 型式の芽の層を ${\Omega^1}_M$ とする。

定義 4． 微分作用素 ∇_λ

$$\nabla_\lambda:\mathcal{O}_M\to\Omega^1_M$$

を、$\nabla_\lambda(f)=df+f\omega_\lambda$ で定義する。また、M 上の階数 1 の局所系 $\mathcal{L}_\lambda$ を

$$\mathcal{L}_\lambda=\ker(\nabla_\lambda)$$

で定義する。層係数コホモロジー群 $H^q(M,\mathcal{L}_\lambda)$ $(q=0,\ldots,\ell)$ は、 M 上の $\mathcal{L}_\lambda$ に係数を持つ <u>ツイストコホモロジー</u> と呼ばれる。

重み λ を、$-\lambda$ で置き換えれば、 $\mathcal{L}_\lambda$ の双対局所系である $\mathcal{L}_{-\lambda}$ を得る。局所系に係数をもつホモロジー群 $H_q(M,\mathcal{L}_{-\lambda})$ $(q=0,\ldots,\ell)$ を考える。$H_q(M,\mathcal{L}_{-\lambda})$ の元は、$\sigma\otimes U_\sigma$ の形の元の $\mathbb{C}$ 上の一次結合として表される。ここで、σ は、M 内の（特異）q-単体、U_σ は

$$U_\lambda:=\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\lambda_i}$$

の σ 上の分枝である。この時、超幾何積分は、局所系に係数をもつホモロジー群 $H_q(M,\mathcal{L}_{-\lambda})$ とツイストコホモロジー群 $H^q(M,\mathcal{L}_\lambda)$ との双線型ペアリング

$$\langle[\sigma\otimes U_\sigma],[\phi]\rangle=\int_\sigma U_\sigma\phi$$

として理解される。但し、ここで、ϕ は、∇_λ-閉な M 上の正則 q 型式である。

定義 5． 複素数体上の有限次元次数付き代数

$$\bigwedge_{\mathbb{C}}(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{C}\omega_i)$$

を、<u>Orlik-Solomon 代数</u> と呼び、$A^{\cdot}(\mathcal{A})$ で表す。

$A^{\cdot}(\mathcal{A})$ は、位相空間 M のコホモロジー環 $H^{\cdot}(M,\mathbb{C})$ と、de Rham 対応によって同型になることが、Orlik-Solomon[OS] により知られている。

定義６． 超平面配置 $\mathcal{A}$ に属するいくつかの超平面の（空でない）共通部分であるような（V の）アファイン部分空間全体の集合を $L(\mathcal{A})$ で表す。$V \in L(\mathcal{A})$ と約束しておく。$L(\mathcal{A})$ に、逆包含関係によって、順序を入れることによって、$L(\mathcal{A})$ は、半順序集合になる。これを、（$\mathcal{A}$ の）交叉半順序集合 と呼ぶ。

3. βnbc 基底

この節では、重み λ が、（SNRC）と呼ばれる一般性条件を満たすとき、$H^q(M, \mathcal{L}_\lambda)$ $(q = 0, \ldots, \ell)$ を調べて、その基底を選ぶ。

$X \in L(\mathcal{A})$ に対して、$\mathcal{A}$ の部分集合 $\mathcal{A}_X$ を、$\mathcal{A}_X = \{H \in \mathcal{A} \mid X \subseteq H\}$ で定義する。

定義７． $X \in L(\mathcal{A})$ が、濃密 であるとは、$\mathcal{A}_X$ が、ふたつの空でない超平面配置の積になっていないことを言う。

定義８． $V = \mathbb{C}^\ell$ に、無限遠超平面 $\overline{H}_\infty$ を付加して、複素射影空間 $\mathbb{CP}^\ell$ にする。複素射影空間内の超平面配置 $\mathcal{A}_\infty$ を、

$$\mathcal{A}_\infty = \{\overline{H}_1, \overline{H}_2, \ldots, \overline{H}_n, \overline{H}_\infty\}$$

で定義する。但し、$\overline{H}_i$ は、H_i $(1 \le i \le n)$ の射影閉包である。この超平面配置 $\mathcal{A}_\infty$ を、$\mathcal{A}$ の 射影閉包 という。$\mathcal{A}_\infty$ に属するいくつかの超平面の（空でない）共通部分であるような（$\mathbb{CP}^\ell$ の）射影線形部分空間全体の集合を $L(\mathcal{A}_\infty)$ で表す。$\mathbb{CP}^\ell \in L(\mathcal{A}_\infty)$ と約束しておく。$(\mathcal{A}, \lambda)$ が、重み付き超平面配置であるとき、λ を、$\lambda(\overline{H}_\infty) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i$ で定義して、λ を $\mathcal{A}_\infty$ に拡張しておく。

定義９． $\mathbb{CP}^\ell$ の標準的なアファイン被覆 $U_0, U_1, \ldots, U_\ell$ をとる。それらのどれもが、$\mathbb{C}^\ell$ と同相である。$\mathcal{A}_i$ $(0 \le i \le \ell)$ を $U_i \simeq \mathbb{C}^\ell$ に、$\mathcal{A}$ を制限してできた超平面配置とする。$X \in L(\mathcal{A}_\infty)$ が、濃密 であるとは、$X \cap U_i$ が $\mathcal{A}_i$ の中で濃密であることをいう $(0 \le i \le \ell, X \cap U_i \ne \emptyset)$.

定義１０． 重み付き超平面配置 $(\mathcal{A}, \lambda)$ が、（SNRC）（＝強非共鳴条件）を満たすとは、すべての濃密な $X \in L(\mathcal{A}_\infty)$ に対して、

$$\sum_{X \subseteq \overline{H}_i} \lambda_i \notin \mathbb{Z}_{\ge 0}$$

が成り立っていることをいう。

$A^\cdot$ を $\mathcal{A}$ の Orlik-Solomon 代数として、写像

$$\omega_\lambda \wedge : A^p \to A^{p+1}$$

が、$\eta \mapsto \omega_\lambda \wedge \eta$ $(\eta \in A^p)$ で定義されている。すると、$(A^\cdot, \omega_\lambda \wedge)$ は、コチェイン複体になる。

定理11. (Esnault-Schechtman-Viehweg [ESV], Schechtman-Terao-Varchenko [STV]) de Rham 対応

$$H^q(A^{\cdot}, \omega_\lambda \wedge) \to H^q(M, \mathcal{L}_\lambda)$$

は、重み付き超平面配置 $(\mathcal{A}, \lambda)$ が (SNRC) を満たす時には同型写像になる。

従って、(SNRC) が満たされている時には、ツイストコホモロジー $H^q(M, \mathcal{L}_\lambda)$ を研究するには、$H^q(A^{\cdot}, \omega_\lambda \wedge)$ を研究すればよい。そのために次の単体的複体を考える。

定義12. $\mathcal{A}$ の部分集合 $\{H_i\}_{i\in J}$ が一次従属であるとは、$\cap_{i\in J} H_i \neq \emptyset$ であって、かつ、$\mathrm{codim}(\cap_{i\in J} H_i) < |J|$ が成立していることを言う。

k 個組 $S = (H_{i_1}, \cdots, H_{i_k})$ が 回路 であるとは、$(H_{i_1}, \cdots, H_{i_k})$ が一次従属であるが、どの p, $1 \leq p \leq k$, についても $(k-1)$ 個組 $(H_{i_1}, \cdots, \widehat{H_{i_p}}, \cdots, H_{i_k})$ が、一次従属にならないものを言う。

k 個組 $S = (H_{i_1}, \cdots, H_{i_k})$ $(i_1 < \cdots < i_k)$ が 破れ回路 であるとは、$(H_i, H_{i_1}, \cdots, H_{i_k})$ が回路であるような $H_i \in \mathcal{A}, i < i_1$, が存在することを言う。

$\mathcal{A}$ の部分集合のうち、破れ回路を含まないようなもの全体を、nbc で表すと、nbc は、単体的複体になる。これを、破れ回路なし複体 と呼ぶ。

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ をしばらく変数とみなす。$\mathbb{C}[\lambda]$ は、n 変数多項式環である。今、T を、$\{\sum_{X\subseteq \overline{H}_i} \lambda_i \mid X \in L(\mathcal{A}_\infty)$ は濃密 $\}$ で生成される積閉集合とする。

$$R = \mathbb{C}[\lambda]_T$$

を、$\mathbb{C}[\lambda]$ の T による商環とする。

定理13. $C^{\cdot}(nbc, R)$ を、単体的複体 nbc の R に係数をもつ被約コチェイン複体とする ($C^{-1}(nbc, R) = R$)。そのとき、写像

$$F : C^{\cdot -1}(nbc, R) \to (A^{\cdot} \otimes R, \omega_\lambda \wedge)$$

が、$F(\alpha) = \sum_{S\in nbc} \alpha(S)\Xi(S)$ で定義されるが、F は、コチェイン複体としての同型写像になる。 但し、

$$S = (H_{i_1}, \cdots, H_{i_p}) \in nbc\ (i_1 < \cdots i_p),$$

$$X_j = H_{i_j} \cap \cdots \cap H_{i_p}\ (j = 1, \ldots, p),\ \omega_\lambda(X) = \sum_{X\subseteq H_i} \lambda_i \omega_i$$

$$\Xi(S) = \omega_\lambda(X_1) \wedge \cdots \wedge \omega_\lambda(X_p)$$

である。

以下、最後まで、$L(\mathcal{A})$ は、0次元部分空間（点）を含むと仮定する。組み合せ論において、次のふたつの重要な結果がある。

定理１４．（Wachs-Walker[WW]）$\beta = |\chi(M)|$ とする。(χ は、Euler 標数）そのとき、nbc は、$(\ell-1)$-次元球面の β 個のブーケとホモトピー同値である。

定理１５．（Ziegler [Zi]）$H^{\ell-1}(nbc, \mathbb{Z})$ は、β-次元であって、$\{\delta_S \mid S \in \beta nbc\}$ から決まる基底を持つ。但し、δ_S は、$(\ell-1)$-単体 S 上で 1, 他の単体上で 0 の値をとる $(\ell-1)$-コチェインである。また、βnbc は、nbc の部分集合であって、$S = (H_{i_1}, \cdots, H_{i_\ell}) \in nbc$ $(i_1 < \cdots i_\ell)$ が、βnbc に属するための条件は、すべての i_j $(j = 1, \ldots, \ell)$ に対して、ある $k, k < i_j$, が存在して、

$$H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_j-1} \cap H_k \cap H_{i_j+1} \cap \cdots H_{i_\ell}$$

が、0次元部分空間（点）になることである。

定理１１、１３と１５から、次の定理を得る。

定理１６．（Falk-Terao [FT]）重み付き超平面配置 $(\mathcal{A}, \lambda)$ が (SNRC) を満たす時には、$\{\Xi(S) \mid S \in \beta nbc\}$ が $H^\ell(M, \mathcal{L}_\lambda)$ の基底を与える。（この基底を βnbc 基底と呼ぶ。）

例１．$\mathcal{A}$が一般の位置にある超平面配置とする。即ち、$\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_n\}$ のどの ℓ 個の超平面の共通部分も１点であり、かつ、どの $(\ell+1)$ 個の超平面の共通部分も空集合である。このとき、

$$\beta = \binom{n-1}{\ell}, \ \beta nbc = \{(H_{i_1}, \ldots, H_{i_\ell}) \mid 1 < i_1 < \cdots < i_\ell \leq n\},$$

$$\Xi(H_{i_1}, \ldots, H_{i_\ell}) = (\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_\ell})(\omega_{i_1} \cdots \omega_{i_\ell}) \ (1 < i_1 < \cdots < i_\ell \leq n).$$

(SNRC) は、「$\lambda_i \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}, \ -\sum_{i=1}^n \lambda_i \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$」である。

例２．$\ell = 2, n = 4$ とする。

$$H_1 = \{u_1 = 0\}, H_2 = \{u_2 = 0\}, H_3 = \{u_1 + u_2 = 0\},$$

$$H_4 = \{u_1 + u_2 + u_3 + 1 = 0\},$$

の場合、$\beta nbc = \{(H_2, H_4), (H_3, H_4)\}$ である。また、

$$\Xi(H_2, H_4) = (\lambda_2\lambda_4)(\omega_2\omega_4), \ \Xi(H_3, H_4) = (\lambda_3\lambda_4)(\omega_3\omega_4)$$

である。この場合の (SNRC) は、「$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}, \ \lambda_i \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(i = 1, 2, 3, 4), \ -\sum_{i=1}^4 \lambda_i \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$」である。

注．この βnbc 基底を用いることによって、超幾何周期行列式についての明示的な公式（Varchenko 予想 [V1]）が証明される ([DT]).

4. 対数的接続

ここまでは、ひとつの固定された超平面配置を考えてきたが、この節では、超平面配置の族を考える。$\{\mathcal{A}_t\}$ を、$t \in \mathbb{C}^m$ に多項式に依存する $\mathbb{C}^\ell$ 内の超平面配置の族とする。$\mathcal{A}_t = \{H_1(t), \ldots, H_n(t)\}$ とする。

定義１７． B は、$\mathbb{C}^m$ の連結（Zariski）局所閉集合（特異点があってもよい）とする。$\{\mathcal{A}_t\}_{t\in B}$ が、組み合わせ同値な族であるとは、$H_i(s)$ に $H_i(t)$ $(s, t \in B)$ を対応させる対応が

$$L((\mathcal{A}_s)_\infty) \simeq L((\mathcal{A}_t)_\infty)$$

なる半順序同型を与える、ことをいう。

以下、定義１７を満たすような B を固定する。また、

$$\mathcal{M} = (\mathbb{C}^\ell \times B) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} H_i(t)$$

として、

$$\pi : \mathcal{M} \to B$$

を標準射影とする。また、

$$\mathcal{M}_t = \pi^{-1}(t) \; (t \in B)$$

とする。この仮定の下で、

定理１８．（Randell [R]）
(1) $\mathcal{M}_s$ と $\mathcal{M}_t$ $(s, t \in B)$ は、位相同型である。
(2) $\pi : \mathcal{M} \to B$ は、ファイブレーションである。

$s \in B$ とする。λ_s を、$\mathcal{A}_s$ の重みで、(SNRC) を満たすとする。以下、$\lambda_s(H_i(t))$ が、$t \in B$ によらないことを仮定して、$\lambda_i = \lambda_s(H_i(t))$ $(i = 1, \ldots, n)$ とおく。定理１８より、B 上のふたつの局所系

$$\mathcal{H}_\ell = \bigcup H_\ell(\mathcal{M}_t, \mathcal{L}_{-\lambda_t}),\; \mathcal{H}^\ell = \bigcup H^\ell(\mathcal{M}_t, \mathcal{L}_{\lambda_t})$$

を考える。両者とも、階数が $\beta = |\chi(\mathcal{M}_s)|$ の局所系である。βnbc 基底は組み合わせ的に定義されているので、$\mathcal{H}^\ell$ の大域切断を与え、大域的基底を与える。即ち、

定理１９． 局所系 $\mathcal{H}^\ell$ は、大域自明な局所系である。

$\mathcal{H}^\ell$ の βnbc 基底を $\{\phi_1(t), \ldots, \phi_\beta(t)\}$ とすると、これによって、

$$\gamma : \mathcal{H}_\ell \otimes \mathcal{O}_B \simeq \mathcal{O}_B^\beta$$

なる同型を得る。具体的には、

$$\gamma(\sigma(t) \otimes 1) := [\langle \sigma(t), \phi_1(t) \rangle, \ldots, \langle \sigma(t), \phi_\beta(t) \rangle]^t$$

で与えられる。$\gamma(\sigma(t)\otimes 1)$ の各成分は超幾何積分である。さて、$\mathcal{O}_B^\beta$ 上の接続 ∇_B であって、$\ker(\nabla_B)=\gamma(\mathcal{H}_\ell)\subset\mathcal{O}_B^\beta$ となるような ∇_B を研究したい。即ち、微分方程式 $\nabla_B\mathbf{f}=0$ ($\mathbf{f}\in\mathcal{O}_B^\beta$) の解空間が β 次元であって、$\gamma(\mathcal{H}_\ell)$ に等しい。$\nabla_B=d+\Omega_B$ (Ω_B は、$\beta\times\beta$-行列) と書いておくと、一般的位置にある超平面配置の場合の [AK] にならった計算によって、次の結果を得る。

定理２０． 勝手な組み合わせ的同値な族に対して、行列 Ω_B は、退化した超平面配置の集合に対応した B の境界点のなす因子 $\{\Delta_S=0\}$ の上で対数的極を持ち、

$$\Omega_B=\sum_S\Omega_S(\lambda)d\log\Delta_S$$

と表示される。ここで、係数行列 $\Omega_S(\lambda)$ の成分は、$R=\mathbb{C}[\lambda]_T$ に属する。

注. $\Omega_S(\lambda)$ の具体形については、いくつかの個別例以外には、あまりわからない。

例３．

$$\mathcal{M}=\{(u,t_1,\dots,t_n)\mid\prod_{i=1}^n(u-t_i)\prod_{1\le i<j\le n}(t_i-t_j)\ne 0\},$$

$$B=\{(t_1,\dots,t_n)\mid\prod_{1\le i<j\le n}(t_i-t_j)\ne 0\}$$

とすると、$\pi:\mathcal{M}\to B,\pi(u,t_1,\dots,t_n)=(t_1,\dots,t_n),$ は、$\mathbb{C}$ 内の n 点の作る超平面配置の組み合わせ的同値な族である。このとき、$H_i=\{u=t_i\ (i=1,\dots,n)\}$ とする。

$$\beta nbc=\{(H_2),\dots,(H_n)\},$$

$$\Omega_B=\sum_{1\le i<j\le n}\Omega_{ij}d\log(t_i-t_j)+\sum_{1<i\le n}\Omega_{1i}d\log(t_1-t_i)$$

と書くと、$\Omega_{ij}(1<i<j\le n)$ の (p,q)-成分は、

$$\lambda_i(p=j,q=j\text{ の場合}),\ -\lambda_i(p=i,q=j\text{ の場合}),$$
$$\lambda_j(p=i,q=i\text{ の場合}),\ -\lambda_j(p=j,q=i\text{ の場合}),$$
$$0(\text{その他の場合})$$

に等しい。また、$\Omega_{1i}(1<i\le n)$ の (p,q)-成分は、

$$\lambda_1+\lambda_i(p=i,q=i\text{ の場合}),\ \lambda_i(p=i,q\ne i\text{ の場合}),\ 0(\text{その他の場合})$$

に等しい。行列 $\Omega_{ij}(1<i<j\le n)$ は、Jordan-Pochhammer 行列と呼ばれる。微分方程式 $\nabla_B\mathbf{f}=0$ は、Knizhnik-Zamolodchikov 方程式の一例になっている。また、この接続が平坦なので、$\Omega_B\wedge\Omega_B=0$ なる方程式が成立する。

例4．$\ell = 2, n = 4$ とする。

$$H_1 = \{u_1 = 0\}, H_2 = \{u_2 = 0\}, H_3 = \{u_1 + u_2 = 0\},$$

$$H_4 = \{u_1 + u_2 + u_3 + 1 = 0\},$$

と組み合わせ的同値な超平面配置すべてから成る族を考える。このとき、$\beta nbc = \{(H_2, H_4), (H_3, H_4)\}$ である。この場合の接続行列 Ω_B の係数行列は、

$$\Omega_{124} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{134} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{234} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \begin{pmatrix} \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_3 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{12} = \frac{\lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \begin{pmatrix} -\lambda_1 - \lambda_2 & -\lambda_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{13} = \frac{\lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\lambda_3 & -\lambda_1 - \lambda_3 \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{14} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 & -\lambda_2 \\ -\lambda_3 & -\lambda_3 \end{pmatrix}, \ \Omega_{23} = \frac{\lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \begin{pmatrix} -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{24} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 - \lambda_3 & 0 \\ \lambda_3 & 0 \end{pmatrix}, \ \Omega_{34} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ 0 & -\lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

References

[AK] 青本和彦－喜多通武: 超幾何関数論, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1994

[DT] Douai, A., Terao, H.: The determinant of a hypergeometric period matrix. Inventiones Math., **128**, 417-436 (1997)

[ESV] Esnault, H., Schechtman, V., Viehweg, E.: Cohomology of local systems of the complement of hyperplanes. Invent. math. **109** (1992) 557-561; Erratum, ibid. **112** (1993) 447

[FT] Falk, M., Terao, H.: βNBC-bases for cohomology of local systems on hyperplane complements. Trans. AMS, **349** (1997) 189–202

[OS] Orlik, P., Solomon, L.: Combinatorics and topology of complements of hyperplanes. Invent. math. **56** (1980) 167–189

[OT] Orlik, P., Terao, H.: Arrangements of Hyperplanes. Grundlehren der Math. Wiss. **300**, Springer Verlag, 1992

[R] Randell, R.: Lattice-isotropic arrangements are topologically isomorphic. Proc. AMS, **107** (1989) 555–559

[STV] Schechtman, V., Terao, H., Varchenko, A.: Local systems over complements of hyperplanes and the Kac-Kazhdan conditions for singular vectors. J. Pure Appl. Algebra **100** (1995) 93–102

[SV] Schechtman, V. V., Varchenko, A. N.: Arrangements of hyperplanes and Lie algebra homology. Invent. math. **106** (1991) 139–194

[V1] Varchenko, A.N.: The Euler beta-function, the Vandermonde determinant, Legendre's equation, and ciritical values of linear functions on a configuration of hyperplanes, I. Math. Ussr Izvestiya **35** (1990) 543-571, II. Math. Ussr Izvestiya **36** (1991) 155-167

[V2] Varchenko, A.N.: Multidimensional hypergeometric functions and representation theory of Lie groups. Advanced Studies in Math. Physics **21** World Scientific Publishers 1995

[WW] Wachs, M. L., Walker, J. W.: On geometric semilattices. Order **2** (1986) 367–385

[Zi] Ziegler, G.: Matroid shellability, β–systems, and affine arrangements. J. Alg. Combinatorics **1** (1992) 283–300