代数幾何学シンポジウム記録
1998年度 pp.56-64

CONVOLUTION THEOREM FOR COMPOSITE SINGULARITIES

寺杣 友秀

東京大学数理科学研究科

§0 Introduction

n を自然数として $f = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ $\mathbf{C}^n$上の 0 における正則関数の芽とする。すなわち ϵ を十分小さい正数とすると原点の近傍 $B(x) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^n \mid |x_i| < \epsilon\}$ において f は定義されている。さらに δ を十分小さくとることにより $f : B(x) \to \mathbf{C}$ の $f^{-1}(B^0(s))$ への制限は $B^0(s)$ 上の fiber bundle となる。f の十分小さい δ における fiber は Milnor fiber とよばれる。ここで $B^0(s) = \{s \in \mathbf{C} \mid 0 < |s| < \delta\}$ である。このとき monodromy 表現により$\pi_1(B^0(s)) = \pi_1(B^0(s), \delta)$ が $H^i(f^{-1}(\delta), \mathbf{Q})$ に作用する。以下記号の簡略化のため $f : B(x) \to B(t)$ と書くことにして、f を local morphism ということにする。f が isolated singularity をもつとき $i \neq 0, n-1$ に対して $H^i(f^{-1}(\delta), \mathbf{Q}) = 0$ となる。この報告のテーマである convolution theorem の一番典型的な例である Thom-Sebastaini の定理についてのべることにしよう。m を自然数として $g = g(y)$ を正則関数の芽とする。g も同様に $B^0(t)$ 上の fiber bundle $g^{-1}(B^0(t)) \to B^0(t)$ をさだめる。f と g がともに isolated singularity をもてば $u = f + g$ も isolated singularity をもつことが容易にわかる。γ_f , γ_g, γ_{f+g} を$\pi_1(B^0(s))$, $\pi_1(B^0(t))$, $\pi_1(B^0(u))$ の canonical generator の $H^{n+m-1}((f+g)^{-1}(\delta), \mathbf{Q})$, $H^{n-1}(f^{-1}(\delta), \mathbf{Q})$, $H^{m-1}(g^{-1}(\delta), \mathbf{Q})$ への monodromy 作用とする。Thom-Sebastiani の定理はこのとき次のように述べられる。

定理 **(Thom-Sebastiani).**

$$H^{n+m-1}((f+g)^{-1}(\delta), \mathbf{Q}) \simeq H^{n-1}(f^{-1}(\delta), \mathbf{Q}) \otimes H^{m-1}(g^{-1}(\delta), \mathbf{Q})$$

なる同型があって、この同型によりγ_{f+g}は$\gamma_f \otimes \gamma_g$に対応する。

Steenbrink [St] により Hodge analog が考えられ、さらにその予想は Varchenko [V], M.Saito [S], Denef-Loeser [D-L] らにより証明された。Varchenko は isolated singularity をもつ関数の芽に対して Ocillatory integral の漸近挙動と Hodge 構造の関係を考察することによりしめされた。Denef-Loeser はさらにその考えを押しすすめ、Thom-Sebasitani の定理の Motif version というべきものを定義し、証明を与えた。斎藤盛彦氏は Hodge Module の理論をもとにこの予想の証明を与えた。

まずこの予想を定式化する前に Milnor fiber の cohomology にはいる Mixed Hodge structure およびその上に作用する monodromy action に関する事実を簡単に復習しておこう。まず Steenbrink により $H^{n-1}(f^{-1}(\delta), \mathbf{Q})$ 上には mixed Hodge strucutre が自然に定義されることが知られている。この時、monodromy による作用は mixed Hodge structure を保ち、quasi-unipotent, すなわち、$\pi_1(B^0(t))$ の canonical generator γの

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

ある整数乗γ^mは unipotent に作用する。このような性質をみたす m の最小をこの特異点の exponent という。m をこの特異点の exponent とすると、$N = \frac{1}{m}\exp(\gamma^m)$ は $H^{n-1}(f^{-1}(\delta), \mathbf{Q})$ に作用する nilponent な作用となっているので、この N に対する monodromy filtrationW_kを定義することができる。このとき $Gr_k^W(H^{n-1}(f^{-1}(\delta), \mathbf{Q}))$ はγが有限群で作用する pure Hodge structure となる。いま有限群μ_mの作用する pure Hodge structure のなす Grothendieck 群を $K_{MH}(\mathbf{C}, \mu_m)$ と書くと $[H^{n-1}(f^{-1}(\delta), \mathbf{Q})] = \sum_k [Gr_k^W(H^{n-1}(f^{-1}(\delta), \mathbf{Q}))]$ を $K_{MH}(\mathbf{C}, \mu_m)$ の元として定義する事ができる。いま $K_{MH}(\mathbf{C}, \mu_m)$ の元 V のμ_mの作用による不変部分及びその補空間に対応する部分をそれぞれ V_1,$V_{\neq 1}$とおく。特異点の Hodge structure に関する復習はこの位にして、Thom-Sebastiani の定理の状況にもどろう。いま d_1,d_2を正則関数の芽 f,g の exponent として m をその最小公倍数とする。この時 2 変数関数の germ$\sigma^{d_1} + \tau^{d_2}$の Milnor fiber $\{\sigma^{d_1} + \tau^{d_2} = \delta\}$ には$\mu_{d_1} \times \mu_{d_2} \times \pi_1(B(u) - \{0\}, \delta)$ が作用する。$\pi_1(B(u) - \{0\}, \delta)$ の作用の exponent は m になることがわかるので $V(d_1, d_2) = [H^1(\{\sigma^{d_1} + \tau^{d_2} = \delta\}, \mathbf{Q})]$ は $K_{MH}(\mathbf{C}, \mu_{d_1} \times \mu_{d_2} \times \mu_m)$ の元として定まる。Thom-Sebastiani の定理の Hodge analog は次のように述べられる。

Theorem 0 ([V], [S], [D-L]). 上の *notation* のもとで等式

$$\begin{aligned}
&[H^{n+m-1}((f+g)^{-1}(\delta), \mathbf{Q})] \\
=& -([V(d_1, d_2)] \otimes [H^{n-1}(f^{-1}(\delta), \mathbf{Q})] \otimes [H^{m-1}(g^{-1}(\delta), \mathbf{Q})])^{\mu_{d_1} \times \mu_{d_2}} \\
&+ [H^{n-1}(f^{-1}(\delta), \mathbf{Q})(\chi_1)]_{\neq 1} \otimes [H^{m-1}(g^{-1}(\delta), \mathbf{Q})(\chi_2)]_{\neq 1} \\
&- [H^{n-1}(f^{-1}(\delta), \mathbf{Q})(\chi_1)] \otimes [H^{m-1}(g^{-1}(\delta), \mathbf{Q})(\chi_2)]
\end{aligned}$$

が $K_{MH}(\mathbf{C}, \mu_m)$ で成り立つ。

さてこの定理は Nemethi-Steenbrink [N-S] により次のように一般化された。$h(s,t)$ を isolated singularity をもつ2変数関数の germ とする。この時$(f,g) : B(x) \times B(y) \to B(s) \times B(t)$ と $h : B(s) \times B(t) \to B(u)$ の合成 $h \circ (f,g)$ は再び singularity をもつ。ただし isolated とは限らない。このような singularit を composite singularity という。この時も Milnor fiber の cohomology の交替和として $[H^*((h \circ (f,g))^{-1}(\delta), \mathbf{Q})]$ が $K_{MH}(\mathbf{C}, \mu_m)$ の元として定まる。これが $[H^{n-1}(f^{-1}(\delta), \mathbf{Q})]$, $[H^{m-1}(g^{-1}(\delta), \mathbf{Q})]$ および $[H^1(h^{-1}(\delta), \mathbf{Q})]$ を使って計算された。

われわれはこれを多変数の時に拡張する結果を得たのでこれを報告する。これから考える状況は以下の如くである。n を 1 より大きい自然数として $g_i(y_i) = g_i(y_{i1}, \ldots, y_{im_i})$ $(1 \leq i \leq n)$ を m_i変数の正則関数の芽とする。$x_i = g_i(y_i)$ とすることにより局所射 $g_i : B(y_i) \to B(x_i)$ が定まる。さらに f を $B(x) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid |x_i| < \delta \ (1 \leq i \leq n)\}$ 上の関数の芽で更に Newton boundary に関して非退化とする。この時 composite singularity $f(g_1(y_1), \ldots, g_n(y_n))$ の spectral pair は $g_1, \ldots, g_n$ と f の spectral pair によって計算される (Theorem 3)。これらの公式については l 進類似 (Theorem 2) が考えられるが、じつは l 進類似の方が証明は Leray の Spectral sequence から直接わかるのでやさしい。Hodge 理論のほうはそう直接的ではないので、ある程度考察を要する。そのためにこの問題に関して安定な frame work を定義する。§1, 2 は l 進 analog について、§3 は Hodge analog につて述べる。

§1 l-ADIC ANALOG

k を有限体 $\mathbf{F}_q$、d を $d \mid q-1$ なる整数とする。$B^0(x) = Spec(k((x)))$ 上の etale sheaf で innertia group が高々exponent d なる quasi unipotent に作用するもののな

す Grothendieck 群を $K(B^0(x))^{t,d}$と書く。γを innertia group の tame quotient の topological generator とするとγ^dは unilpoltent な作用となるので、$N = \frac{1}{d}\exp(\gamma^d)$ は nipotent endomorphism を与える。$NW_k(F_{\bar{x}}) \subset W_{k-2}(F_{\bar{x}})$ となる filtration で

$$k \text{ 個の } N \text{ の合成 } N^k : Gr_k^W(F_{\bar{x}}) \to Gr_{-k}^W(F_{\bar{x}}) \text{ は同型を誘導する。}$$

という条件を満たすものが唯一つ存在するのでこれを monodromy filtration といい、W_kと書く。この filtration に関して associate graded module を考えると innertia group の作用は位数 d の巡回群の作用を通してくるので、μ_dの表現となる。innertia group の index d の部分群 I_d上でこの l-進表現は trivial となる。$k((x))$ の uniformizer x を選ぶことにより、$G_{k((x))}/I_d$は$\hat{\mathbf{Z}} \times \mu_d$ と同型となるので $K(B^0(x))^{t,d} \simeq K(k, \mu_d)$ なる同型を得る。ここで $K(k, \mu_d)$ は $Spec(k)$ 上のμ_dの作用する etale sheaf のなす Grothendieck group である。この同型は uniformizer のとり方に依存するが以下 uniformizer は固定して考える。これを使って $B(x) = Spec(k[[x]])$ 上の etale sheaf で $B(x)^0$への制限の exponent が高々d となるもののなす Grothendieck 群 $K(B(x))^{t,d}$ を記述することができる。すなわち、$B(x)$ 上の etale sheaf を与える事と k の絶対 Galois 群の表現$\rho_{\bar{0}}$, $k((x))$ の絶対 Galois 群の表現$\rho_{\bar{\eta}}$ 及び$\rho_{\bar{0}}$から$\rho_{\bar{\eta}}$の inntertia 不変部分への G_k 準同型 sp_ρの 3 つ組 $(\rho_{\bar{0}}, \rho_{\bar{\eta}}, sp_\rho)$ を与えることは同値であることをふまえると、

$$K(B(x))^{t,d} \simeq K(k, \mu_d) \oplus K(k)$$

なる Grothendieck 群の同型を得るのである。この同型は高次元に容易に一般化される。$x = (x_1, \dots, x_n)$ として $B(x) = Spec(k[[x_1, \dots, x_n]])$ と定義する。さらに $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$ を $d_i \mid (q-1)$ なる自然数の列とした時、$K(B(x))^{t,\mathbf{d}}$を $B(x)$ 上の etale shaef で (1) 高々$D_i = \{x_i = 0\}$ なる divisor のみで tame に分岐し、(2)D_iに関する monodromy は高々exponent d_iの quasi-unipotent な作用となっているような etale sheaf の Grothendieck 群とする。$B(x) - \cup D_i = B(x)^0$とおいて、$B(x)^0$上で同様の分岐の条件をもつ etale sheaf のなす Grothendieck 群を $K(B(x)^0)^{t,\mathbf{d}}$と書く。いま $[1, n]$ の部分集合 I に対して $G_I = \prod_{i \notin I} \mu_{d_i}$とおく。さらに座標 $x_I = (x_i)_{i \notin I}$, $d_I = (d_i)_{i \notin I}$ を導入し、$B_I(x) = Spec(k[[x_1, \dots, x_n]]/(x_i)_{i \in I})$ にたいして同様に $K(B_I(x))^{t,d_I}$, $K(B_I(x)^0)^{t,d_I}$を同様に定義する。同様に specialization の議論により、次の proposition を得る。

Proposition 1.

$$\begin{aligned} K(B(x))^{t,d} &\simeq \oplus_{I \subset [1,n]} K(B_I(x)^0)^{t,d_I} \\ &\simeq \oplus_{I \subset [1,n]} K(k, G_I) \end{aligned}$$

§2 Direct image

$B(t) = Spec(k[[t]])$ とし、f を $B(x)$ から $B(t)$ への射とする。$I \subset [1, n]$ に対して $\phi_I : K(B_I(x)^0)^{t,d} \to K(B^0(t))$ なる準同型を

$$\phi_I([F]) = [j_t^*(\mathbf{R}(f(x)_* i_{I!}(F))],$$

によって定義する。ここで $j_t : B^0(t) \to B(t)$、 $i_I : B_I(x)^0 \to B_I(x)$ なる自然な射である。f の exponent を定義しよう。$\xi_i^{d_i} = x_i$によってあらたな座標ξ_iを導入

する。$B_I(\xi)$ 上の etale sheaf で $Spec(k)$ の etale sheaf の引き戻しに書けるものを unramified な sheaf とよぶことにする。$B_I(\xi)$ 上の unramified な etale sheaf で G_Iの作用をもつもののなす Grothendieck 群を $K(B(\xi)^0, G_I)^u$ と書く。$\pi_I : B_I(\xi) \to B_I(x)$ と $f_I = f\mid_{B_I(\xi)}: B_I(x) \to B(t)$ の合成 $f_I \circ \pi_I$の exponent を m_Iと書き、m_Iの I にわたる最小公倍数を m と書く。この m を f の $d = (d_1, \ldots, d_n)$ に関する exponent という。ここで $f_I \circ \pi_I$はすべて tame であり、$m \mid (q-1)$ であることを仮定した。この時ϕ_Iの像は $K(B(t)^0)^{t,m}$ にはいることがわかる。$\tilde{\phi}_I : K(B_I(\xi)^0, G_I)^u \to K(B(t)^0, G_I)^{t,m}$ を

$$\tilde{\phi}_I([\tilde{F}]) = [j_t^*\mathbf{R}(f(x)_I \circ \pi_I)_* \tilde{i}_{I!}(\tilde{F})]$$

によって定義する。ここで$\tilde{i}_I$は $B_I(\xi)^0 \to B(\xi_I)$ なる自然な inclusion である。このとき次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc}
K(B(x_I)^0)^{t,d_I} & \xrightarrow{\phi_I} & K(B^0(t))^{t,m} \\
\downarrow & & \uparrow {\scriptstyle G_I\text{-invariant}} \\
K(B(\xi_I)^0, G_I)^u & \xrightarrow[\tilde{\phi}_I]{} & K(B^0(t), G_I)^{t,m}
\end{array}$$

次に Milnor fiber の cohomology に対応するものを定義しよう。

定義.

(1) $f : B(x) \to B(t)$ と $B(x)$ 上の exponent $d = (d_1, \ldots, d_n)$ の etale sheaf F に対して $K(k, \mu_m)$ の元$\Phi(f, [F])$ を$\Phi(f, [F]) = [j_t^*\mathbf{R}f_*(F)] - [i_0^*\mathbf{R}f_*(F)]$ によって定義する。$B(\xi_I, G_I)^u$ 上の etale sheaf $\tilde{F}_I$に対しても

$$\Phi(f_I \circ \pi_I, [\tilde{F}_I]) = [j_t^*\mathbf{R}(f_I \circ \pi_I)_*(\tilde{F}_I)] - [i_0^*\mathbf{R}(f_I \circ \pi_I)_*(\tilde{F}_I)] \in K(k, G_I \times \mu_m)$$

が定義される。$\Phi(f, *)$, $\Phi(f_I \circ \pi_I, *)$ は加法性により $K(B(x))^{t,d} \to K(k, \mu_m)$, $K(B(\xi_I), G_I)^u \to K(k, G_I \times \mu_m)$ なる準同型に拡張される。

(2) $K(B(\xi_I), G_I)^u$の元$\tilde{F}$に対して$\tilde{\chi}_K(\tilde{F}) \in B(k, G)$, $\chi_K(\tilde{F}) \in B(k, G_I)$ を

$$\tilde{\chi}_K(\tilde{F}) = \sum_{K \supset I} (-1)^{\#I} \tilde{j}_{I!}(\tilde{F}\mid_{B_I(\xi)^0})$$
$$\chi_K(\tilde{F}) = \tilde{\chi}_K(\tilde{F})^{\prod_{i \in K} \mu_{d_i}}$$

によって定義する。ここで$\tilde{j}_I : B_I^0(\xi) \to B(\xi)$ は自然な埋め込みである。

以上の準備のもとで convolution theorem をのべよう。

Theorem 1 (l-adic convolution theorem).

(1) $[F] \in K(B(x))^{t,d}$が $[F_i] \in K(B(x_i))^{t,d_i}$により $[F] = \otimes_{i \in [1,n]} pr_i^*[F_i]$ と書かれているとすると

$$\tilde{\chi}_I(F) = \otimes_{i \notin I}[F_{i,\bar{x}_i}] \otimes \otimes_{i \in I}([F_{i,x_i}] - [F_{i,0}]) \in K(k, G),$$
$$\chi_I(F) = \otimes_{i \notin I}[F_{i,\bar{x}_i}] \otimes \otimes_{i \in I}([F_{i,x_i}] - [F_{i,0}])^{\mu_{d_i}} \in K(k, G_I),$$

と表される。

(2) $[F]$ を $K(B(x))^{t,d}$の元とする。この時、

$$\Phi(f,F)=\sum_{I\subset[1,n]}(-1)^{\#I}(\Phi(f_I\circ\pi_I,\mathbf{Q})\otimes\chi_I(\pi^*[F]))^{G_I}\in K(\mu_m,k)$$

となる。ここで$\pi^*:K(B(x))^{t,d}\to K(B(\xi),G)^u$は$\pi:B(\xi)\to B(x)$ の引き戻しから定まる自然な準同型である。

それではこの定理を幾何学的な状況に応用してみよう。$m_1,\dots,m_n$を正整数、$y_i=(y_{i1},\dots,y_{im_i})$ を座標の集合とする。$B(y_i)=Spec(k[[y_{i1},\dots,y_{im_i}]])$ とおき、$g_i=g_i(y_i)$ を $\{y_{ij}\}_j$に関する形式的巾級数で定数項がないものとする。このとき g_iは $B(y_i)\to B(x_i)$ なる射をひきおこす。この射も g_iと書く。さらに g_iは $B(y_i)-g_i^{-1}(0)$ で smooth であり g_iの exponent d_iは $q-1$ を割ると仮定する。g_iの fiber product $\prod_{i=1}^n g_i:B(y)=\prod_{i=1}^n B(y_i)\to B(x)=\prod_{i=1}^n B(x_i)$ を g と書く。

$$B(y)=\prod_{i=1}^n B(y_i)\overset{g=\prod_{i=1}^n g_i}{\longrightarrow}B(x)=\prod_{i=1}^n B(x_i)\xrightarrow{f}B(t)$$

さらに

$$\begin{aligned}\chi_{g,K}=&\chi_K([\mathbf{R}g_{1*}\mathbf{Q}_l]\otimes\cdots\otimes[\mathbf{R}g_{n*}\mathbf{Q}_l])\\ =&\otimes_{i\notin K}[j_{x_i}^*\mathbf{R}g_{i*}\mathbf{Q}_l]\otimes\otimes_{i\in K}([j_{x_i}^*\mathbf{R}g_{i*}\mathbf{Q}]-[i_0^*\mathbf{R}g_i\mathbf{Q}])^{\mu_{d_i}}\end{aligned}$$

と定義する。

$$\Phi(f\circ g,\mathbf{Q}_l)=\Phi(f,[\mathbf{R}g_{1*}\mathbf{Q}_l]\otimes\cdots\otimes[\mathbf{R}g_{n*}\mathbf{Q}_l])=[j_t^*\mathbf{R}(f\circ g)_*\mathbf{Q}_l]-[\mathbf{Q}_l].$$

であることに気をつけると、次の定理が上の proposition から従う。

Theorem 2 (l-adic convolution theorem for composite singularities).

$$\Phi(f\circ g,\mathbf{Q}_l)=\sum_{I\subset[1,n]}(-1)^{\#I}(\Phi(f_I\circ\pi_I,\mathbf{Q}_l)\otimes\chi_{g,I})^{G_I}.$$

それでは次の章でこの定理の Hodge analog について考察する。

§3 Hodge structure に関する convolution theorem(f が non-degenerate のとき)

N を analytic space$X$ と Y をその closed subspace としさらに X を代数多様体とする。このとき triple (N,X,Y) が local space であるとは、

(1) Y のどの irreducible component も X には含まれない。
(2) $N-(X\cup Y)$ は smooth variety となる。
(3) proper な bimeromorphic map $b:\tilde{N}\to N$ が存在して b は $b^{-1}(N-(X\cup Y))$ 上で同型を引き起こし、$b^{-1}(X\cup Y)$ は$\tilde{N}$の normal crossing divisor となる。
　このような状況で Y の proper transform $\tilde{Y}$の既約分解を$\tilde{Y}=\cup_{i\in I}\tilde{Y}_i$とかく。$I$ の部分集合 J に対して、$\tilde{Y}_J$を$\tilde{Y}_J=\cap_{j\in J}\tilde{Y}_j$と定義する。
(4) I の任意の部分集合 J に対して$\tilde{Y}_J\cap\tilde{X}$は$\tilde{Y}_J$の retraction となる。ここで$\tilde{X}=b^{-1}(X)$ である。(とくに$\tilde{X}$は$\tilde{N}$の retraction である。)

以下 X の十分小さい近傍で取り換えてえられる local space は全て同一視するものとする。このとき Mixed Hodge complex の standard な議論により次の命題が示される

命題. (N,X,Y) を *local space*、W を X の *subvariety* とする。このとき $H_c^i(W,\mathbf{R}j_*\mathbf{Q})$ には自然な *mixed Hodge structure* がはいる。

証明の詳細は Navaro Aznar [N] にある。さてこれをふまえて Milnor fiber の cohomology を Grothendieck 群 $K_{MH}(\mathbf{C},\mu_m)$ あるいはその $[\mathbf{Q}]-[\mathbf{Q}(-1)]$ に関する局所化の元として定義しよう。$f=f(y_1,\dots,y_n)$ を $B(y)=\{(y_1,\dots,y_n) \mid\mid y_i \mid < \epsilon\}$ から $B(t)=\{t\in\mathbf{C} \mid\mid t \mid < \epsilon\}$ への local morphism とする。さらに m を exponent とする。このとき $B_m(y)$ をしたの fiber product により定める。

$$\begin{array}{ccc} B_m(y) & \xrightarrow{\pi} & B(y) \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B(\tau) & \longrightarrow & B(t), \end{array}$$

このとき $(B_m(y),\pi^{-1}(0),\pi^{-1}(Z(f)))$ は local space でμ_mが作用するので $H^i(B_m(y)-\pi^{-1}(Z(f)),\mathbf{Q})$ はμ_mが作用する Mixed Hodge structure となる。そのような群の作用する Mixed Hodge structure のなす Grothendieck 群を $K_{MH}(\mathbf{C},\mu_m)$ と書く。これには tensor product により積が定義されるので、$[\mathbf{Q}]-[\mathbf{Q}(1)]$ による局所化が定義される。これを $K_{MH}(\mathbf{C},\mu_m)_{loc}$と書く。$\Psi_{f,m}(\mathbf{Q})=[H^*(B_m(y)-\pi^{-1}(Z(f)),\mathbf{Q})]$ in $K_{MH}(\mathbf{C},\mu_m)$ を$\sum_{i=0}^{2\dim B(x)}(-1)^i[H^i(B_m(y)-\pi^{-1}(Z(f)),\mathbf{Q})]$ によって定義する。また

$$\phi_{f,m}(\mathbf{Q})=\frac{1}{[\mathbf{Q}]-[\mathbf{Q}(-1)]}\Psi_{f,m}(\mathbf{Q})\in K_{MH}(\mathbf{C},\mu_m)_{loc}$$
$$\Phi_{f,m}(\mathbf{Q})=\phi_{f,m}(\mathbf{Q})-[\mathbf{Q}]\in K_{MH}(\mathbf{C},\mu_m)_{loc}.$$

と定義すると、$\Phi_{f,m}(\mathbf{Q})$ は Milnor fiber の cohomology に対応する。

composite singularity の状況において$\phi_{f\circ g,m}(\mathbf{Q})$ を計算しよう。§1 と同じ記号 g_i, f を使うことにする。$\phi_{f\circ g,m}(\mathbf{Q})$ を計算するのに g_iの resolution, f の resolution の両方を考えさらに exponent に対応する multiplicity の除去をしなくてはならない。それらの計算の全てをここで再現することは割愛させて頂き、おおまかなアイデアを書くことにしよう。f に関しては Newton boundary に関する non-degenerateness を以下仮定する。これは f に関して toric resolution を使いたいからである。

Mionor fiber の cohomology の計算をするため、exponent に対応する covering をとる。$y_i=(y_{i1},\dots,y_{im_i})$ なる座標を用意して、$B(y_i)=\{(y_{i1},\dots,y_{i,m_i})\in\mathbf{C}^{m_i} \mid\mid y_{ij} \mid < \epsilon \quad (1\le j\le m_i)\}$、$B(y)=\prod_{i=1}^n B(y_i)$ とおく。さらに $B(y_i)$ 上の正則関数 g_iで $B(y_i)-g_i^{-1}(0)$ では smooth なものを考える。g_iの exponent を d_i、$\mathbf{d}=(d_1,\dots,d_n)$ とおく。$B_{\mathbf{d}}(x)$ を下の左図の fiber product として定義する。また $f\circ g$ の exponent を m として、$B(\tau)\to B(x)$ を degree m の ramified covering とする。さらに下の右図の fiber product として$\tilde{B}_{\mathbf{d}}(x)$ を定義する。

$$\begin{array}{ccc} B_{\mathbf{d}}(y) & \xrightarrow{\pi} & B(y) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ B(\xi) & \xrightarrow[G\text{ covering}]{} & B(x), \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \tilde{B}_{\mathbf{d}}(y) & \longrightarrow & B_{\mathbf{d}}(y) \\ {\scriptstyle \tilde{f}(y)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f\circ g\circ\pi} \\ B(\tau) & \xrightarrow[\mu_m\text{ covering}]{} & B(t) \end{array}$$

このとき$\phi_{f\circ g\circ\pi,m}(\mathbf{Q})$ には $G \times \mu_m$が作用する。$G = \prod_{i=1}^n \mu_{d_i}$である。$\phi_{f\circ g\circ\pi,m}(\mathbf{Q})^G = \phi_{g\circ\pi,m}(\mathbf{Q})$ が成立することがわかる。$\tilde{B}_{I,\mathbf{d}}(y)$ を

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B}_{I,\mathbf{d}}(y) & \longrightarrow & \tilde{B}_{\mathbf{d}}(y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_I(\xi) & \longrightarrow & B(\xi) \end{array}$$

により定義し、$\tilde{B}^0_{I,\mathbf{d}}(y) = \tilde{B}_{I,\mathbf{d}}(y) - \cup_{J\supsetneq I}\tilde{B}_{J,\mathbf{d}}(y)$、$\tilde{B}^0_{\mathbf{d}}(y) = \tilde{B}^0_{\emptyset,\mathbf{d}}(y)$、とおき、$k_I$を自然な埋め込み

$$k_I : \tilde{B}^0_{I,\mathbf{d}}(y) - (\tilde{f}(y))^{-1}(0) \to \tilde{B}_{I,\mathbf{d}}(y)$$

とする。

$$\tilde{\Phi}_{fog,m}(\mathbf{Q}) = \frac{1}{[\mathbf{Q}] - [\mathbf{Q}(1)]}([H^*(\tilde{B}_{\mathbf{d}}(y) - (\tilde{f}(y))^{-1}(0), \mathbf{Q})]) - [Q]$$

とおくと$\Phi_{fog}(\mathbf{Q}) = \tilde{\Phi}_{fog}(\mathbf{Q})^G$となる。さらに

$$[H^*(\tilde{B}_{\mathbf{d}}(y) - (\tilde{f}(y))^{-1}(0), \mathbf{Q})] = \sum_{I\subset[1,n]} [H^*(\tilde{B}_{I,\mathbf{d}}(y) - (\tilde{f}(y))^{-1}(0), k_{I!}\mathbf{Q})]$$

となる。次に特異点の解消をする。$b(y_i) : \hat{B}(y_i) \to B(y_i)$ を $g_i^{-1}(0) \subset B(y_i)$ の特異点解消すなわち $b(y_i)$ は bimeromorphic projective morphism で $b(y_i)^{-1}(g^{-1}(0))_{red}$ が simple normal crossing であるものとする。$\hat{B}(y_i) \times_{B(x_i)} B(\xi_i)$ の normalization を$\tilde{B}(y_i)$ とし、$V = \tilde{B}(y) = \prod_{i=1}^n \tilde{B}(y_i)$ とおく。さらに $b(\xi) : \hat{B}(\xi) \to B(\xi)$ を $B(\xi)$ の toric resolution とする。さらに$\tilde{B}(\xi) \to \hat{B}(\xi)$ を toric geometry を使った multiplicity reduction とする。すなわち $\tilde{B}(\xi)$ は $B(\xi)$ 上 finite なる $B(\xi) \times_{B(t)} B(\tau)$ の birational model である。この構成法は Danilov [D] によるがくわしいことは割愛する。$\tilde{V} = V \times_{B(\xi)} \tilde{B}(\xi)$ とおく。もちろんこの多様体は特異点を持っているが、cohomology を計算するうえに必要な座標がとれているので、これをもとに $[H^*(\tilde{B}_{\mathbf{d}}(y) - (\tilde{f}(y))^{-1}(0), \mathbf{Q})]$ を計算することができる。$\tilde{B}(\xi) \to B(\xi)$ の exceptional divisor を$\tilde{D}_E$とおく。$\tilde{D}_E$の$\tilde{V}$への引き戻しを$\tilde{V}_E$, $\tilde{V} \to \tilde{B}(\xi) \to B(\tau)$ による 0 の逆像を$\tilde{V}_F \cup \tilde{V}_E$と書く。このとき$\tilde{V} - (\tilde{V}_F \cup \tilde{V}_E)$ は$\tilde{B}_{\mathbf{d}}(y) - (\tilde{f}(y))^{-1}(0)$ と同型である。さらに $V \to \prod_i B(y_i)$ の原点の逆像を V_cとかくと自然な射 $V_c \times \tilde{D}_E \to \tilde{V}$は retraction となるので$\tilde{j}_V : \tilde{V} - (\tilde{V}_F \cup \tilde{V}_E) \to \tilde{V}$ とおくと、

$$\begin{aligned} [H^*(\tilde{B}_{\mathbf{d}}(y) - (\tilde{f}(y))^{-1}(0), \mathbf{Q})] &= [H^*(\tilde{V}, \mathbf{R}\tilde{j}_{V*}\mathbf{Q})] \\ &= [H^*(V_c \times \tilde{D}_E, \mathbf{R}\tilde{j}_{V*}\mathbf{Q})] \end{aligned}$$

となる。さらに normal corssing divisorV_cの stratification への分解、$\tilde{D}_E$の toric geometry を使った分解を使ってうえの式を計算する。いま $\cup_{\tau\in K} S^0_\tau$を normal crossing divisorV_cの stratification に関する分解として $\cup_{\sigma\in F'} \tilde{Z}^0_\sigma$ を$\tilde{D}_E$を toric geometry を使った分解とする。さらに $B(\xi) \to B(x) \to B(t)$ による 0 の逆像の$\tilde{B}(\xi)$ における strict transform を$\tilde{D}_F$, $\tilde{B}(\xi) - B^0(\xi) = \tilde{D}_B \cup \tilde{D}_F \cup \tilde{D}_E$とおく。このとき $S^0_\tau \times \tilde{Z}^0_\sigma$

への $R^i\tilde{j}_{V*}\mathbf{Q}$ の制限は$\wedge^i(\mathbf{Q}(-1)^{\tilde{r}(\sigma,\tau)})$ と同型となる。これは Mixed Hodge complex としての同型にもなっている。ここで $r(\sigma,\tau)=\sum_{i=k+1}^{n} l_i + a - n$ で a はσ の次元 k は$\tilde{Z}^0_\sigma$を含む$\tilde{D}_B$の component の数とする。すなわち $a-k$ は$\tilde{Z}^0_\sigma$を含む$\tilde{D}_E\cup\tilde{D}_F$ の component の数である。さらに $y\in S^0_\tau$ の$\hat{B}(y_i)$ における image を y_iとするとき、l_i-1 は$\hat{y}_i\in\hat{B}(y_i)$ を含む exceptional divisor の component の数である。これらの事実に基づいて計算すると

$$[\mathbf{H}^*(\tilde{B}_{\mathbf{d}}(y)-(f(\xi)\circ g)^{-1}(0),k_{\emptyset!}\mathbf{Q})]=\otimes_{i=1}^{n}\phi_{g_i,d_i}(\mathbf{Q})\otimes[\mathbf{H}^*_c(\tilde{Z}^0_\emptyset,\mathbf{R}\tilde{j}_{I*}\mathbf{Q})]$$

なる等式を得る。ここで$\tilde{Z}_I=\tilde{D}_E\cap\tilde{B}_I(\xi)$, $\tilde{Z}^0_I=\tilde{D}_E\cap\tilde{B}^0_I(\xi)$ で、j_Iは自然な埋め込み$\tilde{B}_I(\xi)-(\tilde{D}_F\cup\tilde{D}_E)\to\tilde{B}_I(\xi)$ である。全く同様に $[1,n]$ の部分集合 I にたいして

$$[\mathbf{H}^*(\tilde{B}_{I,\mathbf{d}}(y)-(f_I(\xi)\circ g)^{-1}(0),k_{I!}\mathbf{Q})]=\otimes_{i\notin I}\phi_{g_i,d_i}(\mathbf{Q})\otimes[\mathbf{H}^*_c(\tilde{Z}^0_I,\mathbf{R}\tilde{j}_{I*}\mathbf{Q})].$$

を得る。ゆえに

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{H}^*(\tilde{B}_{\mathbf{d}}(y)-(f(\xi)\circ g)^{-1}(0),\mathbf{Q})]\\
&=\sum_{I\subset[1,n]}[\mathbf{H}^*(\tilde{B}_{I,\mathbf{d}}(y)-(f_I(\xi)\circ g)^{-1}(0),k_{I!}\mathbf{Q})]\\
&=\sum_{I\subset[1,n]}\otimes_{i\notin I}\phi_{g_i,d_i}(\mathbf{Q})\otimes[\mathbf{H}^*_c(\tilde{Z}^0_I,\mathbf{R}\tilde{j}_{I*}\mathbf{Q})]\\
&=\sum_{I\subset[1,n]}(-1)^{\#I}\otimes_{i\notin I}\phi_{g_i,d_i}(\mathbf{Q})\otimes\otimes_{i\in I}(\phi_{g_i,d_i}(\mathbf{Q})-[\mathbf{Q}])\otimes[\mathbf{H}^*_c(\tilde{Z}_I,\mathbf{R}\tilde{j}_{I*}\mathbf{Q})]\\
&=\sum_{I\subset[1,n]}(-1)^{\#I}\otimes_{i\notin I}\phi_{g_i,d_i}(\mathbf{Q})\otimes\otimes_{i\in I}(\phi_{g_i,d_i}(\mathbf{Q})-[\mathbf{Q}])\\
&\qquad\qquad\otimes([\mathbf{H}^*_c(\tilde{Z}_I,\mathbf{R}\tilde{j}_{I*}\mathbf{Q})]-[\mathbf{Q}]-[\mathbf{Q}(-1)])\\
&\quad+[\mathbf{Q}]-[\mathbf{Q}(-1)]
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\tilde{\Phi}_{f_I,m}(\mathbf{Q})=\frac{1}{[\mathbf{Q}]-[\mathbf{Q}(1)]}[\mathbf{H}^*_c(\tilde{Z}_I,\mathbf{R}\tilde{j}_{I*}\mathbf{Q})]-[\mathbf{Q}]$$

とおこと、

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_{f\circ g,m}(\mathbf{Q})&=(\frac{1}{[\mathbf{Q}-\mathbf{Q}(-1)]}[\mathbf{H}^*_c(\tilde{B}_{\mathbf{d}}(y)-(f(\xi)\circ g)^{-1}(0),\mathbf{Q})])-\mathbf{Q}\\
&=\sum_{I\subset[1,n]}(-1)^{\#I}\otimes_{i\notin I}\phi_{g_i,d_i}(\mathbf{Q})\otimes\otimes_{i\in I}\Phi_{g_i,d_i}(\mathbf{Q})\otimes\tilde{\Phi}_{f_I,m}(\mathbf{Q}).
\end{aligned}$$

を得る。さらに両辺の G invariant をとり下の定理を得る。

Theorem 3 (Hodge structures に関する convolution theorem).

$$\Phi_{f\circ g,m}(\mathbf{Q})=\sum_{I\subset[1,n]}(-1)^{\#I}(\otimes_{i\notin I}\phi_{g_i,d_i}(\mathbf{Q})\otimes\tilde{\Phi}_{f_I,m}(\mathbf{Q}))^{G_I}\otimes\otimes_{i\in I}\Phi_{g_i,d_i}(\mathbf{Q})^{\mu_{d_i}}$$

REFERENCES

[Del] Deligne, P, *Théorie de Hodge II*, Publ. Math. IHES **40** (1973), 5-58.

[Dan] Danilov, V.I., *Newton polyheadra and vanishing cohomology*, Funct. Anal. **13** (1979), 103-115.

[St] Steenbrink, J.H.M., *Mixed Hodge structures on vanishing cohomology*, Real and complex singularities, Oslo 1976, Sijthoff-Noordhoff, Alphen a/d Rijn, 1977, pp. 525-563.

[Dur] Durfee, A.H., *Mixed Hodge structures on punctured neighborhoods*, Duke Math. J. **50 no.4** (1983), 1017-1040.

[N-S] Nemethi,A.-Steenbrink, J.H.M., *Spectral pairs, mixed Hodge modules, and series of plane curve singularities*, New York J. of Math. **1** (1995), 149-177.

[N] Aznar, Navaro V., *Sur la theorie de Hodge-Deligne*, Inv. Math. **90** (1987), 11-76.

[Od] Oda, T., *Convex bodies and algebraic geometry, Ergibnis der Math. u. ihrer Grantzengebiete*, vol. 3, Springer-Verlag.

[D-L] Denef, J.-Loeser, F., *Motivic exponential integrals and a motivic Thom-Sebastiani theorem, preprint* (1998).

[S-T] Sebastiani,M.-Thom,R., *Un Résultat sur la monodromie*, Inv. Math. **13** (1971), 90-96.

[V] Varchenko, A., *Asymptotic Hodge structure in the vanishing cohomology*, Math. USSR Izvestija **18** (1982), 479-512.

[S] Saito, M, *Mixed Hodge modules and applications*, Proceedings of the ICM Kyoto, 1991, pp. 725-734.