代数幾何学シンポジウム記録
1998年度 pp.39-55

ENRIQUES 曲面と解析的トーション

吉川 謙一 (KEN-ICHI YOSHIKAWA)
名古屋大学・多元数理科学研究科

0. Kronecker 極限公式

Jacobi の Δ-関数とは次の無限積で定義される重さ 12 の尖点形式である：

$$\Delta(\tau) = q \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}, \quad q = \exp(2\pi i\tau), \quad \tau \in \mathbb{H}. \tag{0.1}$$

$\Delta(\tau)$ は様々な特徴付けを持つが、代数幾何学では楕円曲線の判別式として現れる。$\Delta(\tau)$ の微分幾何学的な解釈として Kronecker 極限公式がある。(歴史について筆者は全くの素人であるため、Kronecker がどのような観点から極限公式を導いたのか知らない。筆者の知る限り、$\Delta(\tau)$ をラプラシアンの正規化行列式として最初に捉えたのは Ray, Singer [R-S] ではないかと思う。) Ray-Singer に従って Kronecker 極限公式を定式化してみよう。

$E_\tau := \mathbb{C}/\Lambda_\tau$, $\Lambda_\tau = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ を周期 τ の楕円曲線、$g_\tau = (Im\tau)^{-1}|dz|^2$ を E_τの Ricci-平坦 Kähler 計量とする。$\square_\tau = (Im\,\tau)^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)$ を (E_τ, g_τ) のラプラシアン、$\sigma(\square_\tau) = \{0 < \lambda_1(\tau) \leq \lambda_2(\tau) \leq \cdots\}$ をその固有値とし、ラプラシアンのゼータ関数を $\zeta_\tau(s) := \sum \lambda_i(\tau)^{-s}$ で定義する。$\lambda_i(\tau)$ は簡単に計算でき、$\zeta_\tau(s)$ は次のように Eisenstein 級数で書ける：

$$\zeta_\tau(s) = (2\pi)^{-2s}(Im\,\tau)^s \sum_{(m,n)\neq(0,0)} |m\tau + n|^{-2s}. \tag{0.2}$$

定理 0.1. (E_τ, g_τ) の解析的トーション$\tau(E_\tau) = \exp(\zeta_\tau'(0))$ は $\Delta(\tau)$ と同一視できる：

$$\tau(E_\tau) = (2\pi)^2 \|\Delta(\tau)\|^{-\frac{1}{6}}.$$

ここで、$\|\Delta(\tau)\|^2 := (Im\,\tau)^{12}|\Delta(\tau)|^2$ は$\Delta(\tau)$ の Petersson ノルムである。 □

本稿では Enriques 曲面に対する Kronecker 極限公式とその一般化を説明したい。その結果、Borcherds の Φ-関数が $\Delta(\tau)$ の高次元化として現れる。９８年１１月の講演では関連する話題として Gritsenko-Nikulin の Mirrior 予想への応用も述べた。(実際の講演ではそちらに重しをおき過ぎたかも知れない。) 講演で何も触れられなかった具体例や証明の概略なども記したい。

1. 2-elementary K3 曲面とそのモジュライ空間

1.1 格子偏極 K3 曲面. X をコンパクト複素曲面とする。X は次の条件を満たす時 K3 曲面であると言われる：

$$(1.1) \qquad (1) \quad H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0, \quad (2) \quad K_X \cong \mathcal{O}_X.$$

(2) により X 上には至る所消えない正則 2 形式が存在する。この正則 2 形式をω_X と書く。定義から ω_X には非零定数倍の自由度がある。X は実 4 次元多様体なので $H^2(X,\mathbb{Z})$ に交差形式を付加することにより格子と見る。この時、次のことは良く知られている。即ち、等長写像 $\phi : H^2(X,\mathbb{Z}) \cong L_{K3} := U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$ が存在する。ϕ を marking と言い、(X,ϕ) を marked K3 曲面という。ここで、$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は 2-次元ユニモジュラー双曲型格子であり、E_8 は 8 次元正定値ユニモジュラー偶格子である。又、格子 M に対し、$M(k)$ で M の内積を k-倍した内積を持つ格子を表す。以下、格子とその交差行列をしばしば同一視する。

Marked K3 曲面のモジュライ空間 $\tilde{\Omega}$ と普遍族が存在することが知られている。しかし $\tilde{\Omega}$、又はその自然な商空間 Ω は保型関数を考える舞台としては適切ではない。自然な離散群 $O(L_{K3})$（格子 L_{K3} の自己同型群）が $\tilde{\Omega}, \Omega$ のいずれにも固有不連続に作用しないことが、理由の一つに挙げられるであろう。そのために偏極を固定したモジュライ空間を考える。一般に偏極は格子で与えられる。

K3 曲面 X に対して、S_X を Picard 格子、T_X を超越格子とする：

$$(1.2) \qquad S_X := \{l \in H^2(X,\mathbb{Z}); \langle l, \omega_X \rangle = 0\}, \quad T_X := S_X^{\perp} \cap H^2(X,\mathbb{Z}).$$

定義 1.1. S を L_{K3} の双曲型原始的部分格子、即ち L_{K3}/S は自由 $\mathbb{Z}$-加群で、符合 $(1,*)$ であるとする。K3 曲面 X が S-K3 曲面であるとは、marking ϕ が存在して、$\phi(S_X) \supset S$ が成り立つことである。このような marking を S-K3 曲面の marking と言う。 □

注意. 上の定義は Dolgachev による S-K3 曲面の定義 ([D]) よりも少し弱くなっている。通常は K3 曲面と包含写像 $j : S \hookrightarrow S_X$ の組の適当な同値類を S-K3 曲面と言う。(上の定義では同値関係が [D] より一般に強い。) □

Marked S-K3 曲面 (X,ϕ) に対して、その周期領域 Ω_S と周期$\pi(X,\phi)$ を次のように定める。

定義 1.2.

$$\pi(X,\phi) := [\phi_{\mathbb{C}}(\omega_X)] \in \Omega_S,$$
$$\Omega_S := \{[x] \in \mathbb{P}(T_{\mathbb{C}}); \langle x, x \rangle = 0, \langle x, \bar{x} \rangle > 0\}, \quad T = S^{\perp}.$$

ここで、$\phi_{\mathbb{C}} := \phi \otimes \mathbb{C}, T_{\mathbb{C}} := T \otimes \mathbb{C}$ 等である。 □

$r(S) := rk_{\mathbb{Z}} S$ とすれば、$\dim \Omega_S = 20 - r(S)$ である。Ω_S は 2 個の連結成分からなり：$\Omega_S = \Omega_S^+ \coprod \Omega_S^-$、各 $\Omega_S^{\pm}$ は IV 型対称有界領域と双正則である。Nikulin によれば marked S-K3 曲面の普遍族が存在する：

$$(1.3) \qquad \mathcal{P}_S : \mathcal{X}_S \to \tilde{\Omega}_S.$$

$\tilde{\Omega}_S$ は非 Hausdorff 非特異解析空間であり、周期写像 $\pi_S : \tilde{\Omega}_S \to \Omega_S$ は至る所局所同型で全射であることが知られている。

1.2 2-elementary 格子と反シンプレクティク対合. 我々は L_{K3} の原始的部分格子の中で、2-elementary 格子に興味がある。これらの格子を偏極に持つ K3 曲面は反シンプレクティク対合を持つからである。

定義 1.3. 偶格子 S が 2-elementary であるとは、S の内積による双対格子を $S^\vee$ とする時、$A_S := S^\vee/S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{l(S)}$, $l(S) \geq 0$、と書ける時をいう。 □

S の不変量として、$r(S)$, $sgn\, S = (r_+(S), r_-(S))$, $l(S) := \dim_{\mathbb{F}_2} A_S$ は自然である。それ以外に $\{0,1\}$-値不変量δ_S が存在することが知られている ([Kn, 定義 (2.12)])。Nikulin によれば、不定値 2-elementary 格子の不変量 (r_+, r_-, l, δ) はその等長類を決定する。L_{K3} に原始的埋め込みを持つ 2-elementary 格子は Nikulin により分類されている ([N])。又、$T = S^\perp$ に対して、A_T と A_S は自然に同型であることが知られている。

L_{K3} に原始的埋め込みを持つ 2-elementary 格子と代数的 K3 曲面の反シンプレクティク対合について説明する ([Kn, §6] も参照)。L_{K3} の部分格子 $L' = S \oplus T$ を考えると、その上には次の対合 $I_S : L' \to L'$ が存在する：

(1.4) $$I_S(x, y) = (x, -y) \quad (x \in S,\, y \in T).$$

Nikulin によれば I_S は L_{K3} 上の対合 I_S に一意的に拡張される。従って marking により I_S は勝手な marked S-K3 曲面 (X, ϕ) のコホモロジー格子上の対合を定める。これを I_X とする：$I_X := \phi^{-1} \circ I_S \circ \phi$. I_X がいつ X 上の対合から誘導されるかは次の Piatetskii-Shapiro, Shafarevich 及び Burns, Rapoport による Torelli 定理からわかる。

定理 1.1. (X, κ), (X', κ') を Kähler K3 曲面とする (κ, κ' は Kähler 類)。次の条件を満たすコホモロジー格子の等長写像 $\gamma : H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X', \mathbb{Z})$ に対し：
(1) $\gamma_{\mathbb{C}}(\omega_X) = \lambda \omega_{X'}$ $(\lambda \in \mathbb{C}^*)$, (2) $\gamma_{\mathbb{R}}(\kappa) = \kappa'$,
同型写像 $g : X' \to X$ が一意的に存在して $g^* = \gamma$ である。 □

I_X が X の対合から来ていることを見るには定理 1.1 の (1), (2) を $X = X'$ に対して確かめれば良く、次が結論される。

$\Delta_T = \{d \in T = S^\perp;\, \langle d, d\rangle = -2\}$ を T のルート全体とする。各 $d \in \Delta_T$ に対して、d の鏡映面を H_d とする：$H_d := \{x \in \Omega_S;\, \langle x, d\rangle = 0\}$. Ω_S の判別式軌跡を $\mathcal{H}_S$, その補集合を Ω_S^0 で定める：

(1.5) $$\mathcal{H}_S := \bigcup_{d \in \Delta_T} H_d, \quad \Omega_S^0 := \Omega_S \backslash \mathcal{H}_M.$$

この時、$\pi_S(X, \phi) \in \Omega_S^0$ ならば、X 上に対合 $\iota : X \to X$ が一意的に存在して

(1.6) $$\iota^* = \phi^{-1} \circ I_S \circ \phi, \quad \iota^* \omega_X = -\omega_X$$

が成立する。(1.6) の 2 番目の条件を満たす対合を反シンプレクティク対合と呼ぶ。逆に、代数的 K3 曲面 X 上に反シンプレクティク対合 ι が与えられたとする。ι^* の $H^2(X, \mathbb{Z})$ への作用に関する不変部分を $H^2_+(X, \mathbb{Z})$, 反不変部分を $H^2_-(X, \mathbb{Z})$ とする。$H^2_+(X, \mathbb{Z})$ は代数的サイクルから成るので、L_{K3} に原始的埋め込みを持つ双曲型偶格子であり、Nikulin の定理より 2-elementary である。X の marking ϕ を固定して、L_{K3} の 2-elementary 原始的部分格子 S を以下の様に定める：

(1.7) $$S := \phi(H^2_+(X, \mathbb{Z})) = \{l \in L_{K3};\, I_S(l) = l\}, \quad I_S := \phi \circ \iota^* \circ \phi^{-1}.$$

この様に L_{K3} の 2-elementary 原始的部分格子 (の $O(L_{K3})$-作用に関する同値類) と反シンプレクティク対合を持つ K3 曲面の不変格子とは 1 対 1 に対応する。

定義 1.4. 反シンプレクティク対合を持つ代数的 K3 曲面を 2-elementary K3 曲面と言う。(X, ι) が S-2-elementary K3 曲面であるとは、marking ϕ が存在して $I_S = \phi \circ \iota^* \circ \phi^{-1}$ となることである。このような marking を S-2-elementary K3 曲面の marking と呼ぶ。 □

注意. 筆者は以前 (X, ι) を generalized Enriques surface と呼んでいた。Enriques 曲面は本来（ι の固定点が無い条件の元で）商空間 X/ι のことである。ι が固定点を持つ場合、商空間 X/ι は有理曲面となり、それを Enriques 曲面と呼ぶのは奇異である。（そもそも商空間 X/ι とは 組 (X, ι) のことであった。）その点を考えて、本稿では (X, ι) を 2-elementary K3 曲面と呼ぶ。以上の指摘をして頂いた森重文先生に感謝します。又、2-elementary K3 曲面という名前を以前に考えて頂き、その基本的な性質を御教示頂いた金銅誠之先生に感謝します。 □

(1.3) と同様に、Marked S-2-elementary K3 曲面のモジュライ空間とその上の普遍族が存在する：

$$\mathcal{P}_S : (\mathcal{X}_S^0, \iota_S) \to \tilde{\Omega}_S^0, \quad \iota_S : \mathcal{X}_S^0 \to \mathcal{X}_S^0, \quad \pi_S(\tilde{\Omega}_S^0) = \Omega_S^0 \tag{1.8}$$

I_S を定義 1.4 の対合とする時、$\mathcal{I}_S : \tilde{\Omega}_S \ni (X, \phi_X) \to (X, I_S\phi_X) \in \tilde{\Omega}_S$ は $\tilde{\Omega}_S$ の対合を定める。$\tilde{\Omega}_S^0$ は $\mathcal{I}_S$ の固定集合として得られる $\tilde{\Omega}_S$ の開集合である。ι_S は (1.3) の $\mathcal{X}_S$ 上の自己同型であるが、$\pi_S^{-1}(\mathcal{H}_S)$ 上のファイバーを保たない。従って、ι_S は対合の族としては $\mathcal{X}_S$ 全体に拡張しない。

S-2-elementary K3 曲面のモジュライ空間は以下のように Ω_S^0 の算術商として得られる。$O(T)$ の指数有限部分群 Γ_S を以下のように定める。

$$\Gamma_S = \{g|_T;\, g \in O(L_{K3}), \quad g \circ I_S = I_S \circ g\}. \tag{1.9}$$

Γ_S は Ω_S と $\mathcal{H}_S$ に固有不連続に作用し、Ω_S^0/Γ_S は準射影的代数多様体になる (Baily-Borel)。簡単のため、以降 $\mathcal{M}_S := \Omega_S/\Gamma_S$, $\mathcal{M}_S^0 := \Omega_S^0/\Gamma_S$ とおく。Enriques 曲面に対する Torelli 定理（堀川、浪川）と同様にして次が示せる。

定理 1.2 ([Y]). S-2-elementary K3 曲面のモジュライ空間は $\mathcal{M}_S^0$ である。 □

(X, ι) を 2-elementary K3 曲面とする。ι の固定集合については次のことが Nikulin ([N], [Kn, 定理 (6.3)]) により知られている。

命題 1.1. $X^\iota = \{x \in X;\, \iota(x) = x\}$ を (X, ι) の固定集合とすれば、

$$X^\iota = \begin{cases} (1) \quad \emptyset & (S = U(2) \oplus E_8(-2) \Longleftrightarrow (r, l, \delta) = (10, 10, 0)), \\ (2) \quad C_1^{(1)} + C_2^{(1)} & (S = U \oplus E_8(-2) \Longleftrightarrow (r, l, \delta) = (10, 8, 0)), \\ (3) \quad C^{(g)} + \sum_{i=1}^k E_i & (\text{上以外}). \end{cases}$$

ここで、$C^{(g)}$ は種数 g の非特異曲線を表し、E_i は非特異有理曲線を表す。(3) の場合、g 及び k は以下の式で与えられる。

$$g(S) = 11 - \frac{r(S) + l(S)}{2}, \quad k(S) = \frac{r(S) - l(S)}{2}.$$

(1)、(2) の場合にも便宜上それぞれ $g(S) = 0, 1$ と定める。 □

$\mathcal{A}_g = \mathfrak{S}_g/\Gamma_g$ を g-次元主偏極 Abel 多様体のモジュライ空間とし、$\mathcal{A}_g^*$ をその佐竹コンパクト化とする。又、$\mathcal{M}_S^*$ を $\mathcal{M}_S$ の Baily-Borel コンパクト化とする。

命題 1.2. 正則写像 $j_S : \mathcal{M}_S \to \mathcal{A}_{g(S)}$ を次のように定める：

$$j_S : \mathcal{M}_S \ni (X, \iota) \to [Jac(X^\iota)] \in \mathcal{A}_{g(S)}.$$

ここで、$Jac(X^\iota)$ は X^ι の Jacobi 多様体を表す。この時 j_S は $\mathcal{M}_S^*$ から $\mathcal{A}_{g(S)}^*$ への有理写像に拡張する。但し命題 1.1 (2) の場合は、j_S は $S^2(\mathcal{A}_1)$ （$\mathcal{A}_1$ の二次対称積）に値をとる。 □

1.3 モジュライ空間上の一般化された保型形式. $\mathcal{L}_S$ を Ω_S 上の重さ 1 の保型形式の層とする。以下では $\mathcal{L}_S$ とそれに付随した直線束とを同一視する。Γ_S は一般に自明でない指標を持つが、$\Gamma_S/[\Gamma_S, \Gamma_S]$ は有限群になるため (Kazhdan)、その値は $U(\mathbb{C})$ に入る。Γ_S の指標 χ に付随する $\mathcal{M}_S$ の直線束を $[\chi]$ で表す。又、$\mathcal{L}_g$ を $\mathcal{A}_g$ 上の重さ 1 の Siegel 保型形式の層とする。(Siegel モジュラー群 Γ_g についても指標は有限で $g > 2$ ならば自明である。) $\mathcal{L}_S$, $\mathcal{L}_g$ はそれぞれ $\mathcal{M}_S^*$, $\mathcal{A}_g^*$ 上の豊富直線束と同一視される。命題 1.2 により j_S のグラフ Γ_{j_S} の $\mathcal{M}_S^* \times \mathcal{A}_g^*$ 内での閉包は射影的代数多様体であり、それを $\hat{\mathcal{M}}_S$ と書く。この時、$pr_1 : \hat{\mathcal{M}}_S \to \mathcal{M}_S$ は双有理正則写像である。

定義 1.5. $\hat{\mathcal{M}}_S$ 上の層 $\mathcal{L}_S^k \otimes \mathcal{L}_{g(S)}^q[\chi]$ の正則断面を重さ (p, q) の指標 χ-付き保型形式と呼ぶ。 □

注意. $\mathcal{L}_S^k \otimes \mathcal{L}_{g(S)}^q[\chi]$ の正則断面を重さ (p, q) の保型形式と呼ぶのは本稿だけの呼び方である。一般にこのような断面に名前がないので、ここではそう呼ぶ。以降、簡単のため指標は略す。従って、単に保型形式と言えば、それはある指標付のものを意味する。又、このような一般化された保型形式をΩ_S 上の不定性を持つ関数としばしば同一視する。 □

$\mathcal{L}_S$, $\mathcal{L}_g$ はともに Hermite 対称領域上の保型関数の層なので、その Bergman 核から定まる自然な Hermite 計量を持つ（Petersson ノルム）。以降、$\mathcal{L}_S^k \otimes \mathcal{L}_{g(S)}^q[\chi]$ には $\mathcal{L}_M$ と $\mathcal{L}_g$ の Petersson ノルムから定まる計量 $\|\cdot\|$ （Petersson ノルムと呼ぶ）を入れて、Hermite 直線束と見る。具体的には、$f(y)$ を重さ (p, q) の保型形式としたとき、$\|f(y)\|^2$ は以下の式で与えられる：

$$\|f(y)\|^2 = \langle Im\, y, Im\, y\rangle^{\frac{p}{20-r(S)}} \det Im j_S(y)^q |f(y)|^2. \tag{1.10}$$

ここで、Ω_S を管状領域と同一視している。又、$j_S(y) \in \mathfrak{S}_g$ と見ている。($\dim \mathcal{M}_S = 20 - r(S)$ に注意。)

2. 2-elementary K3 曲面に対する Kronecker 極限公式

(X,ι) を 2-elementary K3 曲面とする。その Kähler 計量とは X の Ricci-平坦 Kähler 計量であって、ι-不変なものを言う。(X,ι,κ) を Ricci-平坦 2-elementary K3 曲面とする。ι は各 $(0,q)$-形式の空間 $\wedge^{0,q}(X)$ を次のように分解する：

(2.1) $\wedge^{0,q}(X)=\wedge^{0,q}(X)_{+}\oplus\wedge^{0,q}(X)_{-},\quad \wedge^{0,q}(X)_{\pm}=\{f\in\wedge^{0,q}(X);\ \iota^{*}f=\pm f\}.$

$\square^{0,q}$ を (X,κ) のラプラシアンとすると、ι が等長変換なことから $\square^{0,q}$ は各 $\wedge^{0,q}(X)_{\pm}$ を保つ。そこで次のように $\square_{\pm}^{0,q}$ を定義する：$\square_{\pm}^{0,q}:=\square^{0,q}|_{\wedge^{0,q}(X)_{\pm}}$.

定義 2.1. (X,ι,κ) の同変解析的トーション $\tau(X,\iota,\kappa)$ は次式で定義される：

$$\tau(X,\iota,\kappa):=\prod_{q\geq 0}(\det\square_{+}^{0,q})^{(-1)^{q}q}.\quad\square$$

注意. $\tau(X,\iota,\kappa)$ は orbifold $(X/\iota,\kappa)$ の解析的トーションとも見れる。 $\square$

対合に関する同変解析的トーションを考えることは Kronecker 極限公式を高次元化する上でそれほど不自然なことではない。実際、第 0 節で取り挙げた楕円曲線も自然な対合 $\iota:z\to -z$ を持っている。この対合に関する同変解析的トーションを考えても、Jacobi の Δ-関数が現れる。

前節の様に、$X^{\iota}=\sum_{i}C_{i}$ を (X,ι) の固定曲線とする。各曲線に κ の制限を考えることにより $(C_{i},\kappa_{C_{i}})$ は Kähler 計量付き曲線である。従って、その解析的トーション$\tau(C_{i},\kappa_{C_{i}})$ を定理 0.1 と同様に考えることができる。これらを用いて 2-elementary K3 曲面 (X,ι) の不変量を次のように定義できる。

定義 2.2. (X,ι,κ) を Ricci-平坦 S-2-elementary K3 曲面とする。$X^{\iota}=\sum_{i=0}^{k}C_{i}$ を ι の固定曲線とした時、$\tau_{S}(X,\iota,\kappa)$ を次のように定める：

$$\tau_{S}(X,\iota,\kappa):=vol(X,\kappa)^{\frac{14-r(S)}{8}}\tau(X,\kappa,\iota)\left\{\prod_{i=0}^{k}vol(C_{i},\kappa_{C_{i}})\tau(C_{i},\kappa_{C_{i}})\right\}^{\frac{1}{2}}.\quad\square$$

Arakelov 幾何学の観点からすると、τ_{S} は同変コホモロジーの行列式のある自然な断面の Quillen ノルム（を X の体積で補正したもの）である。

定理 2.1 ([Y]). 以下、$r(S)\leq 17$ を仮定する。
(1) τ_{S} は Ricci-平坦計量に依らず、モジュライ空間 $\mathcal{M}_{S}^{0}$ 上の C^{∞}-関数を定める。
(2) $\mathcal{M}_{S}$ 上の重さ $(r(S)-6,4)$ の保型形式 Φ_{S} が存在して、以下が成り立つ：

$$\tau_{S}=\|\Phi_{S}\|^{-\frac{1}{4}},\quad div(\Phi_{S})=\mathcal{H}_{S}.$$

(3) $\delta\in\Delta(T)$ に対して $\langle S,\delta\rangle$ を S と δ で生成された 2-elementary 格子とすれば、$\Omega_{\langle S,\delta\rangle}=H_{\delta}$ であり、$\Phi_{\langle S,\delta\rangle}$ は Φ_{S} の H_{δ} への正規化された制限で与えられる。即ち、z を H_{δ} の一般の点とした時、次が成り立つ：

$$\Phi_{\langle S,\delta\rangle}(z)=\left.\frac{\langle\cdot,l_{S}\rangle_{T}}{\langle\cdot,\delta\rangle_{T}}\Phi_{S}\right|_{H_{\delta}}(z)=\lim_{w\to z,\,w\in\Omega_{S}^{0}}\frac{\langle w,l_{S}\rangle}{\langle w,\delta\rangle}\Phi_{S}(w).\quad\square$$

Baily-Borel によれば、保型形式の零因子はモジュラー多様体の豊富因子である。従って、モジュラー多様体からその因子を除いた開集合は準アフィン代数多様体である。結局、定理 2.1 より次の系を得る。

系 2.1. S-2-elementary K3 曲面のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{S}^{0}$ は、$r(S)>6$ ならば準アフィン代数多様体である。 $\square$

3. Enriques 曲面の解析的トーションと Borcherds の Φ-関数

本節では前節の特別な場合 $S = U(2) \oplus E_8(-2)$ について、定理 2.1 の保型形式とBorcherds の Φ-関数との関係を見る。

3.1 Enriques 曲面. 次の条件を満たす複素曲面 Y を Enriques 曲面と呼ぶ：

$$(3.1) \qquad (1) \quad H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0, \quad (2) \quad K_Y \not\cong \mathcal{O}_Y, \quad (3) \quad K_Y^2 \cong \mathcal{O}_Y.$$

Enriques 曲面は射影的代数多様体であり、その位相に関して次が知られている。

命題 3.1. Y を Enriques 曲面とする。$\mathbb{Z}$-加群として $H^2(Y, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{10} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり、$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は $c_1(K_Y)$ で生成される。$H^2(Y, \mathbb{Z})_f$ を $H^2(Y, \mathbb{Z})$ の自由部分とすれば、等長写像 $\phi_Y : H^2(Y, \mathbb{Z})_f \to E := U \oplus E_8(-1)$ が存在する。 □

E を命題 3.1 の Enriques-格子とし、$L_{K3} = U \oplus E \oplus E$ を K3-格子とする。L_{K3} 上で次の対合 I を考える：

$$(3.2) \qquad I : U \oplus E \oplus E \ni (h, m, m') \to (-h, m', m) \in U \oplus E \oplus E.$$

この時、$L_{\pm} = \{x \in L_{K3};\, Ix = \pm x\}$ は次の格子に等長的である：

$$(3.3) \quad L_+ = E(2) = U(2) \oplus E_8(-2), \quad L_- = U(2) \oplus E(2) = U(2) \oplus U(2) \oplus E_8(-2).$$

$E(2)$-2-elementary K3 曲面と Enriques 曲面との関係は次で与えられる。

命題 3.2. Y を Enriques 曲面、$\tilde{Y}$ をその普遍被覆空間とする。この時、$\tilde{Y}$ は $E(2)$-2-elementary K3 曲面であり、その対合を ι とすれば $Y = \tilde{Y}/\iota$ である。 □

命題 3.2 より、Enriques 曲面のモジュライ空間と $E(2)$-2-elementary K3 曲面のモジュライ空間とは同一視できる。

定義 3.1. $E(2)$-2-elementary K3 曲面としての marking を Enriques 曲面の marking と呼ぶ。又、$E(2)$-2-elementary K3 曲面としての周期写像を Enriques 曲面の周期写像と呼ぶ。 □

定理 1.2 より、Enriques 曲面のモジュライ空間は $\mathcal{M}_{E(2)} = \Omega^0_{E(2)}/\Gamma_{E(2)}$ と同型である（堀川、浪川）。

3.2 Borcherds Φ-関数. さて、Borcherds（[B2]）は $\Omega_{E(2)}$ 上の $\mathcal{H}_{E(2)}$ を特徴付ける保型形式を構成した。以下でその保型形式を簡単に復習する。まず格子 Λ, T を次で定める：

$$(3.4) \qquad \Lambda = U \oplus E_8(-2), \quad T = L_- = U(2) \oplus \Lambda.$$

Λ の光錐 C_Λ を次で定める：

$$(3.5) \qquad C_\Lambda = \{v \in \Lambda \otimes \mathbb{R};\, \langle v, v \rangle > 0\}.$$

Λ が双曲型格子なので、C_Λ は 2 個の連結成分から成る：$C_\Lambda = C_\Lambda^+ \coprod C_\Lambda^-$. この時、$\Omega_{E(2)}$ は次の管状領域の表示を持つ。

命題 3.3. 管状領域 $\Lambda_{\mathbb{R}} + i\,C_\Lambda$ は以下の写像により、$\Omega_{E(2)}$ と双正則である：

$$\Lambda_{\mathbb{R}} + i\,C_\Lambda \ni v \to \left(\left(\frac{1}{2}, -\frac{\langle v, v\rangle}{2}\right), v\right) \in \Omega_{E(2)}. \quad \square$$

Borcherds Φ-関数は上の管状領域の表示を用いて次の様に定義される。W_Λ を Λ の Weyl-群とする：

$$W_\Lambda = \langle s_l;\ s_l(x) = x + \langle x, l\rangle l, \quad l \in \Delta_\Lambda\rangle \subset O(\Lambda). \tag{3.6}$$

Λ のベクトル ρ, ρ' を次で定義する：

$$\rho = ((0,1),0), \quad \rho' = ((1,0),0) \in \Lambda = U \oplus E_8(-2). \tag{3.7}$$

定理 3.1 ([B2]). $\Lambda_{\mathbb{R}} + i\,C_\Lambda^+$ 上の正則関数 Φ で次を満たすものが存在する。
(1) Φ は $\mathcal{H}_{E(2)}$ に 1 次の零を持つ $\Omega_{E(2)}$ 上の重さ 4 の保型形式である。
(2) $Im\,y \gg 0$ の時、Φ は次の Fourier 展開と無限積展開を持つ：

$$\begin{aligned}\Phi(y) &= \sum_{w \in W_\Lambda} \det(w) e^{2\pi i\langle\rho, w(y)\rangle} \prod_{n>0} \left(1 - e^{2\pi i\langle n\rho, w(y)\rangle}\right)^{(-1)^n 8} \\ &= e^{2\pi i\langle\rho, y\rangle} \prod_{r \in \Pi^+} \left(1 - e^{2\pi i\langle r, y\rangle}\right)^{(-1)^{\langle r, \rho-\rho'\rangle} c\left(\frac{\langle r, r\rangle}{2}\right)}.\end{aligned}$$

ここで、Π^+ は次で定まる Λ の部分集合であり：

$$\Pi^+ = \{l \in \Lambda;\ \langle l, \rho\rangle > 0, \quad \text{or} \quad l = m\rho\ (m \in \mathbb{Z}_+)\},$$

$\{c(n)\}_{n \geq -1}$ は次の母関数で定まる数列である：

$$\sum_{n=-1}^{\infty} c(n)\, q^n = \eta(\tau)^{-8}\eta(2\tau)^8\eta(4\tau)^{-8}, \quad \eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi i\tau}. \quad \square$$

さて、$\Phi_{E(2)}$ を定理 2.1 の保型形式とする。$E(2)$-2-elementary K3 曲面の対合は固定集合を持たないから、$\Phi_{E(2)}$ は$\Omega_{E(2)}$ 上の重さ $r(E(2)) - 6 = 4$ の $\Gamma_{E(2)}$ に関する保型形式である。定理 2.1 (2) によれば、$\Phi_{E(2)}$ の零は $\mathcal{H}_{E(2)}$ に因子の意味で一致する。従って、Borcherds の定理（定理 3.1）と Kocher 原理とを組合わせて次の定理を得る。

定理 3.2 ([Y]). 非零定数 $C_{E(2)}$ が存在して、次が成立する：

$$\Phi = C_{E(2)}\, \Phi_{E(2)}.$$

特に、Ricci-平坦 Enriques 曲面 (Y_s, κ) に対して、その解析的トーションは次の式で与えられる：

$$\tau(Y_s, \kappa) = C'_{E(2)} \sqrt{vol(Y_s, \kappa)}\, \|\Phi(s)\|^{-\frac{1}{4}}.$$

ここで、$s = \pi_{E(2)}(Y_s) \in \Omega_{E(2)}$ であり、$C'_{E(2)}$ は普遍定数である。 $\square$

定理 3.2 は Harvey-Moore（[H-M]）によって既に観察されていたものである。(Jorgenson-Todorov（[J-T]）は次数 2 の Enriques 曲面の普遍被覆曲面のラプラシアンの行列式が Borcherds の Φ-関数であると主張しているが、これは間違いである。実際、この関数は $\mathcal{H}_{E(2)}$ 以外の因子でも消える。）定理 3.1 と 3.2 によれば、Enriques 曲面の解析的トーションは Jacobi のΔ-関数に類似した性質（無限積展開や判別式との一致）を持つ。この意味で定理 3.2 は Kronecker 極限公式の 2 次元版と言って良いであろう。

3.3 無限積展開を持つ Φ_S の例. 微分幾何学的出自が同一である以上、定理 2.1 に現れる他の保型形式が定理 3.1 の様な表示を持つかは興味ある問題であるが、$g(S)=0$ の場合には無限積表示を持つことが示せる。(実は類似の Fourier 展開を持つことも示せる。第 4 節を参照。)

(3.4) の表示で、$U=\mathbb{Z}e\oplus\mathbb{Z}f$, $\langle e,e\rangle=\langle f,f\rangle=0$, $\langle e,f\rangle=1$ とする。この時、$\delta=\delta_0=e-f\in\Delta_\Lambda$ と置く。Milinor の定理によれば、$\delta^\perp\cap\Lambda\cong I_{1,8}(2)=\langle 2\rangle\oplus\langle -2\rangle^8$ である：

$$\delta^\perp=\mathbb{Z}\epsilon\oplus\mathbb{Z}\delta_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}\delta_8,\quad \epsilon^2=2,\quad \epsilon\cdot\delta_i=0,\quad \delta_i\cdot\delta_j=-2\delta_{ij}. \tag{3.8}$$

$\Lambda_k:=\delta_0^\perp\cap\cdots\cap\delta_k^\perp$ と置く。L_{K3} の 2-elementary 原始的部分格子 S_k と T_k を次のように定める：

$$T_k:=U(2)\oplus\Lambda_k\subset T,\quad S_k:=T_k^\perp\cap L\supset E(2). \tag{3.9}$$

容易に確かめられるように、$g(S_k)=0$, $(r(S_k),l(S_k),\delta_{S_k})=(11+k,11-k,1)$ であり、Nikulin の分類結果からそのような格子は上の S_k (の同値類) に限る。この時、S_k-2-elementary K3 曲面の周期領域は$\Omega_{S_k}=H_{\delta_0}\cap\cdots\cap H_{\delta_k}$ で与えられるが、命題 3.3 の同型を用いて次の管状領域の表示を持つ：

$$\Lambda_{k\mathbb{R}}+iC_{\Lambda_k}\ni v\to\left(\left(\frac{1}{2},-\frac{\langle v,v\rangle}{2}\right),v\right)\in\Omega_{S_k}. \tag{3.10}$$

ここで、$C_{\Lambda_k}=C_\Lambda\cap\Lambda_{k\mathbb{R}}$ である。$\pi_k:\Lambda_\mathbb{Q}\to\Lambda_{k\mathbb{Q}}$ を直交射影とすれば、$\Pi_k^+:=\pi_k(\Pi^+)\subset\Lambda_k^\vee$ が確かめられる。さて、$l\in\Pi_k^+$ に対して $d_k(l)\in\mathbb{Z}$ を以下のように定める：

$$d_k(l):=\sum_{\lambda\in\pi_k^{-1}(l)\cap\Pi^+}(-1)^{\langle\lambda,\rho-\rho'\rangle}c\left(\frac{\langle\lambda,\lambda\rangle}{2}\right). \tag{3.11}$$

($c(n)=0$ が $n<-1$ に対して成り立つので、上の和は定義できる。) 定理 2.1 と 3.1, 3.2 を用いれば Φ_{S_k} が次の無限積表示を持つことがわかる。

定理 3.3 ([Y]). $\rho_k=\pi_k(\rho)\in\Lambda_k^\vee$ と置く。$y\in\Lambda_{k\mathbb{R}}+iC_{\Lambda_k}$, $Im\,y\gg 1$ に対して、

$$\Phi_k(y):=e^{2\pi i\langle\rho_k,y\rangle}\prod_{l\in\Pi_k^+}(1-e^{2\pi i\langle l,y\rangle})^{d_k(l)}$$

は絶対収束し、$\Lambda_{k\mathbb{R}}+iC_{\Lambda_k}$ 上の重さ $k+5$ の保型形式に解析接続される。更に、S_k のみによる正定数 C_{S_k} が存在して $\Phi_{S_k}=C_{S_k}\Phi_k$ である。特に、次の公式が成り立つ：

$$\tau_{S_k}(y)=C_{S_k}\|\Phi_k(y)\|^{-\frac{1}{4}}.\quad\square$$

注意. $g(S)=0$ 以外では、$(r,l,\delta)=(10,8,0)$ の格子 (命題 1.1 (2)) S に対して、Φ_S が定理 3.1 に類似した無限積展開を持つことが示せる。この場合、Leech 格子に関連して Borcherds が構成した Φ-関数 (を 10 次元の部分空間に制限したもの) と Jacobi Δ-関数の積が現れる。 $\square$

3.4 Φ_S とテータ関数. 本節では、前節の Φ_{S_5} が $I_{2,2}$-型領域上のテータ関数の積で書けることを説明する。Jacobi の Δ-関数が偶テータ関数の積で書けたことを思い出せば、Φ_{S_5} はこの意味でも $\Delta(\tau)$ の一般化になっている。

上半平面の一般化として次の領域 $\mathbb{H}_2$ を考える：

$$\mathbb{H}_2 := \{W \in M(2,2;\mathbb{C});\ \frac{W-W^*}{2i} > 0\}. \tag{3.12}$$

$\mathbb{H}_{2,2}$ は Ω_{S_5} に双正則であり、4 次元格子 $M = 2\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}$ (U は第 1 節の 2 次元双曲型ユニモジュラー格子、I_2 は 2 次の単位行列) を用いて以下の管状領域表示を持つ：

$$\mathbb{H}_2 = M_{\mathbb{R}} + \sqrt{-1}C_M^+ \cong \Omega_{S_5}. \tag{3.13}$$

(X,ι) を S_5-2-elementary K3 曲面とすれば、$(r,l,\delta) = (16,6,1)$ であり、次のように構成される。$\mathbb{P}^2$ 上に一般の直線 $L_1,\cdots,L_6$ を取り、それらの 15 個の交点を $p_1,\cdots,p_{15}$ とする。この時、商空間 X/ι は $\mathbb{P}^2[15]$ ($\mathbb{P}^2$ の $p_1,\cdots,p_{15}$ での blow-up) と同型であり、対合の固定集合は $X^\iota = \tilde{L}_1 \cup \cdots \cup \tilde{L}_6$ となる。但し、$\tilde{L}_i$ は L_i の $\mathbb{P}^2[15]$ における固有像である。従って、S_5-2-elementary K3 曲面のモジュライ空間は $\mathbb{P}^2$ の 6 直線のモジュライ空間とも見ることができ、その場合の周期写像の逆写像が松本により構成されている ([M])。

6 本の直線を 3 本の直線の 2 つの組への各分割に応じて、10 個の偶テータ関数が $\mathbb{H}_2$ 上に存在する：

$$\Theta_{a,b}(W) := \sum_{m\in\mathbb{Z}[i]^2} \exp\pi i\left[(n+a)^*W(n+a) + 2Re\, b^*n\right]. \tag{3.14}$$

ここで、$a,b \in \{0,\frac{1\pm i}{2}\}^2$, $a^*b \in \mathbb{Z}$ である。この条件を満たす (a,b) を偶と呼ぶ。$\Theta_{a,b}$ と Φ_{S_5} の重さと、零軌跡、Fourier 係数を比較して次の公式を得る。

定理 3.4 ([Y]). (3.13) の同一視の元で次の等式が成り立つ：

$$\Phi_5(W) = \frac{1}{2^{12}} \prod_{(a,b)\ even} \Theta_{a,b}(W).$$

特に、$\prod_{(a,b)\ even}\Theta_{a,b}$ は無限積展開を持つ。 □

$\mathbb{H}_2$ は自然に $\mathfrak{S}_2$ を含む：$\mathfrak{S}_2 = \{W \in \mathbb{H}_2;\ {}^tW = W\}$. $\mathfrak{S}_2$ 上のテータ関数 (定数) を $\theta_{a,b}(\tau)$ で表す。$\Theta_{a,b}$ の $\mathfrak{S}_2$ への制限を計算することにより次がわかる。

系 3.1. $\Delta_5(\tau) := \prod_{(\alpha,\beta)\ even}\theta_{\alpha,\beta}(\tau)$ を井草の保型形式とすれば、$\Phi_{S_5}|_{\mathfrak{S}_2} = (2^{-6}\Delta_5)^2$ である。特に、Δ_5 は無限積展開を持つ。 □

系 3.1 の結論は Gritsenko-Nikulin ([G-N1]) で得られていたものである。この系により、Δ_5 の無限積展開が実は Borcherds の Φ-関数の無限積展開から従うことがわかる。

4. 解析的トーションと Generalized Kac-Moody 超代数

本節では Gritsenko-Nikulin の Mirror 予想に関連して前節の Φ_k に（必ずしも一意的ではないが）Generalized Kac-Moody 超代数が対応することを説明する。以降、Generalized Kac-Moody（超）代数を GKM（超）代数と略す。

4.1 K3 曲面に付随した GKM 超代数. X を代数的 K3 曲面とし、その Picard 格子を S とする：$S = Pic_X$. この時、実単純ルートの集合 ${}_s\Delta^{re}$ を以下で定義する：

$$
{}_s\Delta^{re} := \{E \in S;\ E \text{ は非特異有理曲線}\}. \tag{4.1}
$$

$NEF(S) := \{h \in S^\vee;\ h \text{ は nef}\}$ を X の（一般化された）nef 類全体の集合とする。（$S \subset S^\vee \subset S_{\mathbb{Q}}$ と見ていることに注意。）${}_s\Delta^{im}_{\bar 0}$, ${}_s\Delta^{im}_{\bar 1}$ を $NEF(S)$ の点列とする。但し、各 $NEF(S)$ の元は有限回しか点列に現れないとする：

$$
\begin{aligned}
{}_s\Delta^{im}_{*} = &\{m(a)_* a;\ a \in NEF(S),\quad \langle a,a\rangle > 0\} \\
&\cup \{\tau(a)_* a;\ a \in NEF(S),\quad \langle a,a\rangle = 0\} \quad (* = 0,1).
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

ここで、$m(a)_*, \tau(a)_* \in \mathbb{Z}_+$ であり、$m(a)_* a$ は a が $m(a)_*$ 回だけ ${}_s\Delta^{im}_*$ に現れることを意味する。${}_s\Delta^{im} := {}_s\Delta^{im}_{\bar 0} \cup {}_s\Delta^{im}_{\bar 1}$ の元を虚単純ルートと呼び、${}_s\Delta^{im}_{\bar 0}$, ${}_s\Delta^{im}_{\bar 1}$ の元をそれぞれ偶虚単純ルート、奇虚単純ルートと呼ぶ。${}_s\Delta := {}_s\Delta^{re} \cup {}_s\Delta^{im}$ の元を単純ルートと呼ぶ。

注意. 代数的 K3 曲面 X に対して ${}_s\Delta^{re}$ は一意的に決まり、その幾何学的な意味も明らかであるが、${}_s\Delta^{im}$ は（取り敢えず今の所）勝手で構わない。 □

${}_s\Delta = \{h_i\}_{i \in I}$（$h_i \in S^\vee$）を単純ルート全体とし、（一般には無限次の）行列 $A = (a_{ij})$（$a_{ij} = \langle h_i, h_j\rangle_{i,j\in I}$）を考えれば、$A$ は Cartan 行列の条件を満たす：

$$
(1)\quad i \neq j \Longrightarrow a_{ij} \geq 0, \quad (2)\quad h_i \in {}_s\Delta^{re} \Longrightarrow a_{ij} \in \mathbb{Z}. \tag{4.3}
$$

A に付随して GKM 超代数 $\mathfrak{g}(S, {}_s\Delta^{im})$ が定まる。

定義 4.1. $\mathfrak{g}(S, {}_s\Delta^{im})$ は $S_{\mathbb{R}}, e_i, f_i$ $(i \in I)$ で生成され、生成元の間には次の基本関係式が存在する：
(1) $S_{\mathbb{R}}$ は $\mathfrak{g}$ の可換部分代数である。即ち、$h, h' \in S_{\mathbb{R}}$ に対して、$[h, h'] = 0$.
(2) $h \in S_{\mathbb{R}}$ ならば $[h, e_i] = -\langle h, h_i\rangle e_i$, $[h, f_i] = \langle h, h_i\rangle f_i$.
(3) $[e_i, f_j] = \delta_{ij}\, h_i$.
(4) $h \in {}_s\Delta^{re}$ ならば $(ad\, e_i)^{1+a_{ij}} e_j = (ad\, f_i)^{1+a_{ij}} f_j = 0$.
(5) $a_{ij} = 0$ ならば $[e_i, e_j] = [f_i, f_j] = 0$.
$S_{\mathbb{R}}$, e_i, f_i $(h_i \in {}_s\Delta^{re} \cup {}_s\Delta^{im}_{\bar 0})$ は $\mathfrak{g}(S, {}_s\Delta^{im})$ の偶元（その全体を $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ と書く）であり、e_i, f_i $(h_i \in {}_s\Delta^{im}_{\bar 1})$ は奇元（その全体を $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ と書く）である。 □

$Q := \sum_{\alpha \in {}_s\Delta} \mathbb{Z}_+ \alpha \subset S^\vee$ をルート格子とし、各 $\alpha \in Q$ に対して、$\mathfrak{g}_\alpha$ を以下のように定める：

$$
\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g};\ [h, x] = \langle \alpha, h\rangle x, \quad \forall h \in S_{\mathbb{R}}\}. \tag{4.4}
$$

この時、$\mathfrak{g}(S, {}_s\Delta^{im})$ は次のように分解する：

$$
\mathfrak{g}(S, {}_s\Delta^{im}) = \left(\bigoplus_{\alpha \in Q\setminus\{0\}} \mathfrak{g}_\alpha\right) \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in Q\setminus\{0\}} \mathfrak{g}_{-\alpha}\right), \quad \mathfrak{g}_0 = S_{\mathbb{R}}. \tag{4.5}
$$

$\mathfrak{g}(S, {}_s\Delta^{im}) = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ より各 $\alpha \in Q \backslash \{0\}$ に対して、$\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{\alpha,\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha,\bar{1}}$ が成り立つ。$\alpha \in Q$ の重複度を $mult\,\alpha := \dim \mathfrak{g}_{\alpha,\bar{0}} - \dim \mathfrak{g}_{\alpha,\bar{1}} \in \mathbb{Z}$ で定義する。(定義より、重複度は負の整数にもなり得る。)

Borcherds は GKM(超)代数の分母公式を見い出したが、ここではその中でも S が Weyl ベクトルを持つ場合について説明する。

定義 4.2. 以下の条件を満たすベクトル $\rho \in S_{\mathbb{Q}}$ を Weyl ベクトルと言う:

$$\langle \rho, \rho \rangle \geq 0, \quad \langle \rho, \delta \rangle = 1 \quad \forall \delta \in {}_s\Delta^{re}. \quad \square$$

注意. 双曲型格子 S が Weyl ベクトルを持つのは稀である。Nikulin によれば $r(S) \geq 3$ を満たし、かつ Weyl ベクトルを持つ L_{K3} の原始的双曲型部分格子(の同値類)は有限個である。 $\square$

$a \in {}_s\Delta^{im}$ に対して、$m(a) \in \mathbb{Z}$ を以下のように定める:
(1) $\langle a, a \rangle > 0$ ならば、$m(a) := m(a)_{\bar{0}} - m(a)_{\bar{1}}$.
(2) $\langle a, a \rangle = 0$ かつ $a \in S$ が原始的ならば、

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{\tau(na)_{\bar{0}} - \tau(na)_{\bar{1}}} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} m(ka)\, q^k. \tag{4.6}$$

ここで、$m(a)_*$, $\tau(a)_*$ は (4.2) で現れた重複度である。又、(4.6) は形式的巾級数として理解する。

定理 4.1 ([B1]). S は Weyl ベクトル ρ を持つとする。この時、次の形式的巾級数の等式が成立する:

$$\sum_{w \in W_S} \det(w) \left\{ e^{2\pi i \langle w(\rho), y \rangle} - \sum_{a \in {}_s\Delta^{im}} m(a)\, e^{2\pi i \langle w(\rho + a), y \rangle} \right\}$$
$$= e^{2\pi i \langle \rho, y \rangle} \prod_{\alpha \in Q \backslash \{0\}} \left(1 - e^{2\pi i \langle \alpha, y \rangle}\right)^{mult\,\alpha}.$$

この形式的巾級数を $\Phi_{\mathfrak{g}(S, {}_s\Delta^{im})}$ と書き、$\mathfrak{g}(S, {}_s\Delta^{im})$ の分母関数と言う。 $\square$

注意. 分母公式は S が Weyl ベクトルを持たない場合にも存在する。その場合、Weyl ベクトルは $\bigoplus_{\alpha \in {}_s\Delta} \mathbb{Z}\alpha$ (各 $\alpha \in {}_s\Delta$ を自由元として生成された加群)の双対加群の元である。又、一般には左辺の和は虚単純ルートだけでは済まなくなり、上式より複雑になる。ここで和が簡単になったのは虚単純ルートを $NEF(S)$ から選んでいるためである。 $\square$

一般に $\Phi_{\mathfrak{g}(S, {}_s\Delta^{im})}$ が正の収束半径を持つかどうか筆者は知らない。仮に無限積が適当な領域で収束したとすれば、上の公式から $\Phi_{\mathfrak{g}(S, {}_s\Delta^{im})}$ は(その領域上)S のルートに対する鏡映面にのみ 1 次の零を持つ。

例 4.1. 定理 3.1 の $\Phi(y)$ は GKM 超代数の分母関数の例である。(3.7) の ρ は Λ の Weyl ベクトルになり、${}_s\Delta^{im}_{\bar{0}}, {}_s\Delta^{im}_{\bar{1}}$ は次のように与えられる:
(4.7)

$${}_s\Delta^{im}_{\bar{0}} = \{8(n\rho);\, n \equiv 0 \mod 2,\, n > 0\}, \quad {}_s\Delta^{im}_{\bar{0}} = \{8(n\rho);\, n \equiv 1 \mod 2,\, n > 0\}.$$

但し、$8(n\rho)$ は $m(n\rho)_{\bar{*}} = 8$ を意味する。[B3] によれば、Φ は $\Lambda = U \oplus E_8(-2)$ に付随した GKM 超代数の分母関数であるばかりでなく、$U(2) \oplus E_8(-2)$ に付随した別の GKM 超代数の分母関数にもなっている。 $\square$

その他の面白い分母公式の例は、例えば [B1,3] や [G-N1,3] 等を参照。

4.2 Gritsenko-Nikulin の Mirror 予想.

定義 4.3. S_A, S_B を L_{K3} の原始的双曲型格子とする。適当な $k \in \mathbb{N}$ が存在して、$T_B = S_B^\vee = S_A \oplus U(k)$ と書ける時 S_B は S_A の Mirror 格子であると言われる。又、S_B-K3 曲面の普遍族 $\mathcal{M}_{S_B}$ は S_A-K3 曲面の普遍族 $\mathcal{M}_{S_A}$ の Mirror 族であると言われる。 □

S_B が S_A の Mirror 格子である時、S_B-K3 曲面の周期領域は S_A に付随した管状領域に双正則である：

$$\Omega_{S_B} \cong S_A \otimes \mathbb{R} + \sqrt{-1}C_{S_A}. \tag{4.8}$$

但し、C_{S_A} は S_A の光錐である（(3.5) を参照)。

注意. $k \neq 1$ の場合、S_A は S_B の Mirror 格子とは限らない。$k = 1$ ならば S_A は S_B の Mirror 格子となる。例えば、$U \oplus E_8(-1), U \oplus E_8(-2), U(2) \oplus E_8(2)$ などは自己 Mirror な格子である。 □

以下 S_A は Weyl ベクトルを持つと仮定する。一般の S_A-K3 曲面（$Pic_X = S_A$ を意味する）に付随した GKM 超代数の分母関数は、管状領域 $S_A \otimes \mathbb{R} + \sqrt{-1}C_{S_A}$ の無限遠点（$Imy = +\infty$）の近傍の形式的な関数と見なせる。従って、同型 (4.8) を経由して Mirror 族のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{S_B}$ の尖点の近傍の形式的関数と見なせる。Gritsenko, Nikulin は次の予想を提示した。

予想 4.1 ([G-N2]). S_A が Weyl ベクトルを持つならば、適当な虚ルート ${}_s\Delta^{im}$ と適当な $k \in \mathbb{N}$ が存在して、GKM 超代数 $\mathfrak{g}(S_A, {}_s\Delta^{im})$ の分母関数 $\Phi_{\mathfrak{g}(S_A, {}_s\Delta^{im})}$ は Mirror 族の周期領域Ω_{S_B} 上の保型関数になる。但し、$T_B = S_A \oplus U(k)$ である。 □

予想 4.1 が成り立つ根拠は（筆者の知る限り）何も存在しないが、多くの例で不思議と正しい。[G-N,1,3] では $r(S_A) = 3$ の場合が扱われており、[B2] の結果は $S_A = U \oplus E_8(-2)$, $k = 2$ の場合を肯定している。又、[B3] の結果を用いれば、$S_A = U, U \oplus E_8(-1), U \oplus E_8(-1) \oplus E_8(-1)$, $k = 1$ 等の場合が肯定的である。予想 4.1 に関連して、定理 3.3 は次のようにも言える。

定理 4.2 ([Y]). 予想 4.1 は $S_A = I_{1,l}(2)\,(0 \leq l \leq 8), U(2), k = 2$ に対して正しい。即ち、定理 3.3 の Φ_k に対して、Λ_k に付随した GKM 超代数 $\mathfrak{g}(\Lambda_k, {}_s\Delta^{im})$ が存在して、$\Phi_k = \Phi_{\mathfrak{g}(\Lambda_k, {}_s\Delta^{im})}$ が成り立つ。（$I_{1,l}$ は符合数 $(1,l)$ の奇ユニモジュラー格子である。） □

定理 3.3 は Fourier 展開について何も述べていないので、それが分母公式に現れる形をしていることを見なければならないが、詳細は省略する。定理 3.3 の直後の注意で述べたが、$(r, l, \delta) = (10, 10, 8)$ の格子、即ち $S_A = U \oplus E_8(-2)$ に対して、その Mirror 族 Ω_{S_A} 上には重さ 12 で判別式を特徴付ける保型関数 Ψ_{S_A} が存在する。この Ψ_{S_A} もある GKM 超代数の分母関数になることが示せる。従って、$S_A = U \oplus E_8(-2)$ に対しては、$k = 1$ と $k = 2$ に対して予想 4.1 が正しい。

上に現れたような分母関数が保型関数となる GKM 超代数の幾何学的意味や構成を知ることは（少なくとも Enriques 曲面の場合に限れば）大切な問題であると思われる。この超代数の物理的な解釈については（筆者がその内容を理解している訳ではないが）[H-M] を参照。

5. 定理 3.2 の証明の概略

本節では定理 3.2 の証明の概略を述べたい。定理 2.1 の証明の概略を述べたかったが、技術的に随分難しくなるので、最も簡単で最も果実の多い Enriques 曲面の場合だけを扱うことにした。

5.1 解析的トーション. (M,g) をコンパクト Kähler 多様体、$\square_{0,q}$ を M 上の $(0,q)$-形式に作用するラプラシアン、$\sigma(\square_{0,q}) = \{0 \leq \cdots \leq 0 \leq \lambda_{0,q}(1) \leq \lambda_{0,q}(2) \leq \cdots\}$ を $\square_{0,q}$ のスペクトル, $\zeta_{0,q}(s) := \sum_{k\geq 1} \lambda_{0,q}(k)^{-s}$ を (M,g) のスペクトル ζ-関数とする。この時、$\zeta_{0,q}(s)$ は全平面上有理型で、$s=0$ で正則である。

定義 5.1. 解析的トーションとは次式で定義される実数である：

$$\tau(M,g) := \prod_{q\geq 0} (\det \square_{0,q})^{(-1)^q q}, \quad \det \square_{0,q} := \exp\left(- \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \zeta_{0,q}(s)\right). \quad \square$$

5.2 コホモロジーの行列式と Quillen 計量. $\pi : X \to S$ を複素多様体間の固有平滑 Kähler 射とする。

定義 5.2. コホモロジーの行列式とは以下で定義される S 上の直線束である：

$$\lambda(X/S) := \bigotimes_{q\geq 0} (\det R^q \pi_* \mathcal{O}_X)^{(-1)^q}. \quad \square$$

$\lambda(X/S)$ には次の様にして Hermite 計量が入る。$g_{X/S}$ を相対接束 $TX/S := \ker \pi_*$ 上の Kähler 計量、$\mathcal{H}^{0,q}(X_t)$ をファイバー X_t 上の調和 $(0,q)$-形式の空間とする。Hodge の定理より、$\lambda(X/S)$ のファイバーは調和形式の空間の行列式と見なせる：

$$\lambda_{X_t} = \bigotimes_{q\geq 0} (\det H^q(X_t, \mathcal{O}_{X_t}))^{(-1)^q} \cong \bigotimes_{q\geq 0} \left(\det \mathcal{H}^{0,q}(X_t)\right)^{(-1)^q} \tag{5.1}$$

調和形式の積分を通じて $\lambda(X/S)$ に Hermite 直線束の構造が入り（L^2-計量と呼ばれる)、それを $\|\cdot\|_{L^2}$ と書く。

定義 5.3. $\lambda(X/S)$ の $g_{X/S}$ に関する Quillen 計量とは以下で定義される Hermite 計量のことである： $\|\cdot\|^2_Q(t) := \tau(X_t)\cdot\|\cdot\|^2_{L^2}(t)$. $\square$

次の 2 定理は Bismut, Gillet, Soulé により示されたもので、 Quillen 計量に関して最も基本的である。

定理 5.1 ([B-G-S]). $c_1(\lambda(X/S)_Q)$ を$\lambda(X/S)_Q := (\lambda(X/S), \|\cdot\|_Q)$ の Chern 形式とすれば、

$$c_1(\lambda(X/S)_Q) = \pi_*(Td(TX/S, g_{X/S}))^{(1,1)}. \quad \square$$

定理 5.2 ([B-G-S]). $g_{X/S}, g'_{X/S}$ を Kähler 計量の族、$\|\cdot\|_Q, \|\cdot\|'_Q$ を $g_{X/S}, g'_{X/S}$ に関する$\lambda(X/S)$ の Quillen 計量とすれば、

$$\log\left(\frac{\|\cdot\|'_Q}{\|\cdot\|_Q}\right)^2 = \pi_*(\widetilde{Td}(TX/S; g_{X/S}, g'_{X/S}))^{(0,0)}.$$

但し、$\widetilde{Td}(TX/S; g_{X/S}, g'_{X/S})$ は Bott-Chern 類である。 $\square$

5.3 定理 3.2 の証明. 簡単のため $\Omega_{E(2)}=\Omega$, $\mathcal{H}_{E(2)}=\mathcal{H}$, $\Gamma_{E(2)}=\Gamma$, $\tau_{E(2)}=\hat{\tau}$, $\omega_{E(2)}=\omega$, etc. とおく。

命題 5.1. (X,κ) を Ricci-平坦 Enriques 曲面とすれば、$\hat{\tau}(X,\kappa)=\sqrt{vol(X,\kappa)}\tau(X,\kappa)$ は κ に依らない。特に、$\hat{\tau}$ は Γ-不変な Ω^0 上の関数である。即ち、κ_0,κ_1 を X 上の勝手な Ricci-平坦 Kähler 計量とすれば、

$$\log\frac{\tau(X,\kappa_0)}{\tau(X,\kappa_1)}=-\frac{1}{2}\log\frac{vol(X,\kappa_0)}{vol(X,\kappa_1)}.\quad\square$$

証明. X の不変被覆空間を (Y,ι) とし、ω を Y 上の正則 2-形式とする。又、κ_* の持ち上げも同じ記号で表す。$H^q(X,\mathcal{O}_X)=0$ $(q>0)$ から $\lambda(X)(=\lambda(X/pt))=\mathbb{C}\cdot 1_X$ である。$\|\cdot\|_{Q,\kappa_*}$ を κ_* に関する$\lambda(X)$ の Quillen 計量とすれば、定義より $\|1_X\|^2_{Q,\kappa_*}=\tau(X,\kappa_*)\,vol(X,\kappa_*)$ なので、次が定理 5.2 より従う：

$$\log\frac{\tau(X,\kappa_0)\,vol(X,\kappa_0)}{\tau(X,\kappa_1)\,vol(X,\kappa_1)}=\int_X\widetilde{Td}(X;\kappa_0,\kappa_1)=\frac{1}{48}\int_Y\widetilde{c_1c_2}(Y;\kappa_0,\kappa_1).\tag{5.2}$$

κ_t $(0\le t\le 1)$ を κ_0 と κ_1 を結ぶ Ricci-平坦計量のホモトピーとする。(このようなホモトピーの存在は Yau の定理から従う。) κ_t の Ricci-平坦性は次の方程式（Ricci-平坦 Monge-Amperè 方程式）を導く：

$$\kappa_t^2=f(t)\,\omega\wedge\bar{\omega},\quad f(t)=\frac{vol(Y,\kappa_t)}{\|\omega\|^2}.\tag{5.3}$$

$L_t\in Herm(TX)$ を$\partial_t\kappa_t(u,v)=\kappa_t(L_tu,v)$ $(\forall u,v\in TX)$ で定義すれば、(5.3) より次が成り立つ：

$$Tr\,L_t=\partial_t\log f(t).\tag{5.4}$$

(Y,κ_t) の曲率を R_t とすれば、Bott-Chern 公式より次が従う：

$$\begin{aligned}\int_Y\widetilde{c_1c_2}(\kappa_0,\kappa_1)&=\int_Y\int_1^0 dt\;\partial_s|_{s=0}\,c_1(R_t+s\,L_t)c_2(R_t+s\,L_t)\\&=\int_Y\int_1^0(Tr\,L_t)c_2(R_t)\\&=\int_1^0 dt\partial_t\log f(t)\int_Y c_2(Y)=\chi(K3)\log\frac{f(0)}{f(1)}.\end{aligned}\tag{5.5}$$

$\chi(K3)=24$ であるから、(5.5) を (5.2) に代入して命題を得る。$\square$

注意. $\hat{\tau}$ が Ricci-平坦計量に依らないことから、それが Ω^0 上のΓ-不変関数に同一視できることを見るには Enriques 曲面に対する Torelli 定理を用いる。$\square$

命題 5.2. $\mathcal{M}^0$ 上、次の公式が成り立つ：

$$\frac{i}{2\pi}\bar{\partial}\partial\log\tau = -\frac{1}{2}\omega. \quad \square$$

証明. S を Ω^0 の小開集合とし、$p: X \to S$ を S 上の Enriques 曲面の普遍族とし、$p: (Y, \iota) \to S$ をその普遍被覆空間の族とする。$\{\omega_s\}_{s\in S}$ を Y/S の正則 2-形式の正則族とする。$L \to X$ を偏極とし、$g_{X/S}$ を L に付随した Ricci-平坦計量の族とする。即ち、各 $s \in S$ に対して、$\kappa_s := g_{X/S}|_{X_s}$ は Ricci-平坦計量で、$[\kappa_s] = c_1(L)$ が成り立つとする。$g_{X/S}$, κ_s の Y/S への持ち上げを $g_{Y/S}$, κ_s で表す。$g_{Y/S}$ の Ricci-平坦性から次が従う：

$$\kappa_s^2 = \frac{deg_Y\, L}{\|\omega_s\|^2}\omega_s \wedge \bar{\omega}_s. \tag{5.6}$$

これより、$c_1(X/S, g_{X/S}) = c_1(Y/S, g_{Y/S})$ は次のように計算できる：

$$\begin{aligned} c_1(X/S, g_{X/S}) &= \frac{i}{2\pi}\bar{\partial}\partial\log\frac{\kappa_s^2}{\omega_s\wedge\bar{\omega}_s} \\ &= \frac{i}{2\pi}\bar{\partial}\partial\log\frac{deg\,L}{\|\omega_s\|^2} = -\frac{i}{2\pi}\bar{\partial}\partial\log\|\omega_s\|^2 = -p^*\omega. \end{aligned} \tag{5.7}$$

ここで、最後の行は Schumacher の定理から従う。$vol(X_s, \kappa_s) = \deg L$ に注意して定理 5.1 を $p: X \to S$ に適用すると主張を得る：

$$\begin{aligned} \frac{i}{2\pi}\bar{\partial}\partial\log\hat{\tau} &= \frac{i}{2\pi}\bar{\partial}\partial\log\left[\tau(X/S, g_{X/S})vol(X/S, g_{X/S})\right] \\ &= c_1(\lambda(X/S)_Q) \\ &= p_*\left[\frac{1}{24}c_1(X/S, g_{X/S})c_2(X/S, g_{X/S})\right] \\ &= p_*\left[-\frac{1}{24}p^*\omega\wedge c_2(X/S, g_{X/S})\right] \\ &= -\frac{\chi(Enriques)}{24}\omega = -\frac{1}{2}\omega. \end{aligned} \tag{5.8}$$

但し、projection formula を第 4 行から第 5 行に行くのに用いた。 $\square$

命題 5.3. $\gamma: \Delta \to \Omega$ を正則曲線で、$\gamma(0)$ で $\mathcal{H}$ に横断的に交わるとする。この時、(γ に依存する) 定数 C が存在して、次の漸近公式が成り立つ：

$$|\log\hat{\tau}(\gamma(s))| \leq C\log|s|^2 + O(1) \quad (s \to 0).$$

特にこれより $\log\hat{\tau}$ は $\mathcal{M}$ 上局所可積分で、次のカレント方程式が成立する：

$$\frac{i}{2\pi}\bar{\partial}\partial\log\hat{\tau} = \alpha\delta_{\mathcal{H}} - \frac{1}{2}\omega.$$

ここで、$\alpha \in \mathbb{R}$ は定数で、$\delta_{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$ に台を持つ Dirac の δ-関数である。 $\square$

命題 5.3 の証明には、K3 曲面の I 型退化に対する Monge-Ampère 方程式の解の一様 C^2-評価（[Kb] の一般化）を確かめることにより示される。大事な点は、Monge-Amperè 方程式の良い（= 挙動の良くわかる）近似解を構成することにあるが、かなり技術的になるので省略する。又、判別式軌跡 $\mathcal{H}$ が $\mathcal{M}$ の既約因子であるという Enriques 曲面の特殊事情も用いている。

定理 5.3. Φ を Borcherds Φ-関数とすれば、定数 C が存在して、$\mathcal{M}$ 上、次が成り立つ：

$$\hat{\tau} = C\,\|\Phi\|^{-\frac{1}{4}}. \quad \square$$

証明. Φ は Ω 上の重さ 4 で $\mathcal{H}$ に 1 次の零を持つ保型関数なので、次のカレント方程式を満たす：

$$\frac{i}{2\pi}\bar{\partial}\partial\log\|\Phi\|^2 = 4\omega - \delta_{\mathcal{H}}. \tag{5.9}$$

命題 5.3 と (5.9) より、次が従う：

$$\frac{i}{2\pi}\bar{\partial}\partial\log\left[\hat{\tau}\|\Phi\|^{\frac{1}{4}}\right] = \left(\alpha - \frac{1}{8}\right)\delta_{\mathcal{H}}. \tag{5.10}$$

$\hat{\tau}$, $\|\Phi\|$ はともに Ω 上の Γ-不変な関数なので $\hat{\tau}\|\Phi\|^{\frac{1}{4}}$ は $\mathcal{M}$ 上の多重調和関数になる。$\dim\mathcal{M}^*\backslash\mathcal{M} = 1$ なので、Hartogus 型定理を用いて $\hat{\tau}\|\Phi\|^{\frac{1}{4}}$ は $\mathcal{M}^*$ 上の多重調和関数に拡張される。$\alpha \neq \frac{1}{8}$ とすれば、(5.10) より $\partial\log\hat{\tau}\|\Phi\|^{\frac{1}{4}}$ は既約因子 $\mathcal{H}$ のみに対数極を持つ有理形 1-形式であるが、これは留数定理に矛盾する。従って $\alpha = \frac{1}{8}$ であり、(5.10) より $\hat{\tau}\|\Phi\|^{\frac{1}{4}}$ は $\mathcal{M}^*$ 上で定数である。$\square$

References

[B-G-S]. Bismut, J.-M., Gillet, H., Soulé, C., *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles, I,II,III,* Comm. Math. Phys. **115** (1988), 49-78, 79-126, 301-351.

[B1]. Borcherds, R.E., *Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras*, Invent. Math. **109** (1992), 405-444.

[B2]. ———, *The moduli space of Enriques surfaces and the fake monster Lie superalgebra*, Topology **35** (1996), 699-710.

[B3]. ———, *Automorphic forms with singularities on Grassmannians*, Invent. Math. **132** (1998), 491-562.

[D]. Dolgachev, I., *Mirror symmetry for lattice polarized K3 surfaces*, J. Math. Sci. **81** (1996).

[G-N1]. Gritsenko, V., Nikulin, V., *Siegel automorphic form corrections of some Lorentzian Kac-Moody Lie algebras*, Amer. J. Math. **119** (1997), 181-224.

[G-N2]. ———, *K3 surfaces, Lorentzian Kac-Moody algebras and mirror symmetry*, Math. Res. Lett. **3** (1996), 211-229.

[G-N3]. ———, *Automorphic forms and Lorentzian Kac-Moody algebras, I, II*, Intern. J. Math. **9** (1998), 153-199, 201-275.

[H-M]. Harvey, J., Moore, G., *Exact gravitational threshold correction in the FHSV model*, Phys. Rev. D **57** (1998), 2329-2336.

[J-T]. Jorgenson, J., Todorov, A., *Enriques surfaces, analytic discriminants, and Borcherds's Φ-function*, Comm. Math. Phys. **191** (1998), 249-264.

[Kb]. Kobayashi, R., *Moduli of Einstein metrics on a K3 surface and degeneration of type I*, Adv. Study Pure Math. **18-II** (1990), 257-311.

[Kn]. Kondo, S., 二次形式と *K3* 曲面・*Enriques* 曲面, 数学 **42** (1990), 346-360.

[M]. Matsumoto, K., *Theta function on the bounded symmetric domain of type $I_{2,2}$ and the period map of a 4-parameter family of K3 surfaces*, Math. Ann. **295** (1993), 383-409.

[N]. Nikulin, V.V., *On the quotient groups of the automorphism group of hyperbolic forms by the subgroup generated by 2-reflections*, J. Soviet Math. **22** (1983), 1401-1476.

[R-S]. Ray, D.B., Singer, I.M., *Analytic torsion for complex manifolds*, Ann. of Math. **98** (1973), 154-177.

[Y]. Yoshikawa, K.-I., *Generalized Enriques surfaces and analytic torsion*, math.AG/9808129 (1998).