代数幾何学シンポジウム記録
1998年度　pp.28-38

(一般化) ミラー対称性予想について

高橋 篤史
数理解析研究所博士課程 1 年

1998 年 11 月 10 日

Introduction

まず, ミラー対称性予想の物理的背景およびそれから導かれるさまざまな数学的定式化について簡単に説明したい. この現象はよく知られているように, 超弦理論のコンパクト化の理論において N=2 の超対称性を持った共形場の理論の双対性として発見された. 最近では, 超弦理論の双対性の 1 つである T-duality として通常次のように説明される.

事実 1 (物理におけるミラー対称性). *ある 3 次元 Calabi–Yau 多様体の組 (M, W) があって, M 上の Type IIA 超弦理論は W 上の Type IIB 超弦理論と等価である.*

ここで「等価」とは, たとえば観測される素粒子の数およびそれらの間の相互作用 (相関関数) などが一致することを意味する. この現象から, 相関関数などの物理量を幾何学的に定式化することによって, さまざまな数学的に興味深い予想が立てられる. 以下にそれらの直感的にわかりやすい説明を列挙する. (詳しくは, [9][14][20] 等参照)

ミラー対称性予想 (4 種類)
M を n 次元 Calabi–Yau 多様体とするとき, 次の性質を満たす n 次元 Calabi–Yau 多様体 W が存在する.

1. **Topological Mirror Conjecture**:
$$h^{p,q}(M) = h^{n-p,q}(W).$$
2. **(Classical) Mirror Conjecture**: M の複素化されたケーラー構造の moduli 空間が W の複素構造の moduli 空間と同型となる.
3. **Geometric Mirror Conjecture**: W は M の special Lagrangian n- トーラス の moduli 空間となる.
4. **Homological Mirror Conjecture**: M 上の連接層の derived category が W の Fukaya category と同値になる.

それぞれの予想の背後にある物理的考察などから, $4 \leftrightarrow 3 \to 2 \to 1$ という強弱関係が成り立つと思われる (個人的には逆も成り立つと思う).

ここで扱いたいミラー対称性のクラスは, 予想 2 の局所理論版である. そこで必要なので少し背景の物理に戻りたいと思う. Type II 超弦理論を 3 次元 Calabi–Yau 多様体 M にコンパクト化すると, その world sheet theory としては Calabi–Yau 多様体 M を標的空間とする $N = 2$ 超対称性を持ったシグマ模型が得られる. さらにそれを twist して topological limit をとることによって, A-model, B-model という 2 種類の位相的弦理論が得られることが知られている [19]. 少し説明をしてお

くと, A-model とはリーマン面（境界付きのものも許す）から多様体への正則写像の数え上げに対応し, B-model は Calabi–Yau 多様体またはその上の正則ベクトル束の変形理論に対応するものである. 位相的弦理論は, 元の超弦理論という非常に難しい対象に比べて, はるかに物理的にも数学的にも取り扱いやすい. すると最初に述べた「事実」は次のようになる.

事実 2 (予想 2 の物理的記述). *M 上の A-model は W 上の B-model と等価である.*

よって, この「物理的事実」を定式化してミラー対称性の背景にある「数学的対象」を解明することが問題となる. そこで, Kontsevich–Manin[10] は (閉じた) 位相的弦理論の数学的定式化として Cohomological Field Theory (以下コホモロジー的場の理論と呼ぶ) という概念を導入し, (closed) A-model (Gromov–Witten invariant の理論) を定式化した. 一方で, (closed) B-model については現在に至るまであまりよくわかっていない. もう少し具体的にいうと, 3 点相関関数などの一部の量については, 基本的に層係数コホモロジーの積であり非常にわかりやすく, さらに多様体の周期を用いて計算が可能である場合もあるが, これらは A-model 側では $g=0$ に対応する部分だけであり, さらにこの場合でも, 全ての $c_1=0$ の多様体に対して統一的に取り扱う枠組みはまだ理解されていない, ということである.

我々の目的は, (closed) B-model ($g=0$) を Primitive Form の理論 (の枠組み) として理解し, ミラー対称性を Gromov–Witten 不変量の理論から定まるコホモロジー的場の理論と Primitive Form の理論から定まるそれとの同型として定式化することである. このように考えることの背景には [18] に述べられている, 位相的シグマ模型と位相的 Landau–Ginzburg (orbifold) 模型と呼ばれるものの等価性がある. そして, Primitive Form の理論は位相的重力に結合した位相的 Landau–Ginzburg 模型と呼ばれるものに対応している (例えば [11][17] 参照). このアプローチの長所は, Calabi–Yau 多様体以外に対してもミラー対称性を見ることができるという点である. とくに, $\mathbb{CP}^1$ に対して具体的にミラー多様体 $\mathbb{C}^*$ が構成されることを説明する.

Contents

1 コホモロジー的場の理論

H を $\mathbb{Z}_2$-graded な有限次元 $k=\mathbb{Q}$ (または $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) ベクトル空間, $\eta: H\times H\to k$ を非退化な pairing, $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ $(2g+n\geq 3)$ を種数 g の n 点付きのリーマン面のモジュライ空間の Deligne–Mumford コンパクト化とする. $\{\mathcal{O}_a\}$ を H の基底とし, $\eta_{ab}:=\eta(\mathcal{O}_a,\mathcal{O}_b)$ と書く.

定義 1.1 **([10][12]).** H と次の条件を満たす k 線形写像 $I_{g,n}: H^n\to H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},k)$ の組を**コホモロジー的場の理論** と呼ぶ.

1. $I_{g,n}$ は両辺の自然な S_n の作用に関して共変的である.
2. $g_i\geq 0, 2g_i+n_i-3\geq 0, (i=1,2)$ なる任意の分割 $g=g_1+g_2$, $\sigma:\{1,\ldots,n\}=S_1\coprod S_2$, $n_i=|S_i|$ に対する自然な写像 $\varphi_\sigma:\overline{\mathcal{M}}_{g_1,n_1+1}\times\overline{\mathcal{M}}_{g_2,n_2+1}\to\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, に対して,

$$\varphi_\sigma^*(I_{g,n}(\mathcal{O}_{a_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{O}_{a_n}))=\epsilon(\sigma)(I_{g_1,n_1+1}\otimes I_{g_2,n_2+1})((\bigotimes_{p\in S_1}\mathcal{O}_{a_p})\otimes\Delta\otimes(\bigotimes_{q\in S_2}\mathcal{O}_{a_q})).$$

ここで $\Delta := \sum_{ab} \mathcal{O}_a \eta^{ab} \mathcal{O}_b$, $\eta^{ab} := (\eta_{ab})^{-1}$, $\epsilon(\sigma)$ は $\mathcal{O}_{a_1}, \ldots, \mathcal{O}_{a_n}$ の odd な元の入れ替えによって出る符号である.

3. 2点の張り合わせによって得られる写像 $\psi : \overline{\mathcal{M}}_{g-1,n+2} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, に対して,

$$\psi^*(I_{g,n}(\mathcal{O}_{a_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}_{a_n})) = I_{g-1,n+2}(\mathcal{O}_{a_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}_{a_n} \otimes \Delta).$$

次に、 CohFT $(H, I_{g,n})$ に対応する相関関数を次のように定義する。

$$\langle \mathcal{O}_{a_1} \ldots \mathcal{O}_{a_n} \rangle_g := \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} I_{g,n}(\mathcal{O}_{a_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}_{a_n}).$$

相関関数の母函数を考えると都合がよい場合が多い。

定義 1.2. H 上の形式的な関数 F_g を

$$F_g := \sum_{n,a_1,\ldots,a_n} \epsilon(a) \frac{1}{n!} t^{a_1} \ldots t^{a_n} \langle \mathcal{O}_{a_1} \ldots \mathcal{O}_{a_n} \rangle_g$$

で定義し、種数 g の **free energy** と呼ぶ.

一般に, $g \neq 0$ のときは非常に難しいので, $g = 0$ に限って考察する. つまり **形式的 Frobenius 多様体** (formal Frobenius manifold) ([6][12] 参照) と呼ばれる 3 つ組 (H, η, F_0) について考える. これは次の性質を持つ.

命題 1.1. $C_{abc} := \partial_a \partial_b \partial_c F_0$, $C_{ab}^c := \sum_d C_{abd} \eta^{cd}$ とおいたとき,

$$\mathcal{O}_a \circ \mathcal{O}_b := \sum_c C_{ab}^c \mathcal{O}_c$$

によって C_{ab}^c は $H \otimes k[[t]]$ 上に可換かつ結合的な積構造を定める.

積が結合的であることから, 次の式が成り立つ.

$$\sum_e C_{ab}^e C_{ec}^d = (-1)^{\tilde{a}(\tilde{b}+\tilde{c})} \sum_e C_{bc}^e C_{ea}^d.$$

これを **WDVV 方程式**と呼ぶ. WDVV 方程式は, Fano 多様体などの Gromov–Witten 不変量を求める際に非常に有効である.

2 コホモロジー的場の理論の構成

2.1 Gromov–Witten 不変量の理論

まず Gromov–Witten 不変量の理論によるコホモロジー的場の理論の構成について簡単に述べておこう. Gromov–Witten 不変量とは, 大雑把に言って閉リーマン面から多様体への正則写像の数え上げのことである. これを定式化するために, 安定写像の概念が提案された [10]. ここでは簡単のため, V を複素数上定義された滑らかな射影的多様体とする.

定義 2.1. 次の条件を満たす組 $(C; \{x_1, \ldots, x_n\}; f)$ を安定写像 (stable map) と呼ぶ.

1. C は高々通常 2 重点のみを持つ閉リーマン面で, $n \geq 0$ 個の互いに異なる滑らかな点 x_i を持つ.

2. $f : C \to V$ は, 像を保つような連続的自己同型を持たない正則写像.

ここで, $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(V,\beta)$ を, $f_*([C])=\beta$ なる種数 g の n 点つき安定写像の moduli 空間とする.

命題 2.1 ([3][4][5]). **仮想基本類** (*virtual fundamental class*) と呼ばれる $\mathbb{Q}$ 係数 *Chow* 群の元

$$[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(V,\beta)]_{virt}\in A_{c_1(V)(\beta)+(3-\dim_{\mathbb{C}}V)(g-1)+n}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(V,\beta))\otimes\mathbb{Q}$$

が存在して, **Gromov-Witten 類** と呼ばれる写像 *[10]*

$$I^V_{g,n,\beta}:H^*(V,\mathbb{Q})^n\to H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{Q})$$

を導く.

$2g+n\geq 3$ の時は自然な写像

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(V,\beta)\to\overline{\mathcal{M}}_{g,n}\times V^n,\ \ (C;\{x_1,\ldots,x_n\};f)\mapsto(C^{stable};\{x_1,\ldots,x_n\})\times(f(x_1),\ldots,f(x_n))$$

がある. この写像による $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(V,\beta)]_{virt}$ の $A^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}\times V^n)\otimes\mathbb{Q}$ における像を $C_{g,n}(V,\beta)$, 写像の各成分への射影をそれぞれ π_1, π_2 と書く.

命題 2.2. 複素化した *Kähler* 形式 $\omega\in H^2(V,\mathbb{R})+\sqrt{-1}\mathcal{K}$ (ここで $\mathcal{K}$ は *Kähler* 錐) を一つ固定して, $\gamma\in H^*(V)$ に対して

$$I^{V,\omega}_{g,n}(\gamma^{\otimes n}):=\sum_{\beta\in H_2(V,\mathbb{Z})}e^{2\pi\sqrt{-1}\int_\beta\omega}\pi_{1*}\left(\pi_2^*(\gamma^{\otimes n})\cup C_{g,n}(V,\beta)\right)$$

とすることでコホモロジー的場の理論が構成できる.

命題 1.1. によって $H^*(V)\otimes\mathbb{C}[[t]]$ 上の可換かつ結合的な積構造が定まるが, $t=0$ とすることで $H^*(V)$ 上に環構造が定まる. この環を量子コホモロジー環と呼ぶ.

2.2 Primitive Form の理論

一方で, primitive form の理論からも形式的 Frobenius 多様体を構成することができる [15][16] [17].
f を原点に孤立特異点を持つ重みつき斉次多項式, $\mathcal{R}_0$ を

$$\mathcal{R}_0:=\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}\Big/\left(\frac{\partial f}{\partial z_0},\ldots,\frac{\partial f}{\partial z_n}\right),$$

で定まる Jacobi 環とし, $\mu:=\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{R}_0$ とおく. ここで次の図式を (Z,X,S,T) と書く.

$$\begin{array}{ccc}
Z^{n+1+\mu}:=X\times_T S & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & X^{n+\mu}\\
{\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q}\\
S^\mu & \xrightarrow{\pi} & T^{\mu-1}
\end{array}$$

ここで, δ_0 は S 上の原点 0 において非特異な正則ベクトル場, π は $\pi^{-1}\mathcal{O}_T=\{g\in\mathcal{O}_S:\delta_0 g=0\}$ となるような正則な submersion $S\to T$, q は正則な射影である.
さらに, 簡単のため次のように (Z,X,S,T) に次のように局所座標系を入れておく:

$(t')=(t^1,\ldots,t^{\mu-1})$ T の局所座標系.

$(t)=(t^0,t')$ S の局所座標系で, $(\delta_0 t^0=1,\ t^0(0)=0)$.

$(z,t')=(z_0,\ldots,z_n,t')$ X の局所座標系.

(z,t) 　Z の局所座標系.

これらの準備のもとで, LG system を定義する.

定義 2.2. 次の 3 つの条件を満たす Z 上の正則関数 $F(z,t)$ のことを (Z,X,S,T) 上の **LG system** と呼ぶ.

1. $F(z,0)=f(z)$.
2. $\hat{\delta}_0 F=1$, $F(0)=0$.
3. $$T(S)_0 \to \mathcal{R}_0 = \mathcal{O}_{p^{-1}(0),0}\Big/\Big(\frac{\partial f}{\partial z_0},\ldots,\frac{\partial f}{\partial z_n}\Big), \quad \delta \mapsto \hat{\delta}F|_{p^{-1}(0)},$$
   は $\mathbb{C}$ ベクトル空間の同型を与える.

注意. ここで定義した LG system は [15][16] では, Hamiltonian system と呼ばれている. ここでは [7][8] と同様に物理の Landau–Ginzburg 模型にちなんで LG system と呼ぶことにした.

primitive form を定義するために必要な residual product および Gauss–Manin 接続 を導入するため次の量を定義しておく.

$\mathcal{C}$ 　$:= \{(z,t)\in Z \mid F(z,t)=t^0-F^0(z,t')=0,\ \frac{\partial F}{\partial z_0}=0,\ldots,\frac{\partial F}{\partial z_n}=0\}$
$= \{(z,t')\in X \mid \frac{\partial F^0}{\partial z_0}=0,\ldots,\frac{\partial F^0}{\partial z_n}=0\}$.

Der_S 　S 上の正則ベクトル場の germ のなす sheaf.

$\mathcal{G}$ 　$:= \{\delta\in\pi_* Der_S : [\delta_0,\delta]=0\} \simeq \sum_{i=0}^{\mu-1}\mathcal{O}_T\frac{\partial}{\partial t^i}$.

LG system の定義によって C は T 上 flat であるから次のことが言える.

補題 2.3. $\mathcal{O}_T$-準同型写像
$$\mathcal{G}\to q_*\mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \quad \delta\mapsto\hat{\delta}F|_{\mathcal{C}}.$$
は同型となる. そして結果として, $\mathcal{G}$ に結合的な可換環の構造および t^0-積 の構造が次のようにして定義することができる.

$$\widehat{(\delta\circ\delta')}F|_{\mathcal{C}} := \hat{\delta}F|_{\mathcal{C}}\cdot\hat{\delta}'F|_{\mathcal{C}}, \quad \widehat{(t^0\circ\delta)}F|_{\mathcal{C}} := t^0|_{\mathcal{C}}\cdot\hat{\delta}F|_{\mathcal{C}}.$$

この環構造 $\circ$ を **residual product** と呼んでいる.
さらに天下りであるが, 次の量も定義する.

$\pi_*\mathcal{H}_F^{(0)}$ 　$:= q_*\Omega^{n+1}_{X/T}/dF^0\wedge d(q_*\Omega^{n-1}_{X/T})$.

$\pi_*\mathcal{H}_F^{(-1)}$ 　$:= q_*\Omega^{n}_{X/T}/(dF^0\wedge q_*\Omega^{n-1}_{X/T}+dq_*\Omega^{n-1}_{X/T})$.

$q_*\Omega_F$ 　$:= q_*\Omega^{n+1}_{X/T}/dF^0\wedge q_*\Omega^{n}_{X/T}$.

これらから $\mathcal{O}_T$ 完全系列

$$0\to\pi_*\mathcal{H}_F^{(-1)}\xhookrightarrow{dF^0}\pi_*\mathcal{H}_F^{(0)}\xrightarrow{r^{(0)}}q_*\Omega_F\to 0,$$

を得る.

定義 2.3.

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t^i}}[\zeta] = (-1)^i[(dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^{\mu-1})^{-1} dF^0 \wedge dt^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dt^i} \wedge \cdots \wedge dt^{\mu-1} \wedge d\zeta],$$

によって定義される $\nabla : \pi_* Der_S \times \pi_* \mathcal{H}_F^{(-1)} \to \pi_* \mathcal{H}_F^{(0)}$ 共変微分のことを **Gauss–Manin 接続** と呼ぶ.

Gauss–Manin 接続は可積分であり, また次の同型を導く.

$$\nabla_{\delta_0} : \pi_* \mathcal{H}_F^{(-1)} \simeq \pi_* \mathcal{H}_F^{(0)}, \quad \nabla_{\delta_0}[\zeta] = [d\zeta].$$

これらの準備のもとで, higher residue pairing および primitive form が定義される.

定義 2.4. $F(z,t)$ を LG system とする. 次の性質を満たす $\mathcal{O}_T$- 双線形形式の無限列

$$K^{(k)} : \pi_* \mathcal{H}_F^{(0)} \times \pi_* \mathcal{H}_F^{(0)} \to \mathcal{O}_T, \quad k \in \mathbb{N}$$

のことを **higher residue pairing** と呼ぶ:

1. k が偶数のとき (奇数のとき), $K^{(k)}$ は対称 (反対称) である.
2. $[\phi_1 dz_0 \wedge \cdots \wedge dz_n]$, $[\phi_2 dz_0 \wedge \cdots \wedge dz_n] \in \pi_* \mathcal{H}_F^{(0)}$ に対して,
$$K^{(0)}([\phi_1 dz], [\phi_2 dz]) = \mathrm{Res}_{X/T} \begin{bmatrix} \phi_1 \phi_2 dz_0 \wedge \cdots \wedge dz_n \\ \dfrac{\partial F}{\partial z_0} \cdots \dfrac{\partial F}{\partial z_n} \end{bmatrix}.$$
3. $\omega_1 \in \pi_* \mathcal{H}_F^{(-1)}$, $\omega_2 \in \pi_* \mathcal{H}_F^{(0)}$ に対して $K^{(k)}(\omega_1, \omega_2) = K^{(k-1)}(\nabla_{\delta_0}\omega_1, \omega_2)$.
4. $\omega_1, \omega_2 \in \pi_* \mathcal{H}_F^{(0)}$ に対して $K^{(k)}(t^0\omega_1, \omega_2) - K^{(k)}(\omega_1, t^0\omega_2) = (n+k)K^{(k-1)}(\omega_1, \omega_2)$.
5. $\omega_1, \omega_2 \in \pi_* \mathcal{H}_F^{(-1)}$ および $\delta \in \mathcal{G}$ に対して $\delta K^{(k)}(\omega_1, \omega_2) = K^{(k)}(\nabla_\delta \omega_1, \omega_2) + K^{(k)}(\omega_1, \nabla_\delta \omega_2)$.

$K^{(0)}$ は 非退化な $\mathcal{O}_T$- 双線形形式 $J : q_* \Omega_F \times q_* \Omega_F \to \mathcal{O}_T$ を定めることに注意する.
上で定義された higher residue pairing を用いて, **primitive form** が次のように定義される.

定義 2.5. $\zeta^{(0)} \in \Gamma(S, \mathcal{H}_F^{(0)})$ は, 次の 5 つの条件を満たすとき **primitive form** と呼ばれる:

1. $r^{(0)}(\zeta^{(0)}) \in \Gamma(C, \Omega_F)$ は Ω_F の $\mathcal{O}_C$- 基底である.
2. $\delta, \delta' \in \mathcal{G}$ に対して $K^{(1)}(\nabla_\delta \zeta^{(-1)}, \nabla_{\delta'}\zeta^{(-1)}) = 0$.
3. ある定数 r に対し, $\nabla_E \zeta^{(0)} = (r-1)\zeta^{(0)}$.
4. $k \geq 2$ および $\delta, \delta', \delta'' \in \mathcal{G}$ に対して $K^{(k)}(\nabla_\delta \nabla_{\delta'} \zeta^{(-2)}, \nabla_{\delta''}\zeta^{(-1)}) = 0$.
5. $k \geq 2$ および $\delta, \delta' \in \mathcal{G}$ に対して $K^{(k)}(t^0 \nabla_\delta \zeta^{(-1)}, \nabla_{\delta'}\zeta^{(-1)}) = 0$.

ここで $\zeta^{(-k)} := (\nabla_{\delta_0})^{-k}\zeta$ とした.

primitive form の定義 1 により $\mathcal{O}_T$- 同型写像

$$\mathcal{G} \simeq q_* \Omega_F, \quad \delta \mapsto \delta F|_C \cdot r^{(0)}(\zeta^{(0)})$$

がある. すると primitive form の定義 4, 5 によって, 接続 $\tilde{\nabla} : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ および $\mathcal{O}_T$- 自己準同型 $N : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ が次のように定まる.

$$\nabla_\delta \nabla_{\delta'} \zeta^{(-2)} = \nabla_{\delta \circ \delta'} \zeta^{(-1)} + \nabla_{\tilde{\nabla}_\delta \delta'} \zeta^{(-2)},$$

$$t^0\nabla_\delta\zeta^{(-1)} = \nabla_{t^0\circ\delta}\zeta^{(-1)} + \nabla_{N\delta}\zeta^{(-2)}, \quad \delta \in \mathcal{G}.$$

これらから次のことがいえる:

$$\tilde{\nabla}_\delta(N\delta') = N(\tilde{\nabla}_\delta\delta'), \quad \delta,\delta' \in \mathcal{G},$$

$$[\tilde{\nabla}_\delta, \tilde{\nabla}_{\delta'}] = \tilde{\nabla}_{[\delta,\delta']}, \quad \delta,\delta' \in \mathcal{G},$$

$$\tilde{\nabla}_\delta\delta' - \tilde{\nabla}_{\delta'}\delta = [\delta,\delta'], \quad \delta,\delta' \in \mathcal{G},$$

$$\delta J(\delta',\delta'') = J(\tilde{\nabla}_\delta\delta',\delta'') + J(\delta',\tilde{\nabla}_\delta\delta''), \quad \delta,\ \delta',\ \delta'' \in \mathcal{G},$$

ここで記号を簡単にするため, $J(\delta' F|_C \cdot r^{(0)}(\zeta^{(0)}), \delta'' F|_C \cdot r^{(0)}(\zeta^{(0)}))$ を $J(\delta,\delta')$ と書いた.

この接続は torsion free で J に関して計量的, しかも可積分であるので,

$$\ker\tilde{\nabla} = \bigoplus_{i=0}^{\mu-1}\mathbb{C}\frac{\partial}{\partial t^i}.$$

を満たす S の座標系 $t^0,\ldots,t^{\mu-1}$ が線形変換を除いてただ一つ存在する. とくに $J(\delta_i,\delta_j)$ がすべての $\delta_i,\delta_j \in \ker\tilde{\nabla}$ に対して定数であることがわかる. これを平坦座標系 (flat coordinate system) と呼ぶ.

また, N は $\ker\tilde{\nabla}$ 上の $\mathbb{C}$- 自己準同型であることがわかる. N の固有値 $\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{\mu-1}\}$ を **exponent** と呼ぶ.

μ 次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $H_F^{(0)}$ を次で定義しよう.

$$\begin{aligned} H_F^{(0)} &:= q_*\Omega_F\,/m_0q_*\Omega_F \\ &\simeq \bigoplus_{i=0}^{\mu-1}\mathbb{C}\delta_i = \ker\tilde{\nabla}. \end{aligned}$$

ここで, $m_0 = (t') := (t^1,\ldots,t^{\mu-1})$ は $\mathcal{O}_{T,0}$ の極大イデアルとする.

次に, $H_F^{(0)} \otimes \mathbb{C}[[t]]$ に residual product $\circ$ によって積構造を入れる:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^i}\circ\frac{\partial}{\partial t^j}\right)F = \frac{\partial F}{\partial t^i}\cdot\frac{\partial F}{\partial t^j}, \quad \mathrm{mod}\ \left(\frac{\partial F}{\partial z^0},\ldots,\frac{\partial F}{\partial z^n}\right).$$

$$\frac{\partial}{\partial t^i}\circ\frac{\partial}{\partial t^j} = \sum_{k=0}^{\mu-1}C_{ij}^k\frac{\partial}{\partial t^k}.$$

$$C_{ijk} := \sum_l C_{ij}^l J\left(\frac{\partial}{\partial t^l},\frac{\partial}{\partial t^k}\right) = K^{(0)}(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t^j}}\zeta^{(-2)}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t^k}}\zeta^{(-1)}).$$

primitive form の定義 2,4 によって

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t^l}C_{ijk} =& K^{(0)}(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t^l}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t^j}}\zeta^{(-2)}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t^k}}\zeta^{(-1)}) \\ &+ K^{(1)}(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t^j}}\zeta^{(-2)}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t^l}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t^k}}\zeta^{(-2)}) \\ =& \frac{\partial}{\partial t^i}C_{ljk}, \end{aligned}$$

であることから, ある正則関数 Φ_F があって

$$C_{ijk} = \frac{\partial}{\partial t^i}\frac{\partial}{\partial t^j}\frac{\partial}{\partial t^k}\Phi_F,$$

と書けることがわかる. すなわち, 次の結果を得る.

定理 2.4. *LG system* $F(z,t)$ *に対して higher residue pairing* $K^{(k)}$ *および primitive form* $\zeta^{(0)}$ *が与えられたとする．このとき* $(H_F^{(0)}, J, \Phi_F)$ *は* $\mathbb{C}$ *上の形式的 Frobenius 多様体となる．*

この結果は, primitive form の定義からのみ導かれることに注意する．ここまでの議論では, 初期条件の正則関数 f として斉次多項式を考えてきた．この場合は [15][16] 等で示されているように, higher residue pairing および primitive form が存在している．よって常に形式的 Frobenius 多様体 が得られる．さらに, この構成を注意深く見ることで次のことがわかる．

命題 2.5. *LG system* F *に対して*

1. C *が* T *上 flat である．*
2. *higher residue pairing が存在する．*
3. *primitive form が存在する．*

の 3 条件が満たされるならば, 正則関数 $f = F(z,0)$ *に対して形式的 Frobenius 多様体を構成することができる．*

すなわち primitive form の理論は, 形式的 Frobenius 多様体の 1 つの構成法と捉えることができる．

3 一般化ミラー対称性予想

これまでの準備により, 次の一般化ミラー対称性予想 (*Generalized Mirror Symmetry Conjecture*) が考えられる．通常ミラー対称性というときには, Calabi–Yau 多様体に限るので, ここでは Givental [7][8] に従い「一般化」という言葉を用いる．

予想 3.1. M *を Kähler 多様体とし, 複素化した Kähler 形式* ω *を 1 つ固定する．このとき, LG system* F *と* F *に対する primitive form が存在して,* $(H^*(M), \int_M, F_0^\omega)$ *と* $(H_F^{(0)}, J, \Phi_F)$ *は形式的 Frobenius 多様体として同型となる．*

本当は, 形式的 Frobenius 多様体としての同型よりも強い条件であるコホモロジー的場の理論としての同型を要請したいが, 今のところ primitive form の理論からコホモロジー的場の理論を導くことはできていないので, この形の予想にした．これは周期積分から高い種数の代数曲線の数え上げをすることに対応しており, 非常に重要な問題であると考えている．

Calabi–Yau 多様体のミラー対称性も含めて考える際には, 上で述べた予想を少し変更する必要がある．話を明快にするためここでは省略したが, Barannikov–Kontsevich の構成法 [1] を用いて予想を定式化する．この Barannikov–Kontsevich の構成法も primitive form の理論による構成法の 1 つと考えるのが自然である ($f = 0$ として考える)．

われわれの主張は, ミラー予想は

$$M \text{ 上の Gromov–Witten 不変量の理論} \overset{\text{コホモロジー的場の理論}}{\Longleftrightarrow} (W,f) \text{ 上の Primitive form の理論}$$

として定式化するのがよい, ということである．次の節では, このことの根拠として, 具体的に $\mathbb{CP}^1$ のミラー対称性について考察する．

4 $\mathbb{CP}^1$ のミラー対称性

n 次元扇 Σ により得られるトーリック多様体 $\mathbb{P}_\Sigma$ の量子コホモロジー環が, Laurent 多項式

$$f_\varphi(z) = \sum_{i=1}^{d} \exp(\varphi(v_i))^{-1} z^{v_i}$$

で定義される Jacobi 環

$$QH_\varphi^*(\mathbb{P}_\Sigma,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[z_1^\pm,\ldots,z_n^\pm] \Big/ (z_1\frac{\partial f_\varphi}{\partial z_1},\ldots,z_n\frac{\partial f_\varphi}{\partial z_n}) \ ,$$

となることが, Batyrev によって示されている [2]. ここで $v_1,\ldots,v_d$ は扇 Σ のすべての 1 次元錐の生成元の集合, φ は $\mathbb{P}_\Sigma$ の複素化された Kähler 錐の元である.

このことから, $((\mathbb{C}^*)^n, f_\varphi)$ に対して primitive form の理論が構成できて, それが $\mathbb{P}_\Sigma$ のミラーになっているのではないか, という予想が立てられる. これは $\mathbb{CP}^1$ に対しては実際に示すことができる [17].

$\mathbb{CP}^1$ の量子コホモロジー環は

$$QH_q^*(\mathbb{CP}^1,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[z,z^{-1}] \Big/ (z\frac{\partial f}{\partial z}) \ ,$$

で与えられる. ただし

$$f := z + qz^{-1}, \quad 0 < |q| < 1$$

である.

(Z,X,S,T) を

$$\begin{array}{ccc} Z := \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\hat{\pi}} & X := \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ S := \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\pi} & T := \mathbb{C}, \end{array}$$

として

$$F(z,t) := t^0 + z + q\exp(t^1)z^{-1}, \quad 0 < |q| < 1.$$

とおく.

すると, 写像

$$T(S)_0 \simeq \mathbb{C}\frac{\partial}{\partial t^0} \oplus \mathbb{C}\frac{\partial}{\partial t^1} \to \mathbb{C}[z,z^{-1}] \Big/ (z\frac{\partial f}{\partial z}) \ , \quad \delta \mapsto \hat{\delta}F|_{p^{-1}(0)},$$

は $\mathbb{C}$ ベクトル空間の同型であるから, F を LG system と呼んでよい.

この LG system に対しても, 2 節と同様に residual product や Gauss–Manin 接続を定義することができる. さらに, 技術的になるので証明を省略するが, higher residue pairing が存在することが示せる.

命題 4.1. $K^{(0)}$ が

$$\begin{aligned} K^{(0)}([\phi_1\frac{dz}{z}],[\phi_2\frac{dz}{z}]) &= \sum_{z\frac{\partial F}{\partial z}=0} \frac{\phi_1\phi_2}{z\frac{\partial}{\partial z}(z\frac{\partial F}{\partial z})} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_\gamma \frac{\phi_1\phi_2}{z\frac{\partial F}{\partial z}}\frac{dz}{z}, \end{aligned}$$

で与えられるような higher residue pairings $K^{(k)}$ が存在する.

higher residue pairings $K^{(k)}$ が与えられると primitive form を定義することができるが, この場合実際に次のように与えられることがわかる.

定理 4.2. LG system $F(z,t) = t^0 + z + q\exp(t^1)z^{-1}$ に対する primitive form が存在して,

$$\zeta^{(0)} = \left[\frac{dz}{z}\right], \quad r = 0,$$

と与えられる. さらに (t^0,t^1) は flat coordinates である.

これもかなり技術的であるので，ここでは証明は省略するが，次の式

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t^1}\cdot\frac{\partial F}{\partial t^1} &= q\exp(t^1)z^{-1}\cdot q\exp(t^1)z^{-1}\\ &= q\exp(t^1) - q\exp(t^1)z^{-1}(z - q\exp(t^1)z^{-1})\\ &= q\exp(t^1)\frac{\partial F}{\partial t^0} - z\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial t^1}(\frac{\partial F}{\partial t^1}),\end{aligned}$$

の $z\frac{\partial F}{\partial z}$ に比例する項が F の 2 階微分で書けていることが本質的である．

上の式および

$$J(\frac{\partial}{\partial t^0},\frac{\partial}{\partial t^1}) = \sum_{z\frac{\partial F}{\partial z}=0}\frac{\frac{\partial F}{\partial t^0}\cdot\frac{\partial F}{\partial t^1}}{z\frac{\partial}{\partial z}(z\frac{\partial F}{\partial z})} = \sum_{z-q\exp(t^1)z^{-1}=0}\frac{q\exp(t^1)z^{-1}}{z+q\exp(t^1)z^{-1}} = 1,$$

から，

$$\Phi_F = \frac{1}{2}(t^0)^2t^1 + q\exp(t^1)$$

と与えられることがわかる．これは期待されたように，$\mathbb{CP}^1$ の Gromov–Witten 不変量から決まる F_0 と一致している．すなわち次が言えた．

定理 4.3. ω を $\mathbb{CP}^1$ 上の 複素化された Kähler 形式とし，$q := \exp(2\pi\sqrt{-1}\int_{\mathbb{CP}^1}\omega)$ とおく．このとき $(H_F^{(0)}, J, \Phi_F)$ は形式的 Frobenius 多様体として $(H^*(\mathbb{CP}^1,\mathbb{C}), \int_{\mathbb{CP}^1}, \Phi^{\omega}_{\mathbb{CP}^1})$ と同型である．

一般のトーリック Fano 多様体に対しても同様のことが成立すると思われる．primitive form が存在するならば，それは $\zeta^{(0)} = [\frac{dz_1}{z_1}\wedge\cdots\wedge\frac{dz_n}{z_n}]$ と与えられることがわかる．

References

[1] S. Barannikov, M. Kontsevich, Frobenius manifolds and formality of Lie algebras of polyvector field, alg-geom/9710032.

[2] V. V. Batyrev, *Quantum Cohomology Rings of Toric Manifolds*, Journées de Géométrie Algébrique d'Orsay, Astérisque **218** (1993), 9.

[3] K. Behrend, *Gromov-Witten invariants in algebraic geometry*, Inv. Math. **127** (1997) 601.

[4] K. Behrend, B. Fentechi, *The intrinsic normal cone*, Inv. Math. **128** (1997) 45.

[5] K. Behrend, Yu. I. Manin, *Stacks of Stable Maps and Gromov-Witten Invariants*, Duke Math. J., 85 (1996) 1.

[6] B. Dubrovin, *Geometry of 2d topological field theories*, in Springer LNM 1620.

[7] A. Givental, *Homological Geometry and Mirror Symmetry*, In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1994, Zürich, Birkhäuser, Basel, 1995, 472-480.

[8] A. Givental, *Elliptic Gromov–Witten invariants and the generalized mirror conjecture*, math/9803053.

[9] B. Greene, S. -T. Yau, ed., *Mirror Symmetry II*, AMS/IP, 1997.

[10] M. Kontsevich, Yu. I. Manin, *Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry*, in [9].

[11] A. Losev, *Descendants constructed from matter field in topological Landau-Ginzburg theories coupled to topological gravity*, Theoret. and Math. Phys. **100** (1994) 879.

[12] Yu. I. Manin, *Frobenius manifolds, Quantum cohomology, and Moduli spaces (Chapters I,II,III)*, MPI preprint 96-113.

[13] Yu. I. Manin, *Three constructions of Frobenius manifolds*, math/9801006.

[14] D. R. Morrison, *Mathematical Aspects of Mirror Symmetry*, Complex algebraic geometry (Park City,UT, 1993), 265–327, IAS/Park City Math. Ser., 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[15] K. Saito, *Period Mapping Associated to a Primitive Form*, Publ. RIMS, Kyoto University **19** (1983) 1231.

[16] K. Saito, *Primitive forms for a universal unfolding of a function with an isolated critical point*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 28 (1982) 775.

[17] A. Takahashi, *Primitive Forms, Topological LG models coupled to gravity and Mirror Symmetry*, math/9802059.

[18] C. Vafa, *Topological Mirrors and Quantum Rings*, in [20].

[19] E. Witten, *Mirror Manifolds and Topological Field Theory*, in [20].

[20] S. -T. Yau, ed., *Essays on Mirror Manifolds*, International Press, Hong Kong, 1992.