代数幾何学シンポジウム記録
1998年度 pp.20-27

Prepotentials of Rational Elliptic Surfaces in Calabi-Yau 3-folds

細野 忍（東大・数理）

Candelas 達のグループ [CdGP] による有名な発見以来、多くの研究によってミラー対称性を用いてカラビ・ヤウ多様体の Gromov-Witten 不変量を決定するという問題の理論的整備がかなり進んでいる。ここでは、有理楕円曲面をふくむカラビ・ヤウ多様体を具体的な例にとって高い種数の Gromov-Witten 不変量について調べる。

1. 背景

1.1. Gromov-Witten 不変量

Kontsevich[Ko] に従って、射影的複素多様体 X について stable map のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{g,n}(X,\beta)$ $(\beta \in H_2(X,\mathbf{Z}))$ を考える。ここで、stable map $(C, x_1, \cdots, x_n, f) \in \mathcal{M}_{g,n}(X,\beta)$ は、種数 $g = h^1(C, \mathcal{O}_C)$ の曲線 C とその上の相異なる点 $x_1, \cdots, x_n$、および正則写像 $f : C \to X$ で次の条件を満たすものとして定義される: (i) $[f(C)] = \beta$, (ii) 曲線 C が幾つかの規約成分からなる場合を許しまた特異点は高々二重点までとする, (iii) C が特異点を持つ場合、n 個の点は特異点上にはないものとする, (iv) 像 $f(C)$ において、点につぶれる規約成分の自己同型群は有限位数。この stable map のモジュライ空間についてそのコンパクト化 $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)$ が構成され、Chow 群 $A_*(\bar{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta))$ の元 $[\bar{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)]^{vir}$(Virtual fundamental cycle) を用いて Gromov-Witten 不変量が定義される [BM]。ここで問題にする 3 次元カラビ・ヤウ多様体の場合、任意の種数に関してサイクル $[\bar{\mathcal{M}}_{g,0}(X,\beta)]^{vir}$ が零次元となりこの数が種数 g の Gromov-Witten 不変量 $N_g(\beta)$ に一致する。以下では、このようにして定義される Gromov-Witten 不変量の母関数, プレポテンシャル,

$$F_g(t) = (\text{topological term}) + \sum_{0 \neq \beta \in H_2(X,\mathbf{Z})} N_g(\beta) q^\beta \tag{1.1}$$

を問題にする。ここで、$H^2(X,\mathbf{Z})$ の正基底 $J_1, \cdots, J_r \in H^2(X,\mathbf{Z})$ を固定して $q^\beta := e^{2\pi\sqrt{-1}(\sum t_k J_k, \beta)}$ とする。

種数が零の場合、カラビ・ヤウ多様体のミラー対称性を用いると上述のプレポテンシャルがミラー多様体 $X^\vee$ のホッジ構造の変形理論から決められるというのが Candelas 達の発見で、ミラー予想などと呼ばれるものである。その後、Kontsevich, Givental, Liu-Lian-Yau などによって、$\mathbf{P}^4$ の一般 5 次超曲面や射影空間 $\mathbf{P}^d (d \geq 4)$ の中で完全交叉として表される 3 次元カラビ・ヤウ多様体の場合について、ミラー予想の一般的な証明が与えられている。

ミラー予想は、トーリック・ファノ多様体の中に考える超曲面や、超曲面の完全交叉として与えられるような3次元カラビ・ヤウ多様体について広く検証されているが、これらについても本質的に同様な証明が可能であると考えられている。

1.2. degenerate instanton

Candelas 達による当初の発見以来、Gromov-Witten 不変量はカラビ・ヤウ多様体上の正則曲線 (instanton) の"数え上げ"と深く関わることが知られている。正則曲線が変形の自由度を持って現れる場合、"数え上げ" は意味を持たないが、その場合は変形空間のオイラー数などの位相不変量によって意味付けされると考えられている。正則曲線が変形の自由度を持たない場合は、stable map に基づく定義から曲線の個数が決まることが期待されるが、この場合でも次のような問題 (multiple cover problem) が話を難しくしている: いま、孤立した正則曲線のホモロジー類が β とするとき、これが加群 $H_2(X,\mathbf{Z})$ で primitive でない場合 $N_g(\beta)$ には、ホモロジー類が β' ($\beta = k\beta', k > 0$:integer) である正則曲線からの寄与が $N_g(\beta)$ に混ざって含まれる。従って後者の $N_g(\beta)$ への寄与の仕方を知る必要が生じる。孤立した正則曲線の種数が零で、かつ滑らかである場合にはこの問題はよく調べられており、その個数を $\tilde{N}_0(\beta)$ とすると

$$N_0(\beta) = \sum_{k|\beta} \frac{1}{k^3}\tilde{N}_0(\beta/k) \tag{1.2}$$

と表されることが示されている [AM]。種数が零でも特異な曲線の場合 (1.2) が正しく成立するかどうか定かではない。さらに、種数が高くなった場合には、multiple cover の問題の他に、degenerate instanton と呼ばれる低い種数の曲線からの寄与が現れる。すなわち、stable map の理論では、種数を持った既約成分が点につぶれて、結果として $f(C_g)$ の種数が g より小さくなることがあり得る。種数が 1 の場合には、Bershadsky-Cecotti-Ooguri-Vafa (BCOV) による予想が以前から知られており、それによると

$$N_1(\beta) = \sum_{k|\beta} \left(\sigma_{-1}(k)\tilde{N}_1(\beta/k) + \frac{1}{12}\frac{1}{k}\tilde{N}_0(\beta/k)\right) \tag{1.3}$$

と与えられる [BCOV1]。ここで、$\sigma_{-1}(k) = \sum_{i|k}\frac{1}{i}$ とする。第二項が degenerate instanton の寄与と呼ばれるもので、その係数 $\frac{1}{12}$ は種数1でその上に1点を指定する曲線のモジュライ空間の orbifold オイラー数である。この予想の数学的証明は、Faber, Pandharipande[FP] によって1年ほど前に与えられている。一般の種数 $g \geq 2$ について、multiple cover と degenerate instanton がどのように分離されるのかはっきりした予想もなかったが、つい最近 (, 城崎シンポジウムの後に hep-th e-print archive に発表された論文において,)Gopakumar, Vafa[GV2]

は次のような予想を与えた、

$$N_g(\beta) = \sum_{h=0}^{g} \sum_{k|\beta} C_h(g-h) k^{2g-3} \tilde{N}_h(\beta/k) \qquad (g \geq 2) \tag{1.4}$$

ここで、係数 $C_g(h)$ は

$$\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)^{2g-2} = \sum_h C_g(h) t^{2h} \tag{1.5}$$

で与えられる。この母関数は Faber, Pandgaripande によって求められている Hodge integral の母関数

$$1 + \sum_{g \geq 1} t^{2g} \int_{\bar{\mathcal{M}}_{g,1}} \frac{k^g + k^{g-1} c_1(\mathcal{H}_{g,1}) + \cdots + c_g(\mathcal{H}_{g,1})}{1 - c_1(L_1)} = \left(\frac{t/2}{\sin(t/2)}\right)^{k+1} \tag{1.6}$$

一致するものである。Pandharipande[Pa] は、Gromov-Witten 不変量の理論に基づいて (1.4) の数学的な証明を β が primitive の場合に与えている。

Gopakumar, Vafa[GV1][GV2] は BPS 状態と呼ばれる局所場のスピン自由度と曲線の種数 g を関係付けて、(1.4) の形を導出しておりその推論の方法は弦理論の立場からも大変興味深いものである。

1.3. Holomorphic anomaly equation

さて、Gromov-Witten 不変量 $N_g(\beta)$ を定義に基づいて決定することは大変困難であるが、$g=0$ の場合はミラー予想を用いることによって、ミラー多様体 $X^\vee$ の Hodge 構造の変形理論から求めることが出来る。また、一般の種数 $g \geq 1$ の場合には BCOV によって提唱された、プレポテンシャル F_g に関する holomorphic anomaly equation を解く事によって $N_g(\beta)$ を決める。BCOV による holomorphic anomaly equation はその数学的な特徴づけが $g=0$ の場合ほど明確に出来あがっていないが、大まかに以下のようなものである。

いま、ミラー多様体 $X^\vee$ の複素構造の変形空間を $\mathcal{M}^{cpl}$ とすると、$\mathcal{M}^{cpl}$ の各点 x に対して決まる $X^\vee_x$ の正則 3 形式 Ω_x はある直線束 $\mathcal{L}$ の切断とみなされる。$\mathcal{M}^{cpl}$ 上の Weil-Peterson 計量はケーラーで、そのポテンシャルは $\mathrm{e}^{-K} = \int_X \bar{\Omega}_x \wedge \Omega_x$ によって与えられることが知られている [Ti][To]。このことから、e^{-K} を $\mathcal{L} \otimes \bar{\mathcal{L}}$ の切断とみなし、ウエイト $(1,1)$ の切断と表現する。文献 [BCOV2] によると、プレポテンシャル F_g は位相的シグマモデルの分配和として

$$F_g(x,\bar{x}) = \int_{\mathcal{M}_g} \langle \prod_{k=1}^{3g-3} \int_{C_g} (\mu_k G^-) \int_{C_g} (\bar{\mu}_k \bar{G}^-) \mathrm{e}^{-S_{int}(x,\bar{x})} \rangle \tag{1.7}$$

によって定義され、ウエイト $(2-2g,0)$ を持ち $\mathcal{L}^{\otimes 2-2g}$ の切断として振舞う。また、F_g は次の recursion relation を満たす:

$$
\begin{aligned}
\partial_{\bar{i}} F_g &= \frac{1}{2} \mathrm{e}^K C_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} G^{j\bar{j}} G^{k\bar{k}} (D_j D_k F_{g-1} + \sum_{r=1}^{g-1} D_j F_r D_k F_{g-r}) \quad (g \geq 2) \\
\partial_{\bar{i}} \partial_j F_1 &= \frac{1}{2} C_{jmn} C_{\bar{i}\bar{m}\bar{n}} G^{m\bar{m}} G^{n\bar{n}} \mathrm{e}^{2K} - (\frac{\chi}{24} - 1) G_{\bar{i}j}
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

ここで、$G_{i\bar{j}}$ は Weil-Perterson 計量, C_{ijk} は Griffith-Yukawa 結合で $-\int_{X^\vee} \Omega_x \wedge \partial_i \partial_j \partial_k \Omega_x$ によって与えられ、$\partial_{\bar{i}} C_{jkl} = 0$ を満たす。また、χ は X のオイラー数である。さらに、共変微分 D_j は計量 $G_{i\bar{j}}$ に関する Levi-Civita 接続および直線束 $\mathcal{L}$ の接続に関するもので、例えば $\mathcal{L}^{\otimes n}$ に値をとる正則ベクトル場 Z_i に対して、$D_i Z_j = \partial_i Z_j + \Gamma^l_{ij} Z_l - n \partial_i K Z_j$ と作用する。

種数が零の場合のときに用いられる平坦座標 t を用いて表す関数 $F_g(t,\bar{t})$ で、$\bar{t} \to \infty$ の極限をとるときそれがプレポテンシャル (1.1) を与え、これから高い種数の Gromov-Witten 不変量が決められると言うのが BCOV による主張 (予想) であった。論文 [BCOV2] では、その状況証拠として F_1 が詳しく調べられた上、さらに $\mathbf{P}^4$ の一般 5 次超曲面の場合に F_2 が決定されている。一般に holomorphic anomaly equation (1.8) を解くことは非常に複雑で、実際に計算が実行できるのは $\mathbf{P}^4$ の一般 5 次超曲面などのように $h^{1,1}(X) = 1$ の場合に限られている。

1.4. 問題

上述のように、種数零の Gronov-Witten 不変量についてはかなりその全貌の様子が明らかにされてきているが、高い種数についてはミラー予想の証明はもとより、予想の検証もまだまだ不十分なまま残されている。また、高い種数の degenerate instanton についての予想 (1.4) を検証し曲線の "数え上げ" 問題の観点からの考察を与えることに興味が持たれる。一般に高い種数の曲線は変形のモジュライを持って現れるので、後者の"数え上げ"はこの曲線のモジュライ空間の幾何学的と関係すると予想される。他方、弦理論では曲線は BPS 状態と呼ばれる零質量粒子と同じ振舞いをする粒子を表し、弦理論の双対性を調べる際に鍵となる重要な量でもある。

ここでは有理楕円曲のプレポテンシャルを具体的に調べ、高い種数の Gronov-Witten 不変量とそこに含まれる degenerate instanton の形を検証することが目的である。有理楕円曲上の曲線については切断が作る Mordell-Weil 群 [Shi] をはじめ、詳しく知られていることが多いので Gronov-Witten 不変量, degenerate instanton, 曲線の "数え上げ" 問題の三者の関係についてかなり立ち入って調べることが可能と期待される。

2. 結果

有理楕円曲面を含むような 3 次元カラビ・ヤウ多様体 X を考えて、そのミラー多様体 $X^\vee$ を考えて、ミラー予想によりプレポテンシャルを F_g $(g=0)$ を決める。 このとき、有理楕円曲面 S はカラビ・ヤウ多様体の中で孤立して動かないので、F_g の展開で有理楕円曲面の中に含まれている曲線に関する部分 F_g^S を容易に取り出すことが出来る。この手続きはしばしば local mirror symmetry とか local mirror principle などと呼ばれるものである。どのような 3 次元カラビ・ヤウ多様体に有理楕円曲面 S が含まれていようが、得られる F_g^S は S にたいして固有なものとなるため "local" と言う言葉が用いられている†

以下では、$\mathbf{P}^2$ で考える 2 つの一般 3 次式の 9 つの共通零点を blow up して構成する有理楕円曲面を S とする。このような一般的な有理楕円曲面は elliptic fibration を持ち、また 12 個の I_1 型の特異 fiber を持つ。コホモロジー群 $H^2(S,\mathbf{Z})$ は、hyperplane class の引き戻し H と、9 つの例外因子 $e_1,\cdots,e_9$ によって生成されるが、以下では簡単のため H と fiber class $F=3H-e_1-\cdots-e_9$ にのみ着目し、これらが埋め込みでカラビ・ヤウ多様体 $X\supset S$ のコホモロジー群 $H^2(X,\mathbf{Z})$ 正基底の一部になるような状況を考える。(そのような具体的な例は容易に構成される。) このとき、$\beta=i_*(\beta_S)$ $(\beta_S\in H_2(S,\mathbf{Z}))$ と表される $\beta\in H_2(X,\mathbf{Z})$ について和を制限し、さらに

$$N^S_{g;d,n} := \sum_{(\beta,i^*H)=d,(\beta,i^*F)=n} N_g(\beta) \tag{2.1}$$

とするとその母関数 $\sum_{d,n} N^S_{g;d,n} q^d p^n$ が local mirror principle によって得る F_g^S である。カラビ・ヤウ多様体の中で有理楕円曲面は孤立して動かないので、$N^S_{g;d,n}$ は有理楕円曲面に含まれる曲線 C_g で、$(C_g,F)=n$ を満たすもの, n-section, の"数え上げ"に関する量であることが予想されるが、実際 $n=1$ の場合に [HSS] において

$$Z_{0;1}(q) = q^{\frac{3}{2}} \frac{\Theta_{E_8}(3t,t\gamma)}{\eta(q^3)^{12}} \tag{2.2}$$

と求められ、S の Mordell-Weil 群との関係が示されている。

以下に得られた結果を述べるために、次の母関数を用意する

$$Z_{g;n}(q) := \sum_{d=0}^{\infty} N^S_{g;d,n} q^d \quad . \tag{2.3}$$

---

† F_g^S は、normal bundle $\mathcal{N}_{X/S}$ のデータから決まることが具体的な例で知られている。しかし stable map を用いた Gromov-Witten 不変量の定義から証明が与えられているか筆者には定かではない。

また、$\Gamma(3)$ に対してウエイト 1 を持つテータ関数 $\phi(q) := \theta_3(q)\theta_3(q^3) + \theta_2(q)\theta_2(q^3)$ を用意する。ここで $\theta_2(q) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} q^{(m+\frac{1}{2})^2}$, $\theta_3(q) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} q^{m^2}$。

<u>結果 1.</u> (holomorphic anonaly equation):

母関数 $Z_{g;n}$ は次の一般形を持つ:

$$P_{2g+2n-2}(\phi(q), E_2(q), E_4(q), E_6(q))(Z_{0;1}(q))^n \tag{2.4}$$

ここで、$P_{2g+2n-2}$ はウエイトが $2g+2n-2$ の多項式 ($\Gamma(3)$ に関する quasi-modular form) である。$g = 0$ および $g = 1$ のとき (2.4) は簡単化して、順に $P_{2n-2}(E_2, E_4, E_6)$ と $P_{2g}(E_2(q^3), E_4(q^3), E_6(q^3))$ で与えられる。さらに、$Z_{g;n}$ は次の recursion relation を満たす:

$$\frac{\partial Z_{g;n}}{\partial E_2} = \frac{1}{72} \sum_{g'+g''=g} \sum_{s=1}^{n-1} s(n-s) Z_{g';s} Z_{g'';n-s} + \frac{n(n+1)}{72} Z_{g-1;n} \quad . \tag{2.5}$$

この結果は、$g = 0$ と $g = 1$ の場合にはミラー予想を使って証明されるが、一般の $g \geq 2$ の場合は予想である。特に $g \geq 2$ の場合考えられる証明として、BCOV による holomorphic anomaly equation (1.8) から (2.5) が導かれることを示すことが考えられるが、今のところ出来ていない。しかし予想の妥当性は、低い g, n について実際 (2.5) から $Z_{g;n}$ を決め、得られる Gromov-Witten 不変量から確かめることが出来る。特に、$n = 1$ に制限した場合 (2.5) は

$$\frac{\partial Z_{g;1}}{\partial E_2} = \frac{1}{36} Z_{g-1;1} \tag{2.6}$$

のように簡単化する。その上、(2.2) を初期値にして"積分"することが出来て、その結果が次のようにまとめられることが示される:

<u>結果 2.</u> (topological string partition function):

$$q^{\frac{3}{2}} \frac{\Theta_{E_8}(3t, t\gamma)}{\eta(q^3)^{12}} \left(\frac{\frac{\lambda}{2}}{\sin\frac{\lambda}{2}} \right)^2 \prod_{n\geq 1} \frac{(1-q^{3n})^4}{(1-\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\lambda} q^{3n})^2 (1-\mathrm{e}^{-\sqrt{-1}\lambda} q^{3n})^2} = \sum_{g\geq 0} Z_{g;1}(q) \lambda^{2g} \quad . \tag{2.7}$$

この結果は城崎シンポジウム以降、斎藤政彦氏・高橋篤史氏との共同研究によって得られたものである [HST]。$n = 1$ の場合、$Z_{g;1}(q)$ が"数える"と予想される曲線のホモロジー類は、切断全体の成す Mordell-Weil 群を $MW(S)$ と表すとき

$$[C_g] = [\sigma(\mathbf{P}^1)] + (g+r)F \quad , \quad (\sigma \in MW(S)\,,\, r \geq 0) \tag{2.8}$$

で与えられ、このなかで $([C_g], H) = d$ の値が最も小さなものは $[C_g] = e_i + gF \quad (i = 1, \cdots, 9)$ であることが分かる。そこで、曲線 C_g の"数え上げ"の母関数を $\tilde{Z}_{g;1}(q)$ とし、これが q^{3g} から始まる q-展開を持つことを要請すると、

$$\begin{aligned}
Z_{1;1} &= \tilde{Z}_{1;1} + \frac{1}{12}\tilde{Z}_{0;1} \\
Z_{2;1} &= \tilde{Z}_{2;1} + \chi(M_2)\tilde{Z}_{0;1} \\
Z_{3;1} &= \tilde{Z}_{3;1} + \frac{1}{3!}\chi(M_3)\tilde{Z}_{0;1} - \frac{1}{12}\tilde{Z}_{1;1} \\
Z_{4;1} &= \tilde{Z}_{4;1} + \frac{1}{5!}\chi(M_4)\tilde{Z}_{0;1} + \frac{1}{360}\tilde{Z}_{2;1} - \frac{1}{6}\tilde{Z}_{3;1} \\
Z_{5;1} &= \tilde{Z}_{5;1} + \frac{1}{7!}\chi(M_5)\tilde{Z}_{0;1} - \frac{1}{20160}\tilde{Z}_{2;1} + \frac{1}{80}\tilde{Z}_{3;1} - \frac{1}{4}\tilde{Z}_{4,1} \quad ,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

のように Gromov-Witten 不変量の母関数 $Z_{g;1}(q)$ との関係が決まる。$\chi(M_g) = \frac{|B_{2g}|}{2g(2g-2)!}$. そして、ここに現れる係数がまさに Gopakumar, Vafa によって予想され、Pandharipande によって証明されたている degenerate instanton (1.4)(k=1) に一致することが確かめられる。

曲線 (2.8) は、$g \geq 1$ では変形の自由度を g 次元持って現れることが分かるが、このような場合に (2.9) から得られる"数え上げ"の母関数 $\tilde{Z}_{g;1}(q)$ をもとに、"数え上げ"の意味付けを詳細に調べることが出来る。Gopakumar, Vafa は弦理論の双対性に基づく考え方から、曲線が変形の自由度を持って現れる場合、曲線をそれの Jacobian と共に考えることが自然であることを議論している。今の場合、Jacobian と共に考える曲線のモジュライ空間が $\mathrm{Sym}^g(S)$ で与えられることが分かるがこれの非特異化として S 上 g 点のなす Hilbert scheme $S^{[g]}$ を考える。Gopakumar, Vafa の考察をこの状況下に当てはめると"数え上げ"の母関数 $\tilde{Z}_{g;1}(q)$ はコホモロジー環 $H^*(S^{[g]})$ の Lefschets-$SL(2)$ 作用による分解によって決まると予想される。共著論文 [HST] において、実際 $H^*(S^{[g]})$ の Poincaré 多項式に関する Göttsche の公式 [G] に基づいて"数え上げ"の母関数 $\tilde{Z}_{g;1}(q)$ が再現されることが示された。それによると、Göttsche の公式の自然な一般化が考えられて式 (2.7) は、Mordell-Weil 群からくる E_8 格子のテータ関数と Göttsche の公式 (の一般化) との積と読むことが出来る。

シンポジウムでは、結果 1 に関してのみ報告したが、その後得られた結果と共に詳しくは、斎藤政彦氏・高橋篤史氏との共著論文 [HST] を参照されたい。

参考文献

[AM] P.S. Aspinwall and D.R. Morrison, *Topological field theory and rational curves*, Commun. Math. Phys. 151 (1993) 245-262.

[BCOV1] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri and C. Vafa, *Holomorphic anomalies in topological field theories*, (with an appendix by S.Katz) Nucl. Phys. B405(1993), 279-304.

[BCOV2] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri and C. Vafa, *Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes*, Commun. Math. Phys. 165(1994), 311-428.

[BM] K. Behrend and Yu. Manin, *Stacks of stable maps and Gromov-Witten invariants*, Duke Math. J. 85(1996), 1-60.

[CdGP] P. Candelas, X.C. de la Ossa, P.S. Green, and L.Parkes, *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*, Nucl.Phys. B356(1991), 21-74.

[FP] C. Faber, R. Pandharipande, *Hodge integrals and Gromov-Witten theory*, math/9810173.

[G] L. Göttsche, *The Betti numbers of the Hilbert scheme of points on a smooth projective surface*, Math. Ann. 286 (1990) 193-297.

[GV1] R. Gopakumar and C. Vafa, *M-Theory and Topological Strings–I*, hep-th/9809187.

[GV2] R. Gopakumar and C. Vafa, *M-Theory and Topological Strings–II*, hep-th/9812127.

[HSS] S. Hosono, M.-H. Saito and J. Stienstra, *On Mirror Symmetry Conjecture for Schoen's Calabi-Yau 3-folds*, in The Proceedings of Taniguchi Symposium, "*Integrable Systems and Algebraic Geometry*", Kobe/Kyoto(1997), pp.194-235 (alg-geom/9709027).

[HST] S. Hosono, M.-H. Saito and A. Takahashi, *Holomorphic anomaly equation and BPS state counting of rational elliptic surface*, hep-th/9901151.

[Ko] M. Kontsevich, *Enumeration of rational curves via torus actions*, in The moduli space of curves, R. Dijkgraaf, C. Faber and G. van der Geer eds. (1995), pp. 335-368, Progr. Math., 129, Birkhäser Boston.

[Pa] R. Pandharipande, *Hodge integrals and degenerate contributions*, math.AG/9811140.

[Shi] T. Shioda, *On the Mordell-Weil lattices*, Comment. Math. Univ. St. Pauli 39 (1990), 211-240.

[Ti] G. Tian, *Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Peterson-Weil metric*, in Mathematical Aspects of String Theory (S.-T. Yau, ed.), World Scientific, Singapore (1987) 629-646.

[To] A.N. Todorov, *The Weil-Peterson geometry of the moduli space of $SU(n \geq 3)$ (Calabi-Yau) manifolds, I*, Comm. Math. Phys. 126 (1989) 325-246.