代数幾何学シンポジウム記録
1999年度 pp.118-129

ON THE VARIETY OF SPECIAL LINEAR SYSTEMS OF DEGREE $g-1$ ON SMOOTH ALGEBRAIC CURVES

KYUNG-HYE CHO, CHANGHO KEEM AND AKIRA OHBUCHI

1. 準備

C を複素数体$\mathbb{C}$ 上で定義された代数曲線として

$$\mathrm{Pic}^d(C) := \{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(C) \mid \deg(\mathcal{L}) = d\ \}$$

とする。$r \in \mathbb{N}$ $r \geq 1$ を与えて

$$W^r_d(C) \overset{集合として}{:=} \{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^d(C) \mid \dim\Gamma(C,\mathcal{L}) \geq r+1\}$$

と置く。正確には$\mathcal{L}$ を$C \times \mathrm{Pic}^d(C)$ の上の次数d のPoincarè bundle とする。即ち勝手な$L \in \mathrm{Pic}^d(C)$ に対して$\mathcal{L}|C \times \{L\} \cong L$ を満たしている。E をC 上の次数$m \geq 2g-d-1$ のdivisor として$\Gamma = E \times \mathrm{Pic}^d(C)$ と置き, 又$\nu : C \times \mathrm{Pic}^d(C) \to \mathrm{Pic}^d(C)$ をprojection とする。標準的なexact sequence

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{L}(\Gamma) \to \mathcal{L}(\Gamma)/\mathcal{L} \to 0$$

についてν_* を取るとbase change theorem に従って$R^1\nu_*\mathcal{L}(\Gamma) = 0$ である事が解るので,

$$0 \to \nu_*\mathcal{L} \to \nu_*\mathcal{L}(\Gamma) \xrightarrow{\gamma} \nu_*\big(\mathcal{L}(\Gamma)/\mathcal{L}\big) \to R^1\nu_*\mathcal{L} \to 0$$

が解り, 更に再びbase change theorem によって$\nu_*\big(\mathcal{L}(\Gamma)/\mathcal{L}\big)$ 及び$\nu_*\mathcal{L}(\Gamma)$ はlocally free になる。ここで

$$W^r_d(C) := (\mathrm{Pic}^d(C))_{m+d-g-r}(\gamma)$$

と定義する (詳しくは[ACGH] pp.154-159 を参照)。標準的なcup product map を

$$\mu_0 : \Gamma(C,L) \otimes \Gamma(C,\omega \otimes L^{\otimes -1}) \to \Gamma(C,\omega)$$

とする。又,

$$\Gamma(C,\omega) \times \mathrm{H}^1(C,\mathcal{O}) \to \mathbb{C}$$

をSerre duality のpairing として以下が知られる ([ACGH] p.189 (4.2)Proposition 参照)。

命題. $L \in W^r_d(C) \setminus W^{r+1}_d$ $(r \geq d-g) \Rightarrow T_L(W^r_d(C)) \cong (\mathrm{im}\mu_0)^{\perp} \subset \mathrm{H}^1(C,\mathcal{O})$.

今$L \in W^r_d(C) \setminus W^{r+1}_d$ に対して

$$\Gamma(C,L) \otimes \Gamma(C,\omega \otimes L^{\otimes -1}) \overset{\mu_0}{\hookrightarrow} \Gamma(C,\omega)$$

である場合

$$\dim T_L(W^r_d(C)) = g - (r+1)(g-d+r)$$

である。この右辺の値はBrill-Noether 数として知られる数でρ, $\rho(d,g,r)$ 或いは$\rho(W^r_d(C))$ の様に記述される。ここで以下の事実が知られている ([ACGH] の参考文献を参照されたし)。

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

定理. (*Kempf,Kleimann-Laksov*). C が種数 g の非特異代数曲線で $r \geq d-g$ とする。この時に

$$\rho(W_d^r(C)) \geq 0 \Rightarrow W_d^r(C) \neq \emptyset$$

が成立する。又, この時に $W_d^r(C)$ の勝手な *component* X は $\dim(X) \geq \rho(W_d^r(C))$ を満たす。

定理. (*Griffith,Harris*). C が種数 g の一般の非特異代数曲線で $r \geq d-g$ とする。この時に

$$\rho(W_d^r(C)) < 0 \Rightarrow W_d^r(C) = \emptyset$$

が成立する。

定理. (*Gieseker,Fulton-Lazarsfeld*). C が種数 g の一般の非特異代数曲線で $r \geq d-g$ とする。この時に

$$\rho(W_d^r(C)) \geq 1 \Rightarrow W_d^r(C) \text{ は非特異な既約多様体}$$

が成立する。

以上の定理では $r \geq d-g$ の仮定が付いているが, これは (d,r) が line bundle $\mathcal{L}$ の $(\deg\mathcal{L}, \dim|\mathcal{L}|)$ であれば Riemann-Roch の定理によって導かれる不等式であるから自然な仮定である。一方, 上からの評価として以下が知られる。

定理. (*H.Martens*). C が種数 g の非特異代数曲線であるとする。この時,

$$d \leq g+r-2, r \geq 1 \Rightarrow \dim(W_d^r(C)) \leq d-2r$$

が成立する。又, 等号が成立する必要充分条件は C が *hyperelliptic curve* である時である。

定理. (*Mumford*). C が種数 g の非特異代数曲線であり,$d \leq g+r-3, r \geq 1$ であるとする。この時

ある *component* $X \subset W_d^r(C)$ があって $\dim(X) = d-2r-1$

ならば

C は *trigonal,bielliptic(*楕円曲線の二重被覆*)* 又は平面5次曲線のいづれか

が成立する。

以下の定理は主要部分は [K] による物であるが, 他の人の結果を合わせて完全な物となっている。

定理. (*Ballico,Coppens,Keem,G.Martens, Mukai,Ohbuchi*). C が種数 g の非特異代数曲線であり,$d \leq g+r-4, r \geq 1$ であるとする。この時

ある *component* $X \subset W_d^r(C)$ があって $\dim(X) \geq d-2r-2 \geq 0$

ならば

C は *hyperelliptic,trigonal, bielliptic,*$\mathbb{P}^1$ の四重被覆面,
種数2の曲線の二重被覆面又は平面6次曲線のいづれか

が成立する。

ここにある一連の定理も (d,r) について仮定を付けているが, これについては一部考えなければならない場合が存在する。一般に

$$W_d^r(C) \cong W_{2g-2-d}^{r-d+g-1}(C)$$

が成立するから (d,r) についての仮定は (d,r) 及び $(2g-2-d, r-d+g-1)$ についての仮定と考えられる。従って H.Martens の定理の仮定は, あらゆる special line bundle (i.e. $h^1(\mathcal{L}) \neq 0$ である$\mathcal{L}$) についての仮定と考えられ,Mumford の定理に於ては $(d,r)=(g-1,1)$ 以外のあらゆるspecial line bundle についての仮定と考えられる。しかもMumford の定理に於て $(d,r)=(g-1,1)$ である場合は $\rho(d,g,r)=d-2r-1$ となっているので一般の曲線についての主張をしなくてはいけない場合であり, それ故に除外して考えるべき場合である。この意味でMumford の定理も, あらゆるspecial line bundle についての主張と取る事が出来る。しかしながら $d-2r-2$ 次元の場合は同じく考えると $(d,r)=(g-1,2)$ 以外はMumford の定理と同様に考える事が出来るが $(d,r)=(g-1,2)$ の時は一般の曲線である場合でもなく, 又定理では主張されてない場合になる。ここではその $(d,r)=(g-1,2)$ の場合について, 曲線の完全な分類を与える事を目的とする。以下に於いて $\dim W^r_d(C)$ と書いたら $W^r_d(C)$ の component の中で最大次元の component の次元を表す物とする。主定理は以下の通りである。

定理 A. *C を genus $g \geq 7$ の代数曲線とする。$\dim W^2_{g-1}(C)=g-7$, であれば trigonal, tetragonal, 種数が 9 以上の種数 2 の代数曲線の二重被覆, それと平面六次曲線のいづれかである。*

定理 B. *C を genus $g \geq 7$ の代数曲線とする。C が trigonal, 種数が 9 以上の種数 2 の代数曲線の二重被覆, g^3_8 を持つ tetragonal curve($g=10$),g^2_6 を持つ tetragonal curve($g \leq 10$), 平面六次曲線ならば $\dim W^2_{g-1}(C)=g-7$ である。*

定理 C. *($g \geq 11$). C を $g \geq 11$ の tetragonal curve で種数が 9 以上の種数 2 の代数曲線の二重被覆でないと仮定する。この時,*

$$\dim W^2_{g-1}(C) \lneq g-7$$

である。

定理 C. *($g=9,10$). C を $g=9,10$ の tetragonal curve で種数が 9 以上の種数 2 の代数曲線の二重被覆でないか, $g=10$ で g^3_8 を持たないか,g^2_6 を持たないならば*

$$\dim W^2_{g-1}(C) \lneq g-7$$

である。

定理 C. *($g=7,8$). C を $g=7,8$ の tetragonal curve で g^2_6 を持たないならば*

$$\dim W^2_{g-1}(C) \lneq g-7$$

である。

2. 補題と主定理の証明

以下の於いて定理 **A**, 定理 **B**, 定理 **C** の証明の概略を与える。以下は基本的である。

命題 1. *C を genus $g \geq 7$ の代数曲線とする。この時 $\dim W^2_{g-1}(C)=g-6$ である必要充分条件は C が bielliptic である事である。*

補題 2. *C を genus $g \geq 7$ の代数曲線とする。この時 C が種数 2 の代数曲線の二重被覆であって genus $g \geq 9$ を満たすか, trigonal であるか,g^3_8 を持つ tetragonal curve($g = 10$), g^2_6 を持つ tetragonal curve($g \leq 10$), 平面六次曲線ならば $\dim W^2_{g-1}(C) = g - 7$ である。*

証明. 種数 2 の代数曲線の二重被覆である時は被覆を $\pi : C \to E$ として,

$$\pi^* W^2_4(E) + W_{g-9}(C)$$

が求める locus であり trigonal の時は

$$2g^1_3 + W_{g-7}(C)$$

が求める locus である (Martens-Schleyer[MS] 参照)。g^3_8 を持つ場合は

$$g^3_8 - P_1 + P_2 + \cdots + P_{g-7}$$

が求める locus となり g^2_6 を持つ場合は

$$g^2_6 + P_1 + \cdots + P_{g-7}$$

が求める locus である。$g \neq 10$ だと g^3_8 を持つ tetragonal なら g^2_6 を持つ事は容易であるし,birational な g^2_6 を持つなら $g \leq 10$ であり birational でない g^2_6 を持つなら trigonal であるから仮定にある条件が導かれる。□

補題 3. *C を genus $g \geq 7$ の代数曲線とする。今種数 2 の代数曲線の二重被覆でなく,trigonal でもないとする。$\dim W^2_{g-1}(C) = g - 7$ であり勝手な $W^2_{g-1}(C)$ の $g - 7$ 次元の component に含まれる一般の元 $\mathcal{L}$ が base-point-free であるとする。今 X を $g - 7$ 次元の $W^2_{g-1}(C)$ の component とすると, 一般の $\mathcal{L} \in X$ は $\mathcal{L}$,$K_C - \mathcal{L}$ が共に birational になる。*

証明. $\mathcal{L} \in X$ に対して $\mathcal{L}$ が定義する写像 $\psi_{\mathcal{L}} : C \to \mathbb{P}^2$ が birational でないとする。もし $\psi_{\mathcal{L}}$ が一般の $\mathcal{L}$ に対して rarional であるとするなら

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\psi_{\mathcal{L}}} & C_{\mathcal{L}} \subset \mathbb{P}^2 \\ \rho \searrow & & \nearrow \\ & \mathbb{P}^1 & \end{array}$$

で $\psi_{\mathcal{L}}$ が二次元の complete linear system で定義されるので $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ は $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)|$ で定義される。従って $\mathcal{L} \cong \rho^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ であり $\rho^* \quad O_{\mathbb{P}^1}(1) = g^1_{(g-1)/2}$ となる。それ故

$$g - 7 = \dim X \leq \dim W^1_{\frac{g-1}{2}}(C) = \frac{g-1}{2} - 2 - 2v$$

となり矛盾。$\mathcal{L}$ に対して rarional でないなら de Franchis' の定理に従う。□

以下の補題は重要である。

補題 4. C を *genus* $g \geq 7$ の代数曲線で $\dim W^2_{g-1}(C) = g-7$ であるとする。今勝手な $W^2_{g-1}(C)$ の $g-7$ 次元の *componentX* の一般の元が *base-point-free* であると仮定する。更に一般の元 $\mathcal{L} \in X$ は $\mathcal{L}$ と $\omega_C \otimes \mathcal{L}^{-1}$ が共に *birationally* であるとも仮定する。この時に以下が成立する。
(i) $\dim W^1_{g-3}(C) \geq g-7$.
(ii) もし $\dim W^1_{g-3}(C) = g-7$ ならば *component* $T \subset W^1_{g-3}(C)$ があって $\dim T = g-7$ であり, 勝手な $\mathcal{L} \in X$ は $\mathcal{M} \in T, P, Q \in C$ が取れて

$$\mathcal{L} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}(P+Q)$$

の形になる。

証明. 勝手な $\mathcal{L} \in X$ に対して $P, Q \in C$ があって $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(-P-Q) \in W^1_{g-3}(C)$ となる事は容易である。そこで以下の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} W^1_{g-3}(C) \times W_2(C) & \xrightarrow{q} & W^1_{g-1}(C) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \\ W^1_{g-3}(C) & & \end{array}$$

ここで $q(\mathcal{M}, \mathcal{O}(P+Q)) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}(P+Q)$ として $p(\mathcal{M}, \mathcal{O}(P+Q)) = \mathcal{M}$ とする。今 Z_0 を $q^{-1}(X)$ $q(Z_0) = X$ である component とする。$p = p_{|Z_0}$, $q = q_{|Z_0}$ として以下を得る。

$$\begin{array}{ccc} Z_0 & \xrightarrow{q} & X \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \\ p(Z_0). & & \end{array}$$

q が quasi-finite である事が確かめられる。更に p が quasi-finite である事も解る。従って (i) を得る。更に (ii) では $p(Z_0)$ が component になる訳なので結論は明らか。

定理 A の証明.
定理の仮定と**補題** 4 に従って $g-7$ 以上の次元を持つ component が $W^1_{g-3}(C)$ に存在する訳だから Ballico,Coppens,Keem,G.Martens,Mukai,Ohbuchi による定理から主張は明白である。□

次に定理 B の証明の概略を与える。

定理 B の証明.
C を genus $g \geq 7$ の代数曲線とする。C が trigonal である時は Martens-Schleyer [MS] に従う。又種数が 9 以上の種数 2 の代数曲線の二重被覆である時は

$$\pi^* W^2_4(E) + W_{g-9}(C) \subset W^2_{g-1}(C)$$

が $g-7$ 次元の locus となっているが, もし component でなければ定理 (Mumford) に従って bielliptic curve となるので種数 2 の代数曲線の二重被覆が bielliptic になるのは $g \leq 7$ しかありえない事から矛盾。g^3_8 を持つ tetragonal curve($g=10$),g^2_6 を持つ tetragonal curve($g \leq 10$), 平面六次曲線の場合についても同様な計算によって $\dim W^2_{g-1}(C) = g-7$ である。□

最後に定理 C の証明の概略を与える。証明は $g \geq 11$,$g = 10, 9$,$g = 8, 7$ の三つの場合に分けて考える。その為の幾つか補題を用意するが, これらの補題では特に断らなければ genus の仮定は $g \geq 7$ である。

補題5. C を *genus* $g \geq 7$ の *tetragonal curve* で $W^2_{g-1}(C) = g-7$ を満たしているとする。更に $\dim \Gamma(C, \mathcal{O}(2g^1_4)) = 3$ とする。$X \subset W^2_{g-1}(C)$ を $g-7$ 次元の *component* として

$$\mathcal{E}_X := \{D \in C_{g-5} | |g^1_4 + D| \in X\}$$

と置く。この時勝手な $D \in \mathcal{E}_X$ に対して $|K_C - 2g^1_4 - D| \neq \emptyset$ であり

$$|K_C - 2g^1_4| = \bigcup_{D \in \mathcal{E}_X} D + |K_C - 2g^1_4 - D|$$

が成立する。ここで *locus* $D + |K_C - 2g^1_4 - D| \subset C_{2g-10}$ は $|K_C - 2g^1_4|$ の部分集合と考えている。

証明. $\mathcal{L} \in X$ を $W^2_{g-1}(C)$ の $g-7$ 次元の勝手な component に含まれる勝手な元とすると $|\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(-g^1_4)| \neq \emptyset$ が満たされる事は Base Point Free Pencil Trick と semi-continuty によって得られる。それ故写像を

$$\begin{aligned} \phi : C_{g-5} &\longrightarrow Pic^{g-1}(C) \\ D &\longmapsto \mathcal{O}(D + g^1_4) \end{aligned}$$

によって定義すると ϕ は勝手な $\mathcal{L} \in X$ に対して $\phi^{-1}(\mathcal{L}) \neq \emptyset$ を満たすので $\dim \mathcal{E}_X \geq g-7$ となり, 更に $K_C - X$ が $W^2_{g-1}(C)$ の $g-7$ 次元の component である事に注意すれば

$$|K_C - 2g^1_4 - D| = |K_C - (D + g^1_4) - g^1_4| \neq \emptyset, \quad \forall\, D \in \mathcal{E}_X$$

も得られる。そこで $\psi(C, E) = D + E$ として

$$\mathcal{E}_X \times C_{g-5} \supset \{(D, E) : D \in \mathcal{E}_X, E \in |K_C - 2g^1_4 - D|\} =: \Sigma \xrightarrow{\psi} C_{2g-10},$$

とすれば ψ は finite map だから

$$\dim \psi(\Sigma) = \dim \Sigma \geq \dim \mathcal{E}_X \geq g-7$$

である事が解る。又 $\psi(\Sigma) \subset |K_C - 2g^1_4|$ であり $\dim |K_C - 2g^1_4| = g-7$ なので

$$|K_C - 2g^1_4| = \psi(\Sigma) = \bigcup_{D \in \mathcal{E}_X} D + |K_C - 2g^1_4 - D|$$

を得る。□

以下の補題の仮定は技術的な理由で付けられている物で仮定の当てはまらない場合については後で個別に扱わなければならない。しかし結果自体は大変重要である。

補題6. C を *genus* $g \geq 8$ の *tetragonal curve* として更に *tetragonal linear system* g^1_4 は只一つであると仮定する。更に以下を仮定する。
(i) $\dim W^2_{g-1}(C) = g-7$。
(ii) C は g^2_6 を持たない。
(iii) $g \geq 9$ の時は C は *genus* 2 の二重被覆でないとする。

(iv) $X \subset W^2_{g-1}(C)$ を *maximal dimensional component* として *general* $\mathcal{L} \in X$ に対して $\mathcal{L}$ と $\omega_C \otimes \mathcal{L}^{-1}$ は共に *base point free, birational,* $|\mathcal{L} - g^1_4| \neq \emptyset$ それに $|\omega_C \otimes \mathcal{L}^{-1} - g^1_4| \neq \emptyset$ とする。

(v) $g = 9$ の時は $e_3 \geq 1$ であり $(e_2, e_3) \neq (1,1)$ とする, ここで (e_1, e_2, e_3) は g^1_4 の *Maroni* タイプ *invariant (scrollar invariants, Kato, Ohbuchi [KO]* 参照*)* と仮定する。

(vi) $g = 8$ の時は $e_3 \geq 1$ と仮定する。

今 $\psi_{\mathcal{L}} : C \to C_{\mathcal{L}} \subset \mathbb{P}^2$ を $\mathcal{L} \in X$ によって定義される *morphism* とする。$\tilde{P} \in C_{\mathcal{L}}$ を g^1_4 に対応した $(g-5)$*-fold singular point* とする, *i.e.* $|\mathcal{L} - g^1_4|$ の $\psi_{\mathcal{L}}$ による像とする *(***補題** *5* 参照*)*。この時にもし $\mathcal{L} \in X$ が *general* なら $\tilde{P} \in C_{\mathcal{L}}$ は *ordinal singular point* である。

証明. (概略のみ) 仮定から dim $H^0(C, K_C - 2g^1_4) = g - 6$ を得る (詳細は省略)。条件 (ii) により $|K_C - g^1_4|$ は very ample となる。$\phi : C \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-4}$ をその埋め込みとする。$P \in C$ に対して $l_P \subset \mathbb{P}^{g-4}$ を $\phi(P)$ での $\phi(C)$ の tangent line とする。条件 (iv) と H.Martens の定理により general $\mathcal{L} \in X$ に対して dim $|\mathcal{L} - g^1_4| = 0$ かつ dim $|\omega_C \otimes \mathcal{L}^{-1} - g^1_4| = 0$ と仮定して差し支えない。この $\mathcal{L}$ に対して H_{g-7} を $D' \in |\omega_C \otimes \mathcal{L}^{-1} - g^1_4|$ によって生成された $\mathbb{P}^{g-4}$ の linear subspace とする。**補題** 5 より dim$H_{g-7} = r(K_C - g^1_4) - h^0(C, K_C - g^1_4 - D') = g - 7$。$\mathbb{P}^{g-4}$ の二つの linear subspace H と l の join を $H * l$ と書く事にする。$\pi : \mathbb{P}^{g-4} \cdots \to \mathbb{P}^2$ を H_{g-7} を center とする projection とする。今あらかじめ $|\mathcal{L} - g^1_4| = D$ が reduced である様に取っておく。この時,$P \in$ Supp D に対して $l_P * H_{g-7}$ は $\mathbb{P}^{g-4}$ の hyperplane である事は容易である。従って $\tilde{P} \in C_{\mathcal{L}}$ が ordinal singular point である必要充分条件は全ての $P \neq Q \in$ Supp $|\mathcal{L} - g^1_4|$ に対して $l_P * H_{g-7} \neq l_Q * H_{g-7}$ である事である。更に以下が成立する (証明は省略)。

Claim: $P, Q \in D =$ Supp $|\mathcal{L} - g^1_4|$ に対して $l_P * H_{g-7} = l_Q * H_{g-7}$ である必要充分条件は P, Q が g^1_4 の同じ fibre に入る事, i.e $P + Q < E$ がある $E \in g^1_4$ について成立する事である。

これから以下を示せば完了となる。

Claim: general $\mathcal{L} \in X$ について以下が成立する:

(1) $|\mathcal{L} - g^1_4| = \{D\}$ は reduced である

(2) どの D の二点も g^1_4 の同一の fibre に含まれない。

補題 5 に従ってこの Claim は以下を示せば充分である。

Claim$'$: general $G \in |K_C - 2g^1_4|$ について,G の $g-5$ 点 $P_1, \cdots, P_{g-5}$ で以下を満たす物が存在する:

(1) G は reduced.

(2) $\{P_1, \cdots, P_{g-5}\}$ のどの二点も g^1_4 の同じ fiber に含まれずかつ $P_1 + \cdots + P_{g-5} \in \mathcal{E}_X$.

証明は以下の三つの場合に分けて行う。

(I) $e_3 \geq 2$.

(II) $e_3 = 1, e_2 \geq 2$.

(III) $e_3 = 1, e_2 = 1, g \neq 9$.

(I) の場合: 仮定より $e_3 \geq 2$ なので $\dim |3g_4^1| = 3$ となる。これから $|K_C - 2g_4^1|$ が base-point-free である事は比較的容易。従って (1) は Bertini の定理から明白。(2) については $\mathcal{E}(g_4^1) = \{F : F \leq D \text{ for some } D \in g_4^1\} \subset C_2$ として $\mathcal{S} := \bigcup_{F \in \mathcal{E}(g_4^1)} |K_C - 2g_4^1 - F| + F \subset |K_C - 2g_4^1|$ と置くと勝手な $F \in \mathcal{E}(g_4^1)$ について $\dim|K_C - 2g_4^1 - F| = \dim|K_C - 2g_4^1| - 2 = g - 9$ なので $\mathcal{S} \subset |K_C - 2g_4^1|$ は codimension 1 となり (2) も得られる。

(II) の場合: $|K_C - 2g_4^1|$ が base point を高々一点しか持たない事が示される (詳細は省略)。今 $|K_C - 2g_4^1 - \Delta|$ (Δ は高々一点の $|K_C - 2g_4^1|$ の base locus) により定義される写像 $\eta : C \to \mathbb{P}^{g-7}$ を考える。以下の場合をそれぞれ考える。

(i) $\deg \eta \geq 3$ の時: $\deg \eta(C) \geq g - 7$ で $\deg \eta(C) \cdot \deg \eta = \deg |K_C - 2g_4^1 - \Delta|$ なので簡単な計算から $g = 11$, $\deg \eta = 3$, $\Delta = 0$, $\deg \eta(C) = 4$ in $\mathbb{P}^4$; $g = 10$, $\deg \eta = 3$, $\deg \Delta = 1$, $\deg \eta(C) = 3$ in $\mathbb{P}^3$; $g = 9$, $\deg \eta = 4$, $\Delta = 0$,$\deg \eta(C) = 2$ in $\mathbb{P}^2$; $g = 8$, $\deg \eta = 6$, $\Delta = 0$, $\eta(C) = \mathbb{P}^1$; $g = 8$, $\deg \eta = 5$, $\deg \Delta = 1$, $\eta(C) = \mathbb{P}^1$ の場合だけである事が解る。最初の三つの場合は矛盾が生じる事が解る。第四の場合と第五の場合は (1),(2) 成立が確かめられる。実際第四の場合は $|K_C - 2g_4^1| = g_6^1$ が base-point-free なので (1) は容易。(2) については $(g_4^1, |K_C - 2g_4^1|)$ で定義される写像 $C \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$ を考えると birational の時は (2) は明白。又 birational でなければ $\deg \varphi = 2$ が導かれて $\varphi(C) = E$ は genus 2 以外はありえない。この場合 $|K_C - 2g_4^1| = \varphi^*(g_3^1)$ (しかも base-point-free) で $g_4^1 = \varphi^*(g_2^1)$ を得る。更に general $G \in |K_C - 2g_4^1|$ に対して $P + Q + R \leq G$ が $\varphi^*(p) + Q$ の形なら $\varphi^*(p) + Q \in \mathcal{E}_X$ はあり得ない事は補題の仮定と若干の計算から解る。それ故 $P + Q + R \in \mathcal{E}_X$ であるなら $\{P, Q, R\}$ のどの二点も $g_4^1 = \varphi(g_2^1)$ の同一の fibre に入る事はない事が解る。即ち (2) が確かめられた事になる。第五の場合の証明も同様な方針である。

(ii) $\deg \eta = 2$ の時: この場合 $g \geq 9$ となり $|K_C - 2g_4^1|$ は base-point-free で $\deg \eta(C) = g - 5$ を得る。Castelnuovo genus bound により $\eta(C)$ の genus は $h \leq 2 (g \geq 10)$, $h \leq 3 (g = 9)$ となる。仮定から $g = 9$,$h = 3$ しかあり得ない。$e_3 = 1, e_2 \geq 2$, $h^0(C, K_C - 3g_4^1) = 1$ なので $E = |K_C - 3g_4^1|$ は degree 4 の effective divisor であり更に $\eta(E)$ の linear span が一点になるので $\eta(C)$ は singular になり矛盾。

(iii) $\deg \eta = 1$ の時: $g \geq 9$ であり $h^0(C, K_C - 3g_4^1 - \Delta) = g - 8$ は仮定による。$D \in g_4^1$ に対して $\dim \overline{\eta(D)} = \dim |K_C - 2g_4^1 - \Delta| - h^0(C, K_C - 2g_4^1 - \Delta - D) = (g - 7) - (g - 8) = 1$ なので surface $S := \bigcup_{D \in g_4^1} \overline{\eta(D)}$ を考えると S はある rational ruled surface $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ の tautological bundle から得られる linear system の像である。従って general hyperplane $H \subset \mathbb{P}^{g-7}$ による切断を考えれば補題を得る。

(III) の場合: これらの場合も仮定と若干の計算により矛盾が得られる。□

ここで, 条件 (iv) は**補題** 3 が使える場合は仮定する必要がない (**補題** 5 参照)。又もし二つ g_4^1,h_4^1 もしくは $e_3 = 0$ である g_4^1 が取れれば,bielliptic でなければ $g_4^1 + h_4^1$ ないし $2g_4^1$ が birational な g_8^3 を与え, 更に g_8^3 が very ample でないと g_8^3 から g_6^2 が出来る。従って g_4^1 が只一つ (又は $e_3 \neq 0$) と言う仮定は**定理** C の証明に於いて最初から仮定しておいて構わない条件である。

補題 7. C を *genus* $g \geq 11$ として或る d, $4 \leq d \leq g-3$ に対して $\dim W_d^1(C) = d-4$ とする。この時に C は g_4^1 を只一つだけ持ち, 全ての $e, 4 \leq e \leq g-3$ について $\dim W_e^1(C) = e-4$ である。又勝手な *component of* $W_e^1(C)$ の *maximal dimensional component* は C が *genus* 2 の二重被覆面でなければ $\{g_4^1\} + W_{e-4}(C)$ の形になる。

証明. [K], Corollary 2.2. と [K], Theorem 2.1. を参照。□

定理 $C(g \geq 11)$ の証明. (概略) 今仮定を満たす C に $\dim X = g-7$ である component $X \subset W_{g-1}^2(C)$ が存在したとする。X の general な $\mathcal{L} \in X$ は base point free,birational になる事が解る (証明は省略)。**補題** 3, **補題** 4, **補題** 7 によって (**補題** 4 の用語をそのまま用いて)

$$p(Z) = g_4^1 + W_{g-7}(C)$$

なる component $Z \subset q^{-1}(X)$ で $q(Z) = X$ かつ $p(Z) \subset W_{g-3}^1(C)$ は component である物が存在する (詳細は省略)。従って general $\mathcal{M} \in p(Z)$ は complete pencil で $\mathcal{M} = \mathcal{O}(g_4^1 + P_1 + \cdots + P_{g-7})$ と書ける事になり $\mathcal{L} = \mathcal{O}(g_4^1 + P_1 + \cdots + P_{g-7} + A + B)$ と書ける。**補題** 6 に従って C の $\mathcal{L}$ による平面モデル $C_{\mathcal{L}}$ の $P_1 + \cdots + P_{g-7} + A + B$ に対応した特異点は ordinal である。又

$$p_a(C_{\mathcal{L}}) = \frac{(g-2)(g-3)}{2} > g + \frac{(g-5)(g-6)}{2}$$

なので $C_{\mathcal{L}}$ には他の特異点 R が存在する。μ を R の multiplicity とすると complete base-point-free pencil $h_{g-1-\mu}^1$ が存在して $\mathcal{L} = h_{g-1-\mu}^1 \otimes \mathcal{O}(Q_1 + \cdots + Q_\mu)$ $(Q_1, \cdots, Q_\mu \in C)$ と書けなければいけない事になる。一方 $\mathcal{L}$ が充分 general 充分なら再び

$$h_{g-1-\mu}^1 \otimes \mathcal{O}(Q_1 + \cdots + Q_{\mu-2}) \in p(Z)$$

となるので (詳細は省略) R の multiplicity は再度 $g-5$ となる。従って

$$p_a(C_{\mathcal{L}}) = \frac{(g-2)(g-3)}{2} \lesssim g + 2 \cdot \frac{(g-5)(g-6)}{2}$$

である事から矛盾。□

次に**定理** C$(g = 10, 9)$ と**定理** C$(g = 8, 7)$ の証明の概略を述べる。最初に**定理** C$(g = 10, 9)$ に必要な補題を幾つか述べる。以下は**補題** 6 で $g = 9$ の時には仮定されなかった場合についてである。

補題 8. C を *genus* 9 の *tetragonal curve* で只一つの g_4^1 を持ち $e_3 = e_2 = 1$ であるとする。更に $\dim W_{g-1}^2(C) = g-7$ で C は g_6^2 を持たないと仮定する。この時 C は *genus* 2 の二重被覆になっている。

証明. 証明は省略。

これから**定理** C$(g = 10, 9)$ の証明の為には**補題** 7 が $g = 10, 9$ で議論出来れば**定理** C$(g \geq 11)$ と同様な証明方法が使える事になる (最後の $p_a(C_{\mathcal{L}}) = \frac{(g-2)(g-3)}{2} \lesssim g + 2 \cdot \frac{(g-5)(g-6)}{2}$ である事から矛盾, の部分は $g = 9$ では等号になってしまうが, その場合は g_4^1 が二つ存在する事になるので仮定に反する)。以下の補題では常に g_4^1 は只一つであると仮定しておく。以下は $g = 10$ の場合の**補題** 7 に相当する補題である。

補題 9. *C を genus $g=10$ の tetragonal curve で g_6^2 を持たないとする。又 C は genus 2 の二重被覆でないと仮定する。もし $\dim W_7^1(C)=3$ ならば $\{g_4^1\}+W_3(C)$ は $W_7^1(C)$ の只一つの maximal dimensional component である。*

証明. 証明は長いので省略。

以下は $g=9$ の場合の**補題** 7 に相当する補題である。

補題 10. *C を genus $g=9$ の tetragonal curve で g_6^2 を持たないとして C は genus 2 の二重被覆でないと仮定する。又以下の (i) から (vii) を同時に満たす場合でもないと仮定する。*

(i) E を genus 3 の non-hyperelliptic として二重被覆写像 $\phi : C \to E$ が存在する
(ii) $K_C \sim \phi^*(K_E)+2g_4^1$
(iii) $\dim \Gamma(C, \mathcal{O}(2g_4^1))=3$
(iv) E 上の h_4^1 があって $2g_4^1=\phi^* h_4^1$ となる
(v) $\mathcal{O}(h_4^1) \not\cong \mathcal{O}(K_E)$
(vi) $\phi_*\mathcal{O} \cong \mathcal{O}_E \oplus \mathcal{O}_E(-h_4^1)$
(vii) C は genus ≤ 2 の二重被覆ではない

この時もし $\dim W_6^1(C)=2$ ならば $\{g_4^1\}+W_2(C)$ は $W_6^1(C)$ の只一つの maximal dimensional component である。

証明. 証明は長いので省略。

さて上の条件 (i) から (vii) を同時に満たす C については更に補題を用意する必要がある。

補題 11. この場合 $\dim W_8^2(C) \lneq 2$ である。

証明. (概略) もし二次元の component$A \subset W_8^2(C)$ があったとする。general $\mathcal{L} \in A$ は**補題** 6 の仮定を満たす事は容易に示されるの。そこで $\mathcal{L}$ による平面モデル $C_{\mathcal{L}}$ を考える。この C 上には base point free な g_5^1 が存在しない事は Base-Point-Free-Pencil-Trick より解る。更に**補題** 6 と仮定より g_4^1 に対応する特異点は ordinal で只一つとなる。これから C が tetragonal と言う事から $C_{\mathcal{L}}$ の特異点は multiplicity 2 か 4 しかありえない。$S_{\mathcal{L}}$ を $\mathbb{P}^2$ のそれらの (infinitely near な特異点も込めた)7 点の特異点での blowing-up とする。$|-K_{S_{\mathcal{L}}}|$ は complete net である事が示される (詳細略)。さて $C_{\mathcal{L}}$ の特異点は Demazure [De] の言う quasi general position にある事が示されるので (詳細略) $-K_{S_{\mathcal{L}}}$ は nef になる ([De] pp.38-.pp.39 p.38 a), p.39 Définition 1, p.39 Théorème 1 $(a) \Rightarrow (d)$ 参照)。従って Reider の定理 ([R] p.310 Theorem 1 (i)) から $|-K_{S_{\mathcal{L}}}|$ は base point free となる。これから l を $\mathbb{P}^2$ の line の total transform として

$$f_{\mathcal{L}} = (|l|, |-K_{S_{\mathcal{L}}}|) : S_{\mathcal{L}} \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$$

を考えると $f_{\mathcal{L}}(S_{\mathcal{L}}) \sim 2\{pt\} \times \mathbb{P}^2 + 2\mathbb{P}^1 \times l$ も容易。今 Segre embedding $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ による quadratic の引き戻しを $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ の quadratic と呼ぶ事にすれば C は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ で二つの quadratic の complete intersection になっているのは容易。従って I を C の $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ に於ける ideal sheaf として $I(n) = I \otimes \mathcal{O}(n\{pt\} \times \mathbb{P}^2 + n\mathbb{P}^1 \times l)$ と置けば $\dim \Gamma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, I(2)) = 2$。今これから

$$\phi : A \to \mathbb{P}(\Gamma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, I(2))$$

を $\phi(\mathcal{L}) = f_{\mathcal{L}}(S_{\mathcal{L}})$ で定義する。$S_{\mathcal{L}}$ は 7 点 blowing-up なので ϕ は quasi-finite でないとならない。しかし $\dim \mathbb{P}(\Gamma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, I(2)) = 1$ なので $\dim A = 2$ と仮定した事に矛盾。□

定理 *C(g = 10, 9)* の証明. (概略) **補題**8, **補題**9, **補題**10, **補題**11 に従って**定理** C($g \geq 11$) と同じ議論で証明される。□

最後に**定理** C($g = 8, 7$) の証明の概略を述べる。$g = 7$ の場合は trivial case なので $g = 8$ のみ考えれば良い。証明には以下の補題が必要である。

補題 12. *C を genus 2 の二重被覆として C の genus を $g = 8$ とする。 この時 C は birational な g^2_6 を持たず dim $W^2_7(C) \leq 0$ である。*

証明. 証明は省略。

定理 *C(g = 8, 7)* の証明. $\dim W^2_{g-1}(C) = g - 7$ で $g = 8$ とする。もし $g^2_7 \in W^2_7(C)$ が base locus を持つとすると C は trigonal か birational な g^2_6 を持つのは明らか。従って general な $g^2_7 \in W^2_7(C)$ が base-point-free で C は trigonal でもなく birational g^2_6 も持たないと仮定して良い。**補題**3 と**補題**4 によって $\dim W^1_5(C) = 1$ である。これから C は tetragonal curve で ([BKMO; Theorem 1]) 勝手な $W^1_5(C)$ の maximal dimensional component は

$$\{g^1_4\} + W_1(C)$$

となる ([BKMO; (3.2.1) Corollary 2])。従って再度**定理** C($g \geq 11$) の証明の筋が**補題**12 によって使えるので C には二つ以上の g^1_4 が存在する事になる。それ故証明は完了する。□

References

[A] R. D. M. Accola, *Topics in the theory of Riemann surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1595, Springer Verlag, 1994.

[ACGH] E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Griffiths and J. Harris, *Geometry of Algebraic Curves I*, Springer Verlag, 1985.

[BKMO] E. Ballico, C. Keem, G. Martens and A. Ohbuchi, *On curves of genus eight*, Math. Z. **227** (1998), 543-554.

[C] M. Coppens, *Some remarks on the scheme W^r_d*, Ann. di Mat. pura ed applicata (4) **157** (1990), 183-197.

[CKM] M. Coppens, C. Keem and G. Martens, *Primitive linear series on curves*, Manuscripta Mathematica **77** (1992), 237-264.

[De] M. Demazure, *Surface de Del Pezzo - III. Positions presque générales.*, Séminaire sur les Singularités des Surfaces (A.Dold, B.Eckmann, eds.), Springer Verlag, 1980, pp. 36-49.

[GH] Griffiths and Harris, *The dimension of the variety of special linear systems on a general curve*, Duke Math. J. **47** (1980), 233-272.

[K] C. Keem, *On the variety of special linear systems on an algebraic curve*, Math. Ann. **288** (1990), 309-322.

[KO] T. Kato and A. Ohbuchi, *Very ampleness of multiple of tetragonal linear systems*, Comm. in Algebra **21** (1993), 4587-4597.

[KL] S. Kleiman and D. Laksov, *On the existence of special divisors*, Am. J. Math. **94** (1972), 431-436.

[M] G. Martens, *On dimension theorems of the varieties of special divisors on a curve*, Math. Ann. **267** (1984), 279-288.

[Ma] H. Martens, *On the varieties of special divisors on a curve*, J. Reine Angew. Math. **227** (1967), 111-120.

[MS] G. Martens and F.-O. Schreyer, *Line bundles and syzygies of trigonal curves*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **56** (1986), 169-189.

[Mu] D. Mumford, *Prym varieties*, Contributions to analysis (L. Ahlfors, I. Kra, B. Maskit and L. Nirenberg, eds.), Academic Press, 1974, pp. 325-350.

[Muk] S. Mukai, *Curves and Grassmannians*, Algebraic Geometry and Related Topics; Incheon-Korea, International Press, 1993, pp. 19-49.

[R] I. Reider, *Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces*, Annals of Math. **127** (1988), 309-316.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS SEOUL NATIONAL UNIVERSITY SEOUL 151-742, KOREA
E-mail address: khcho@math.snu.ac.kr

DEPARTMENT OF MATHEMATICS SEOUL NATIONAL UNIVERSITY SEOUL 151-742, KOREA
E-mail address: ckeem@math.snu.ac.kr

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF INTEGRATED ARTS AND SCIENCES TOKUSHIMA UNIVERSITY,TOKUSHIMA 770, JAPAN
E-mail address: ohbuchi@ias.tokushima-u.ac.jp