代数幾何学シンポジウム記録
1999年度　pp.94-103

曲面束と局所符号数

古田 幹雄　京大数理研

平成12 年1 月6 日

1　はじめに

以下，多様体とその間の写像はC^∞ カテゴリーのものとする．次元は実次元をあらわし，曲面とは実2 次元の多様体のことである．

X が$4k$ 次元の有向閉多様体であるとき，X の符号数$\mathrm{Sign}(X)$ とは，カップ積の積分によって定義される交差形式

$$H^{2k}(X,\mathbf{R})\times H^{2k}(X,\mathbf{R})\to\mathbf{R}$$

の符号数をさす．$\mathrm{Sign}(X)$ はX のホモトピー不変量であり，Hirzebruch の符号数定理によって次のような表示を許す．X の任意のRiemann 計量と，TX 上の計量を保つ任意の接続∇_X に対して，その曲率をF_{∇_X} とおくとき，

$$\mathrm{Sign}(X)=\int_X\mathcal{L}(F_{\nabla_X})_{4k}$$

と表示される．ただし，$\mathcal{L}:\Omega^2(so(TX))\to\oplus_{i=0}^k\Omega^{4i}(X)$ はL 多項式であり，$\mathcal{L}_{4k}$ は，$4k$ 次の部分である．なお，L 多項式は局所表示では

$$\mathcal{L}:\begin{pmatrix}0&x_1\\-x_1&0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0&x_2\\-x_2&0\end{pmatrix}\oplus\cdots\quad\mapsto\quad\prod\frac{x_i}{\tanh x_i}$$

によって定義されていた．特に，$\mathcal{L}(F_{\nabla_X})_{4k}$ が完全形式であるとき（あるいは恒等的に0 であるように∇_X を選べるとき）$\mathrm{Sign}(X)$ は0 になる．

$\bar{X}$ が境界をもつコンパクトな$4k$ 次元有向多様体であるとき，$H^{2k}(\bar{X},\partial\bar{X},\mathbf{R})$ を用いて同様に符号数$\mathrm{Sign}(\bar{X})$ が定義される．このときは$\bar{X}$ 上のRiemann 計量とそれを保つ接続$\nabla_{\bar{X}}$ が与えられたとき，$\mathcal{L}(F_{\nabla_{\bar{X}}})_{4k}$ が完全形式であったとしても,(あるいは恒等的に0 であるように$\nabla_{\bar{X}}$ を選べたとしても)，$\mathrm{Sign}(\bar{X})$ は0 とは限らない．しかし，そのようなとき，$\mathrm{Sign}(\bar{X})$ は境界の各成分からの寄与の和でかけることが期待される．

このような境界からの寄与は，signature defect と呼ばれる．講演では，$\bar{X}$ が曲面束の全空間となっている場合において，signature defect が定義されるためのひとつの条件について述べる．

本講演で述べる観察の出発点は，遠藤久顕さんの仕事を，[2] で知り，それを微分トポロジーの立場から述べなおしてみられないかと考えたことによる．

以下の説明は，[4] の説明と一部重なることをお断りする．

2 問題の設定

あらためて設定と問題を述べる．

$\bar{X}$ を境界をもつコンパクトな $4k$ 次元の有向多様体，$\bar{M}$ を境界をもつコンパクトな $4k-2$ 次元有向多様体とし，$\bar{f}:\bar{X}\to\bar{M}$ がファイバーが有向閉曲面 Σ であるファイバー束であると仮定する．$\bar{M}$ の境界を連結成分にわけて $\coprod_{i=1}^{m} N_i$ と表し，$Y_i := \bar{f}^{-1}(N_i)$, $\bar{f}_i = f|Y_i$ とおく．

次の問いを考える

問 1 $i=1,2,\ldots,m$ に対して，写像 $\bar{f}_i : Y_i \to N_i$ のみに依存する実数 $\phi(\bar{f}_i)$ を定義して, X の符号数 $\mathrm{Sign}(X)$ を $\mathrm{Sign}(X)=\sum_i \phi(\bar{f}_i)$ と和の形に表示することはできるか？

上の問いは閉多様体に対する次の問いと同値である．

f を4k 次元の有向閉多様体 X から 4k-2 次元の有向閉多様体 M への滑らかな写像とする. M が開部分集合 $U_\infty, U_1, U_2, \ldots, U_m$ の和であり，$U_1, U_2, \ldots, U_m$ は互いに交わらないと仮定し，f の $X_i = f^{-1}(U_i)$ への制限を $f_i := f|X_i$ と書く．ここで，$f_\infty : X_\infty \to U_\infty$ が, 曲面束となっていると仮定する.

問 2 $i=1,2,\ldots,m$ に対して，写像 $f_i : X_i \to U_i$ のみに依存する実数 $\sigma(f_i)$ を定義して, X の符号数 $\mathrm{Sign}(X)$ を $\mathrm{Sign}(X)=\sum_i \sigma(f_i)$ と和の形に表示することはできるか？

二つの問いの同値性についてはすぐ後の注で説明する．

このままの問いの形では, 一般には正しくない. しかし, ある限定のもとで成立することがしられている.

「限定」とは,「曲面束 $\bar{f}:\bar{X}\to\bar{M}$ [あるいは $f_\infty : X_\infty \to U_\infty$] が，なんらかの付加的な構造 s をもつ」という形で与えられる．ここで,「構造」とは, 曲面束に同伴するあるファイバー束の滑らかな切断として与えられるタイプのものを考える.（ファイバー束の構造群は，曲面の向きを保つ微分同相の全体のなす無限次元の群である．ファイバー束のファイバーは無限次元でもよい.）従って特に，この「構造」は，滑らかな写像によって引き戻すことができるタイプのものである．$i=1,2,\ldots,m$ に対して，この「構造 s」を N_i [あるいは $U_\infty \cap U_i$] の上に「制限」したものを，$\bar{s}_i$[あるいは s_i] と置く.

このとき,

問 3 $i=1,2,\ldots,m$ に対して，写像 $\bar{f}_i$ [f_i] および $\bar{s}_i$ [s_i] のみに依存する実数 $\phi(\bar{f}_i,\bar{s}_i)$ [$\sigma(f_i,s_i)$] を定義して, $\bar{X}$ [X] の符号数を $\mathrm{Sign}(\bar{X})=\sum_i \phi(\bar{f}_i,s_i)$ [$\mathrm{Sign}(X)=\sum_i \sigma(f_i,s_i)$] と和の形に表示できるか?

をこれから考える．

このように表示できるとき,「構造 s のもとで符号数は局所化する」と言い表すことにする．そのとき，$\phi(\bar{f}_i, \bar{s}_i)$ を signature defect と呼び，$\sigma(f_i, s_i)$ を「局所符号数」と呼ぶ．

注 1 k およびファイバーとなる曲面 Σ と，付加的な構造の種類を固定するとき，任意の $\bar{f} : \bar{X} \to \bar{M}$ に対するはじめの問いと，任意の $f : X \to M$ に対する次の問いとは同値である．対応は，$\bar{X} = X \setminus \cup_{i=1}^m U_i$ と書ける場合に

$$\phi(\bar{f}_i, \bar{s}) = \sigma(f_i, s_i) - \mathrm{Sign}(X_i), \quad X_i := f^{-1}(U_i) \text{ の閉包}$$

によって与えられる.(*Novikov* の和公式と，奇数次元の有向閉多様体の *cobordism group* が *torsion* であることからわかる.)

2.1 知られている例

(1) [6] ($k = 1$)．松本幸夫先生が，M が 2 次元で，一般ファイバーの曲面の種数が 2 以下のときには，限定なしに局所符号数を定義した．M が 2 次元で種数が 3 以上のときには，符号数は（なんらかの付加的な構造なしには）局所化しないことがわかっている．

(2) [3],[1] ($k = 1$) 上の結果は種数 3 以上の場合に遠藤久顕さんによって拡張された．M が 2 次元で，一般ファイバーの曲面が超楕円的であるときには，符号数が局所化するというものである．正確にいうと,「構造 s」としては，一般ファイバー上の involution であって，商が 2 次元球面となるものを考える．

なお, 筆者は専門外であるので歴史的な経過もこめて解説する能力はないが（[1], [5] を参照してください)，代数幾何的な状況では，閉 Riemann 面上の，特異ファイバーをもつ超楕円曲線束に対する局所符号数が定義されていた [1]. 寺杣友秀さんによってこれは遠藤さんの局所符号数と一致することが証明された [3] ．

代数幾何的な状況に限らず定義されている点で，遠藤さんの定義のほうが一般である．しかし，代数幾何的な状況における局所符号数は，ある不等式を満たすことがわかっている．遠藤さんの定義をもちいてこの不等式を純粋にトポロジーの観点から証明することは，筆者の知る限り，まだなされていない.（種数 2 のときは，松本先生によってなされている.)

(3) [7](k 一般)．森田茂之先生によって，$M \setminus U$ 上の曲面束のモノドロミーが，すべて写像類群の部分群であって $\mathcal{K}_{g,1}$ と呼ばれるものに属しているとき，符号数が局所化することがしられている．森田先生によると，この場合の局所符号数は，Casson 不変量と関連している．

(4) [5] (とりあえず$k=1$). 今野一宏さんの仕事の中で，Riemann 面上の代数的な（特異ファイバーをもつ）曲面束に対する次の結果とその一般化がある：一般ファイバーが種数 3 の曲面であり，M の次元が 2 のとき構造 s として「超楕円的でない」という条件を考えるとき，符号数が局所化する．すなわち，符号数が，特異ファイバーと，超楕円曲線をファイバーとする点の近傍に局所化する．一般化は一般の種数に対して Clifford 指数を用いて定式化される．generic でない Riemann 面をファイバーとする場合についても，Clifford 指数の値に応じて定式化される．さらに，今野さんによって，これらの局所符号数がある不等式をみたすことが証明されている．

(4) ($k=1$) [8] 講演の後，吉川謙一さんによる最近の結果を個人的にうかがった．私たちの言葉でいうなら，吉川さんは代数幾何的な状況において，(一般の種数に対して) $f: X \to M$ が特異ファイバーのないファイバー束である場合に，偶な half canonical line bundle の正則切断が 0 しかないような一般ファイバーをもつ曲面束に対して，局所符号数を定義し，決定した．(より精密な結果が得られているのだと思う.)

松本先生，遠藤さんは写像類群のコホモロジーを用いる方法をとる．森田先生は，framing を用いて幾何学的に局所符号数を定義する方法をとる．今野さん，吉川さんの方法は，代数幾何的，複素解析的なものである．

講演の目標は，第一に, 松本先生, 遠藤さんが $k=1$ の場合に超楕円曲線束に対してコホモロジカルに定義した局所符号数を, 森田先生の方法のようなある種の framing の構成によって幾何学的解釈を与えることである.

第二に, この解釈を利用して, 局所符号数の定義を拡張することである. その解釈を応用できる場合として，現在 2 つの例がある. ひとつの例は, 曲面上の超楕円曲線を一般ファイバーとする曲面束の拡張として, $4k-2$ 次元の多様体上の球面上の分岐被覆を一般ファイバーとする曲面束に対して，局所符号数を定義することである ([4] 参照)．もうひとつの例は, generic な Riemann 面を一般ファイバーとする曲面束に対する局所符号数を一般ファイバーの種数が大きく底空間の次元が高い場合に定義するものである. ここでは後者のみを説明する.

3 符号数が局所化するためのひとつの条件

3.1 森田-Munford 類を用いた問いの言いかえ

問いを，cohomological な言葉で言い換えてみる．

森田-Munford 類の定義の復習をする．曲面束 $f_\infty : X_\infty \to U_\infty$ に対して，ファイバーに沿った複素構造をひとつ固定する．すると，ファイバーに沿っ

た接束$T(X_\infty/U_\infty)$はX_∞上の複素直線束である．その上の任意の接続∇_∞をとり，∇_∞の接続をF_{∇_∞}とおく．そのとき

$$e_d(\nabla_\infty) := \int_X F_{\nabla_\infty}^{d+1}$$

はU_∞上の$2d$次の閉微分形式であり，それの代表する類は複素構造や∇_∞の取り方に依存しない$H^{2d}(U_\infty, \mathbf{R})$の要素となる．この要素を$e_d(f_\infty)$と書く．$e_d(f_\infty)$は曲面束$f_\infty : X_\infty \to U_\infty$上の森田-Munford類と呼ばれる.（整数係数でも定義されるが，ここでは実数係数でのみ考えることにする.）

問 4　曲面束$f_\infty : X_\infty \to U_\infty$の上に，ある構造$s_\infty$が存在するとの仮定のもとで，ある$4l-3$次の微分形式$\epsilon_{2l-1}(\nabla_\infty, s_\infty)$によって

$$e_{2l-1}(\nabla_\infty) = d\epsilon_{2l-1}(\nabla_\infty, s_\infty) \quad (l = 1, 2, \ldots)$$

とかけるか？ ただし，$\epsilon_{2l-1}(\nabla_\infty, s_\infty)$は引き戻しに関して自然性をもつものを考えている．

上の問いが前節の2つの問いと関係があることを説明する．正確にいうなら，一般ファイバーの曲面の種数を固定し，考える構造の種類を固定し，任意のkと任意のf_∞に対して上の問いが肯定的に解かれれば，前節の問いは肯定的に解かれる．

$f : X \to M$が与えられたとき，X上にRiemann計量を任意に固定する．$i = 1, 2, \ldots, m$に対してU_iの境界N_iがMの余次元1の閉部分多様体の構造をもつと仮定し，$\bar{M} := M \setminus \cup_{i=1}^m U_i$とおく．$f_\infty : X_\infty \to U_\infty$はファイバー束であるから，直和分解

$$TX_\infty = f_\infty^* TU_\infty \oplus T(X_\infty/U_\infty)$$

が定まる．TXの接続∇_Xであって，$\bar{X} := f^{-1}(\bar{M})$上で, 上の直和分解に応じて$f^*\nabla_{\bar{M}} \oplus \nabla_\infty$と分解されるものが存在する．このとき$\bar{X}$上で

$$\mathcal{L}(\nabla) = f^*\mathcal{L}(\nabla_{\bar{M}})\,\mathcal{L}(\nabla_\infty) = f^*\mathcal{L}(\nabla_{\bar{U}})(1 + \sum_{i=1}^{2k} a_i F_{\nabla_\infty}^{2i})$$

と書くことができる．ただし，$x/\tanh x = 1 + \sum_{i=1}^\infty a_i x^{2i}$とおいた．$\bar{f} = f|\bar{X}$のファイバーにそって積分すると，

$$\int_{\bar{f}} \mathcal{L}(\nabla) = \mathcal{L}(\nabla_{U_\infty}) \sum_{i=1}^{2k} a_i e_{2i-1}(\nabla_\infty)$$

となる．ここで問4が肯定的に解かれたとすると，

$$\int_{\bar{f}} \mathcal{L}(\nabla) = d\left(\mathcal{L}(\nabla_{\bar{M}}) \sum_{i=1}^{2k} a_i \epsilon_{2i-1}(\nabla_\infty, s_\infty)\right)$$

となる．さらに $\bar{M}$ 上で積分すると，Stokes の定理から

$$\int_{\bar{X}} \mathcal{L}(\nabla) = \sum_{i=1}^{m} \int_{N_i} \mathcal{L}(\nabla_{\bar{M}}) \sum_{i=1}^{2k} a_i \epsilon_{2i-1}(\nabla_\infty, s_\infty)$$

となる．したがって，

$$\mathrm{Sign}(X) = \sum_{i=1}^{m} \int_{X_i} \mathcal{L}(\nabla) + \int_{\bar{X}} \mathcal{L}(\nabla) = \sum_{i=1}^{m} \sigma(f_i, s_i)$$

と書くことができる．ここで

$$\sigma(f_i, s_i) := \int_{X_i} \mathcal{L}(\nabla) + \int_{N_i} \mathcal{L}(\nabla_{\bar{M}}) \sum_{i=1}^{2k} a_i \epsilon_{2i-1}(\nabla_\infty, s_\infty)$$

である．この $\sigma(f_i, s_i)$ がもろもろの choice に依存しないことを示すためには，ふたつの choice を滑らかにつなぎ，1 パラメータ族の全体に対して上の議論を繰り返し，Stokes の定理を用いることによって示される．

注 2 松本先生，遠藤さんの方法は，超楕円的対合と両立する写像類群の部分群において，$e_1 = d\epsilon_1$ となる ϵ_1 の存在と一意性を群のコホモロジーのレベルで示すことにあった．

注 3 *1.* 代数幾何的な状況でさらに $k = 1$ を考える．*Riemann* 面 M を底空間とし，特異ファイバーを許す代数曲線の族 $f : X \to M$ が与えられたとする．そのとき M から *Riemann* 面の *moduli* 空間への有理写像が存在し，それは自動的に M から *moduli* 空間の *Delignue-Munford* コンパクト化への正則写像に拡張される．この場合，コホモロジカルな問題は，（１）e_1 を *divisor* によって具体的に与えること，（２）その *divisor* と M の像との交差数を M の局所的なデータから具体的に記述すること，の二つに分割される．

2. しかし，代数幾何的な状況でも，$k > 1$ であるときには，M から *moduli* 空間への有理写像がコンパクト化への正則写像に拡張されるとは限らないので，上の（１）（２）に対応する問題を解くだけでは，まだ局所符号数は定義されていない．

3. C^∞ カテゴリーにおいては，$k > 1$ の場合のみならず，$k = 1$ の場合にも（１）（２）に対応する問題を解くだけではまだ局所符号数は定義されていない．

上の問 4 に答えるひとつの方法として，次の問 5 を解くことがある．

問 5 構造 s_∞ を用いて $T(X_\infty/U_\infty)$ 上の接続 ∇_∞ であって，X_∞ 上 $e_{2i-1}(\nabla_\infty) = 0$ となるものを構成せよ．

このような接続が構成されたとする．このとき，ϵ_{2i-1} を次のように定義することができる．

1. この接続に対して $\epsilon_{2i-1}=0$ とおく．
2. 他の任意の接続に対しては，ふたつの接続を線形に結び，Chern-Simons 微分形式を用いて ϵ_{2i-1} を定義することができる．詳細は略す．

問5が解かれるとき（問4を経由せず）問3に直接答えることも難しくない [4]．

3.2 ふたつの開集合上の平坦接続

問5を考察する．すなわち，構造 s_∞ を用いて X_∞ 上 $e_{2i-1}(\nabla_\infty)=0$ となる接続 ∇_∞ を $T(X_\infty/U_\infty)$ の上に構成したい．$e_{2i-1}(\nabla_\infty)=0$ となるための明らかな十分条件は勿論 $F_{\nabla_\infty}=0$ である．しかし，より弱く，$F^2_{\nabla_\infty}=0$ もひとつの十分条件である．以下の議論には，これを利用する．

$f:X\to M, f_i:X_i\to U_i\ (i=\infty,1,2,\dots,m)$ を Introduction の設定とする．

f_∞ のファイバーには複素構造が与え，それが U_∞ にそって連続に動くものと仮定する．このとき $T(X_\infty/U_\infty)$ は X_∞ 上の複素直線束である．

$T(X_\infty/U_\infty)$ に対して，次の命題のような構造 s_∞ を考えよう．

命題 1 構造 $s_\infty=(V,V',\nabla,\nabla')$ が与えられたとする．ここで，V,V' は $X_\infty=V\cup V'$ となる開集合であり，∇,∇' は各々，$T(X_\infty/U_\infty)$ を V,V' の上に制限したものの平坦接続である．このとき，X の符号数は局所化する．

$V\setminus V'$ 上 1 をとり $V'\setminus V$ 上 0 となる X_∞ 上の滑らかな関数 ρ によってふたつの平坦接続を貼り合わせ，X_∞ 上の（平坦ではない）接続 ∇_∞ を $\nabla_\infty=\rho\nabla+(1-\rho)\nabla'$ によって定義する．次の性質が鍵となる．

補題 1 $F^2_{\nabla_\infty}=0$.

証明：$V\cap V'$ 上で $\nabla'=\nabla+a$ であるとき，$F_{\nabla_\infty}=a\,d\rho$ となる．ここで $(d\rho)^2=0$ であるから求める式を得る．証明終

従って，奇数次の森田-Munford 類 e_{2l-1} の代表元を ∇_∞ を用いて表すと，

$$e_{2l-1}(\nabla_\infty)=\int_{f_\infty}F^{2l}_{\nabla_\infty}=0$$

となる．

したがって問5を解くことができる．

複素直線束 L の平坦接続を与えるひとつの方法は，L のある冪の自明化を与えることである．これを系として述べておこう．

系 1 構造$s_\infty = (V, V', N, N', f, f')$ が与えられたとする．ここで，V, V' は $X_\infty = V \cup V'$ となる開集合，N, N' は自然数である．また，f, f' は各々，$T(X_\infty/U_\infty)^{\otimes N}$, $T(X_\infty/U_\infty)^{\otimes N'}$, を V, V' の上に制限したもの自明化である．このとき，X の符号数は局所化する．

各ファイバー（と V, V' との共通部分）ごとに自明化を構成することができればそれを束ねて V あるいは V' 上の自明化が得られる．これが上の系の便利な点である．この系を適用することができる例を次に挙げよう．

4 generic な Riemann 面

定義 1 閉 *Riemann* 面 Σ が以下の条件を満たすとき「*generic*」であると呼ぶことにする．

1. 任意の *odd half canonical line bundle* $L = K^{1/2}$ に対して，$\dim_{\mathbf{C}} H^0(L) = 1$ である．
2. 任意の *odd half canonical line bundle* L に対して，それの 0 でない正則切断の零点はすべて一位である．
3. 相異なる二つの *odd half canonical line bundle*L_0, L_1 に対して，それらの 0 でない正則切断は，共通零点をもたない．

次の定理を証明する．

定理 1 $X_\infty \to U_\infty$ の各ファイバーには複素構造が（U_∞ 上の滑らかな族として）与えられており，各ファイバーの複素構造が上の定義の意味で *generic* であるとき，符号数は局所化する．

系 1 に注意すると，次の命題を示せば十分である．

補題 2 種数 g の閉 *Riemann* 面 Σ が *generic* であると仮定する．Σ のある *odd half canonical line bundle* L の 0 でない正則切断の零点となっている点の全体を D とおく．

1. g のみに依存するある自然数 N が存在して，$(T\Sigma)^N|\Sigma\backslash D$ には *canonical* に自明化が入る．
2. g のみに依存するある自然数 N' が存在して，$(T\Sigma)^N|D$ には *canonical* に自明化が入る．

実際，V, V' を次のように定義すれば系 1 を適用できる：U_∞ の各点 u に対して，x 上のファイバーを $(\Sigma)_u$ とおき，$(\Sigma)_u$ のある odd half canonical line bundle の 0 でない正則切断の零点となっている点の全体を $(D)_u$ とおく．こ

のとき，$\coprod_u (D)_u$ の管状近傍を V とおき，$\coprod_u (D)_u$ の補集合を V' とおけばよい．

以下，補題2の証明を述べる．

証明：いずれの主張も証明の仕方は同様であるので，後者のみを示す．

x を D の点とする．x が odd half canonical line bundle L の 0 でない正則切断 h のひとつの零点であると仮定する．h の零点でない D の点 x' は有限個である．x' が odd half canonical line bundle L' の 0 でない正則切断 h' の零点であると仮定する．このとき，

$$a := \pm Res_x \frac{(h')^3}{h} \quad a' := \pm Res_{x'} \frac{(h)^3}{h'}$$

は符号を除いて定まる 0 でない複素数である．このとき，$(T\Sigma)_x^{\otimes(-8)} = (L')_x^{\otimes 16}$ の要素

$$f_{x'} := \frac{h'(x)^{\otimes 16}}{a^6 (a')^2} \neq 0$$

は x と x' のみに依存して定まり，h, h' の取り方に依存しない．

x' の取り方の可能性の数の 8 倍を N' とおくとき，

$$\otimes_{x'} f_{x'}^{-1} \in (T\Sigma)_x^{\otimes N'}$$

は x のみに依存して定まる $(T\Sigma)_x^{\otimes N'}$ の自明化を与えている．証明終

参考文献

[1] T. Arakawa and T. Ashikaga, Local splitting families of hyperelliptic pencil I, preptint.

[2] H. Endo, マイヤーの符号数コサイクルと超楕円的ファイブレーション，研究集会「Hodge 理論・Log 幾何学・退化」報告集（八ヶ岳高原泉郷 1998 年 10 月 12 日–16 日）

[3] H. Endo, Meyer's signature cocycle and hyperelliptic fibration, (with Appendix written by T. Terasoma), preprint.

[4] M. Furuta 曲面束と局所符号数，研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」予稿集（高知工科大学 1999 年 9 月 13 日–17 日）

[5] K. Konno, Clifford index and the slope of fibered surfaces, J. Alg. Geom. 8 (1999), 207–220

[6] Y. Matsumoto, Lefschetz fibrations of genus two – a topological approach–, Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on Topology and Teichmüller Spaces held in Finland, ed. S. Kojima et al., World Scientific Publ., 1996, 123-148.

[7] S. Morita, Casson invariant, signature defect of framed manifolds and the secondary characteristic classes of surface bundles, J. Diff. Geom. 47 (1997) 560-599.

[8] K. Yoshikawa, private communication.