代数幾何学シンポジウム記録
1999年度　pp.84-88

形式的ブラウワー群とK3曲面のモジュライ空間の構造

桂　利行 (東大数理)

Dedicated to Professors T. Ọda and T. Shioda
on the occasion of their sixtieth birthday

1　主要結果

本稿は G. van der Geer との共同研究として得られた結果 [3] の主要部分をまとめたものである. 証明の詳細は省略するが, 証明の鍵になる命題については説明を与える.

X を正標数の代数的閉体 k 上の K3 曲面, $\mathcal{O}_X$ を X の構造層, $W_n(\mathcal{O}_X)$ を長さ n の Witt vectors の層とする. $W_n(\mathcal{O}_X)$ を定義域として Frobenius 写像 F, Vershiebung V, Restriction R が与えられる. したがって、その cohomology 群 $H^i(X, W_n(\mathcal{O}_X))$ を定義域として写像 F, V, R が与えられ, $RFV = FRV = RFV = p$ をみたす. Φ_X を X の形式的 Brauer 群, h を Φ_X の高さとする. よく知られているように

$$1 \leq h \leq 10 \quad \text{または} \; h = \infty$$

である (cf. [1]). Φ_X の高さ h はつぎのように特徴づけられる.

定理 1. 高さ h は, $H^2(X, W_n(\mathcal{O}_X))$ 上の Frobenius 写像 F が消えないような最小の自然数 n に等しい.

証明には, Artin-Mazur によって得られた結果 $D(\Phi_X) = H^2(X, W(\mathcal{O}_X))$ を用いる. ここに, $D(\Phi_X)$ は形式群 Φ_X の Cartier 加群であり,

$$H^2(X, W(\mathcal{O}_X)) = \varprojlim H^2(X, W_n(\mathcal{O}_X))$$

は長さ ∞ の Witt 環の cohomology 群である.

Z_1 を d 閉 1 形式のなす Ω^1_X の部分層とし, $\mathrm{C} : Z_1 \longrightarrow \Omega^1_X$ を Cartier 作用素とする. 層 Z_i を

$$Z_i = \mathrm{Ker}\ dC^{i-1} \subset Z_{i-1} \subset \Omega^1_X$$

によって帰納的に定義する. $B_1 = d\mathcal{O}_X$ とおき, 層 B_i を

$$B_i = \mathrm{C}^{-1}(B_{i-1}) \subset Z_1 \subset \Omega^1_X$$

によって帰納的に定義する (cf. [5]).

M を次数 $2d$ の偏極 K3 曲面のモジュライスタック, $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow M$ を K3 曲面の普遍族とする. 以下, $p \not| 2d$ を仮定する. $v = \pi_* \Omega^2_{\mathcal{X}/M}$ とおけば, これは M の Chow 群 $CH^*_{\mathbf{Q}}(M)$ の元を与える. 自然数 h $(1 \leq h \leq 10)$ および $h = \infty$ に対し,

$$M^{(h)} = \{X \in M \mid \text{height } \Phi_X \geq h\}$$

とおく. このとき,

$$M = M^{(1)} \supset M^{(2)} \supset \ldots \supset M^{(10)} \supset M^{(\infty)}$$

である. これらの記号を用いて次のような結果を得る.

定理 2. dim $M^{(h)} = 20 - h$ $(1 \leq h \leq 10)$.

(この定理は, $h = 1$ のときは, Ogus [6] によって既知. さらに, Ogus は Crystalline cohomology を用いて, この定理の別証を与えた (cf. [7]). また, dim $M^{(\infty)} = 9$ であることも知られている ([6]).) 自然な単射 $Z_h \to \Omega^1_X$ から誘導された準同型写像 $H^1(X, Z_h) \to H^1(X, \Omega^1_X)$ の像を Im $H^1(X, Z_h)$ と書く.

定理 3. (X, D) を偏極 K3 曲面, $x \in M$ を (X, D) に対応する点とする. Φ_Xの高さ $h < \infty$ と仮定する. このとき,

$$\dim H^1(X, B_h) = h - 1, \ \dim H^1(X, Z_h) = 20, \ \text{Im } H^1(X, Z_h) = 21 - h$$

が成立する. このとき, $M^{(h)}$の x における接空間は

$$\{\text{Im } H^1(X, Z_h)\} \cap D^{\perp} \subset H^1(X, \Omega^1_X)$$

と自然に同型である. とくに, $M^{(h)} \setminus M^{(\infty)}$ の点は, $M^{(h)}$の非特異点である. さらに, Chow 群 $CH^{h-1}_{\mathbf{Q}}(M)$ における $M^{(h)}$の類は

$$(p^{h-1} - 1)(p^{h-2} - 1) \ldots (p - 1)v$$

で与えられる.

3

2 モジュライ空間のストラティフィケーション

X を K3 曲面とし, 次のような加法群の double complex CW_n を考える.

$$\begin{array}{ccccc}
\uparrow\partial & & \uparrow\partial & & \uparrow\partial \\
C_2(W_n(\mathcal{O}_X)) & \xrightarrow{D_n} & C_2(\Omega^1_X) & \xrightarrow{d} & C_2(\Omega^2_X) \\
\uparrow\partial & & \uparrow\partial & & \uparrow\partial \\
C_1(W_n(\mathcal{O}_X)) & \xrightarrow{D_n} & C_1(\Omega^1_X) & \xrightarrow{d} & C_1(\Omega^2_X) \\
\uparrow\partial & & \uparrow\partial & & \uparrow\partial \\
C_0(W_n(\mathcal{O}_X)) & \xrightarrow{D_n} & C_0(\Omega^1_X) & \xrightarrow{d} & C_0(\Omega^2_X)
\end{array}$$

ここに, C_i は i-th Čech cochains, d は微分形式の外微分, 縦方向はČech の意味の微分である. D_n は Serre によって導入された微分で, 次のように与えられる (cf. [8]):

$$D_n : W_n(\mathcal{O}_X) \to \Omega^1_X$$
$$D_n(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = a_0^{p^{n-1}-1}da_0 + \ldots + a_{n-2}^{p-1}da_{n-2} + da_{n-1}.$$

この微分は $D_{n+1}V = D_n$ を充たし, 同型写像

$$D_n : W_n(\mathcal{O}_X)/FW_n(\mathcal{O}_X) \cong B_n\Omega^1_X$$

を引き起こす. CW_nに付随した single complex の i-th cohomology 群を $H^i_{DRW_n}(X)$ と書く. $n=1$ のときは, この cohomology 群はふつうの de Rham cohomology 群 $H^i_{DR}(X)$ にほかならない. $H^2_{DRW_n}(X)$ は, de Rham cohomology 群の Hodge filtration と同様の filtration

$$0 \subset \mathrm{F}^2 \subset \mathrm{F}^1 \subset H^2_{DRW_n}(X).$$

をもつ. このとき $0 \subset \mathrm{F}^2 \subset \mathrm{F}^1$ は $H^2_{DR}(X)$ の Hodge filtration の対応する部分と一致する. 自然な同型

$$H^2_{DRW_n}(X)/\mathrm{F}^1 \cong H^2(X, W_n(\mathcal{O}_X))$$

を得るが, $H^2_{DRW_n}(X)$ 上の Frobenius 写像 F は F^1上零写像であるから,

$$F : H^2(X, W_n(\mathcal{O}_X)) \longrightarrow H^2_{DRW_n}(X).$$

なる写像を誘導する.

また, $V^{n-1} : \mathcal{O}_X \longrightarrow W_n(\mathcal{O}_X)$ は加法群の準同型写像

$$V^{n-1} : C_i(\mathcal{O}_X) \longrightarrow C_i(W_n(\mathcal{O}_X)).$$

を誘導するから, $C_i(\Omega_X^i)$ 上は恒等写像を考えることによって, double complex の準同型写像 $V^{n-1} : CW_1 \longrightarrow CW_n$ をうる. もうひとつ次のような double complex $CW_n^{(0)}$ を考える:

$$
\begin{array}{ccccc}
\uparrow \partial & & \uparrow & & \uparrow \\
C_2(W_n(\mathcal{O}_X)) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow \partial & & \uparrow & & \uparrow \\
C_1(W_n(\mathcal{O}_X)) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow \partial & & \uparrow & & \uparrow \\
C_0(W_n(\mathcal{O}_X)) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

$R : W_n(\mathcal{O}_X) \longrightarrow W_{n-1}(\mathcal{O}_X)$ は加法群の準同型写像

$$R : C_i(W_n(\mathcal{O}_X)) \longrightarrow C_i(W_{n-1}(\mathcal{O}_X)).$$

を誘導するから, これを用いて, double complex の準同型写像 $R : CW_n \longrightarrow CW_{n-1}^{(0)}$ をうる. 以上から double complex の完全系列

$$0 \to CW_1 \xrightarrow{V^{n-1}} CW_n \xrightarrow{R} CW_{n-1}^{(0)} \to 0$$

が得られ, したがって, 加法群の準同型写像

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & H^2_{DR}(X) & \xrightarrow{V^{n-1}} & H^2_{DRW_n}(X) & \xrightarrow{R} & H^2(W_{n-1}(\mathcal{O}_X)) & \to & 0 \\
 & & F\downarrow & & F\downarrow & & F\downarrow & & \\
0 & \to & H^2_{DR}(X) & \xrightarrow{V^{n-1}} & H^2_{DRW_n}(X) & \xrightarrow{R} & H^2(W_{n-1}(\mathcal{O}_X)) & \to & 0
\end{array}
$$

をうる.

$F : H^2(W_n(\mathcal{O}_X)) \longrightarrow H^2(W_n(\mathcal{O}_X))$ が $i = 1, \ldots, n-1$ に対して零写像であるとする. このとき, 上記の図式より $FH^2_{DRW_n}(X) \subset V^{n-1}H^2_{DR}(X)$ となる. したがって, 加法群の同型写像 $H^2_{DR}(X) \cong V^{n-1}H^2_{DR}(X)$ を用いて, 加法群の準同型写像

$$\Phi_n : H^2(W_n(\mathcal{O}_X)) \xrightarrow{F} V^{n-1}H^2_{DR}(X) \cong H^2_{DR}(X).$$

をうる.

$H^0(X, \Omega_X^2)$ の基底ω_0をとる. $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ におけるその双対底をζ_0とする. $H^0(X, \Omega_X^2)$ は自然に $H^2_{DR}(X)$ の部分空間とみなせるから 2 形式ω_0は $H^2_{DR}(X)$ の元としてよい. 完全系列

$$0 \to W_{n-1}(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{V} W_n(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{R^{n-1}} \mathcal{O}_X \to 0$$

から, $R^{n-1} : H^2(W_n(\mathcal{O}_X)) \longrightarrow H^2(\mathcal{O}_X)$ なる全射をうる. $R^{n-1}(\tilde{\zeta}_0) = \zeta_0$ となる元$\tilde{\zeta}_0 \in H^2(W_n(\mathcal{O}_X))$ をとる. $H^2_{DR}(X)$ には内積がはいっているが, $\eta \in H^2_{DR}(X)$ がF^1にはいるための必要充分条件は, $\langle \eta, \omega_0 \rangle = 0$ となることである. 上記記号の下に, この事実と定理 1 を用いて次の命題をうる.

命題 4. K3 曲面 X に対し, Frobenius 写像

$$F : H^2(W_i(\mathcal{O}_X)) \rightarrow H^2(W_i(\mathcal{O}_X))$$

が$i = 1, \ldots, n-1$ に対して零写像であるとする. このとき, $h(\Phi_X) \geq n+1$ であるための必要充分条件は $\langle \Phi_n(\tilde{\zeta}_0), \omega_0 \rangle = 0$ となることである.

この命題によって, $M^{(n)}$における $M^{(n+1)}$の定義方程式をつくることができる. 第 1 節の結果は, この方程式によって定義される多様体の接空間の構造を調べることによって得られる. 詳細は[3] をご覧いただきたい. また, アーベル曲面についての対応する結果については [4] にある. Calabi-Yau 多様体に対しても同様の方法を適用することができるが, これについては現在論文を準備中である.

参考文献

[1] M. Artin, Supersingular K3 surfaces, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 10 (1974), 543–568.

[2] M. Artin and B. Mazur, Formal groups arising from algebraic varieties, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 10 (1977), 87–132.

[3] G. van der Geer and T. Katsura, On a stratification of the moduli of K3 surfaces, Preprint, math.AG/9910061, submitted to J. of European Mathematical Society.

[4] G. van der Geer and T. Katsura, Formal Brauer groups and a stratification of the moduli of abelian surfaces, Preprint, submitted to Proc. of Texel Conf. 1999.

[5] L. Illusie, Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline, Ann. Sci. ENS, 12 (1979), 501–661.

[6] A. Ogus, Supersingular K3 crystals, Astérisque 64 (1979), 3–86.

[7] A. Ogus, Singularities of the height strata in the moduli of K3 surfaces, preprint.

[8] J.-P. Serre, Sur la topologie des variétés algébriques en charactéristique p, Symposion Internacional de topologia algebraica 1958, 24–53.