代数幾何学シンポジウム記録
1999年度 pp.50-77

退化とモノドロミー
—— 特異ファイバーの分裂と原子ファイバーについて ——

高村 茂 (京都大学数理解析研究所)

§1 序

種数 $g \geqq 1$ の複素曲線の退化が与えられたとき，その特異ファイバーを複数個のより単純な特異ファイバーに分裂させる操作が，退化の変形を通じて定義される。もし，特異ファイバーがいかなる分裂をも持たないとき，原子ファイバーと呼ばれる。
このとき，次の問題を考えたい：

問題：原子ファイバーを完全に分類せよ。

この問題は，複素曲線上の複素曲線束の微分同相問題や，位相モノドロミーとして現われる写像類群の元の分解とも関わっており，トポロジーの観点からも興味が持たれる。
さて，原子ファイバーが完全に分類されているのは，種数1と2の場合のみで，種数1の原子ファイバーは，B. Moishezon ([M] 1977) によりなめらかな楕円曲線の multiple と

nodeを1つだけ持つ楕円曲線になることが示されている。
また，種数2のばあいは，E. Horikawa（[Ho] 1988）の結果とT. Arakawaによる定理を併せて，原子ファイバーはnodeを1つだけ持つ安定曲線になることが知られている。
Ashikaga と Arakawa（[AA] 1998）は，種数が3,4の超楕円曲線の退化の特異ファイバーで原子的なものの候補をリストアップした。
これらの仕事で用いられた手法は，2重分岐被覆として退化族を実現して，branch curveの変形により退化族の変形を構成するというものであり，非超楕円曲線の退化族に対しては使えない（種数が3以上の場合は常に非超楕円曲線が存在することに注意）。
さて，M. Reid（[R] 1990）は，種数3の原子ファイバーを，なめらかな種数2の2重であるmultiple fiberとnodeを1つもつ安定曲線である，と予想している。
さて，我々[T1]は，与えられた特異ファイバーの分裂可能性を判定する新しい方法を与え，その応用として種数3,4,5の原子ファイバーを完全に分類した。
（このとき，使われた代表的な判定法については§3を参照）

定理1([T1]) 種数3,4,5の原子ファイバーの完全なリストは次の通りである。

種数3: 2Θ (Θ: なめらかな種数2の曲線),
node を1つもつ安定曲線

種数4: 3Θ (Θ: なめらかな種数2の曲線),
node を1つもつ安定曲線

種数5: 4Θ (Θ: なめらかな種数2の曲線),
2Θ (Θ: なめらかな種数3の曲線),
node を1つもつ安定曲線

ここで, node が一つある安定曲線は,(種数にかかわらず)原子的であることはよく知られている。また, multiple fiber $m\Theta$ (Θ: なめらかなコンパクトな複素多様体, $m \geq 2$)は原子的であることが, [T2] で示されている。

さて, 種数が6以上の場合, 原子ファイバーの完全なリストはどういうものであろうか? 種数が5以下の原子ファイバーの分類を考慮に入れると, 次が正しいかどうか気になるところである。

問題　任意の原子ファイバーは，node を 1つ持つ安定曲線か，$m\Theta$ (Θ：なめらかな曲線，$m \geqq 2$) の形の multiple fiber のいずれかであるか？

なお，種数6のばあい §3の方法で計算を続行中である。

§2　特異ファイバーの分裂

$\pi : M \to \Delta$ を なめらかな複素曲面 M から 十分小さい開円板 $\Delta = \{s \in \mathbb{C} \mid |s| < \varepsilon\}$ への proper な全射正則写像で，次の条件を満たすとする：

(i)　$X := \pi^{-1}(0)$ は 特異ファイバー

(ii)　$\pi^{-1}(s)$　$(s \neq 0)$ は，種数 g の なめらかな曲線

このとき，$\pi : M \to \Delta$ を，種数 g の曲線の退化という。

次に 特異ファイバー X の分裂という概念を導入しよう。

まず，なめらかな 3-fold $\mathcal{M}$ と次のような可換図式が存在すると仮定する：

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \Delta\times\Delta' \arrow[dl, "pr_2"] \\ & \Delta' & \end{tikzcd}$$

ここで，

(i) $\Delta' = \{t\in\mathbb{C} \mid |t|<\delta\}$ （δはεより十分小），

(ii) Φは proper な全射正則写像，

(iii) $\pi_0 : M_0 \to \Delta\times\{0\}$ は，$\pi : M \to \Delta$ に一致する（ただし，$M_t := \varphi^{-1}(t)$，$\pi_t := \Phi|_{M_t}$）

このような図式を$(\mathcal{M}, \Phi)$と略記して $\pi : M\to\Delta$ の族という。

次に，$\pi : M\to\Delta$ が relatively minimal であると仮定する。もし $\pi_t : M_t \to \Delta\times\{t\}$ $(t\neq 0)$ が少くとも２つ以上の特異ファイバーを持てば，$(\mathcal{M}, \Phi)$ を $\pi : M\to\Delta$ の分裂族ということにする。このとき $\pi_t : M_t \to \Delta\times\{t\}$ $(t\neq0)$ の特異ファイバーを $X_1, X_2, \cdots, X_\ell$ $(\ell\geqq 2)$ と書くと，Xは $X_1, X_2, \cdots, X_\ell$ に分裂するという。

2つの退化 $\pi_1: M_1 \to \Delta$ と $\pi_2: M_2 \to \Delta$ が位相同型とは，向きを保つ同相写像 $F: M_1 \to M_2$ と $f: \Delta \to \Delta$ ($f(0)=0$) が存在して，次の図式が可換になることをいう：

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{F} & M_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \Delta & \xrightarrow{f} & \Delta \end{array}$$

さて，種数 $g \geqq 1$ の relatively minimal な退化の位相同型類に対し，この類の代表元である退化で分裂族を持つものがあれば，この類を非原子的という。そうでなければこの類を原子的という。また，その類の特異ファイバーを原子ファイバーという。

§3 原子ファイバーの決定のプロセス

退化の特異ファイバーが normal crossing かつ既約成分に (−1)-曲線があれば，それは必ず3点以上で他の既約成分と交わる時，この退化を normally minimal という。relatively minimal な退化が与えられた時，適当に blow up を繰り返すことにより，normally minimal な退化が一意的に決まる。また，normally minimal な

退化の特異ファイバーの形状や既約成分の重複度は位相的モノドロミーの情報から決定される（松本-Montesinos [MM]）。

さて，normally minimal な退化 $\pi: M \to \Delta$ に対し，M の (-1)-曲線を次々に blow down していくことにより得られた relatively minimal な退化を $\pi': M' \to \Delta$ と記すことにする。
次に，$(\mathcal{M}, \Psi)$ を $\pi: M \to \Delta$ の族としたとき，小平の安定性定理により (-1)-曲線は変形で保たれるので，$\mathcal{M}$ は (-1)-曲線の族を含む。これらを一斉に blow down することを繰り返して $\pi': M' \to \Delta$ の族が得られる。これを $(\mathcal{M}', \Psi')$ と書くことにする。

我々は，[T1] で normally minimal な退化の位相同型類の代表元として "linear な退化" $\pi: M \to \Delta$ を取り，$(\mathcal{M}', \Psi')$ が分裂族になるような $\pi: M \to \Delta$ の族 $(\mathcal{M}, \Psi)$ のいろいろな構成法を与えた。ここで，"linear な退化" とは，大ざっぱに言って各既約成分の normal bundle の中

に局所的な退化を実現して、それらを貼り合せたものである。

さて、種数3,4,5の原子ファイバーが、序の定理1で述べたものに限ることを示すには、スムースな曲線のmultipleでない任意のnon-reducedな特異ファイバーが分裂することを示せばよい。

このことを示すのに、我々は次の3つの方法（cf. [T1]）

- 方法1. 特異ファイバーの形状による分裂可能性の判定法
- 方法2. 特異ファイバーの既約成分の重複度の数値的性質による分裂可能性の判定法
- 方法3. 重み付きグラフを用いた分裂族の構成法

を用いた。ここで、2.と3.の方法を適用するためには、特異ファイバーの既約成分の重複度が分かっていないといけないので、種数3,4,5の特異ファイバーの部分的な分類が必要になってくる。完全な分類に比べると、我々が必要な分類はずっと少くて済むが、それでも種数が増えるにつれ、計算が非常に複雑になる（§4参照）

また、大部分の特異ファイバーが分裂することは1と2を適用して示せるが、1.と2.の判定法にかからない特異ファイバーに対しては、3.を用いるのである。

本稿では、1.と2.の判定法で代表的なものを挙げておく。その他の判定法や、3.については[T1]をみられたい。

- 特異ファイバーの形状による分裂可能性の判定法

$m \geqq 2$ を整数として、次のような non-isolated singularity を考える：

$$V = \{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^m y^m = 0 \}$$

このとき V を multiple node という。
これに対して、次のような判定法がある。

判定法1.

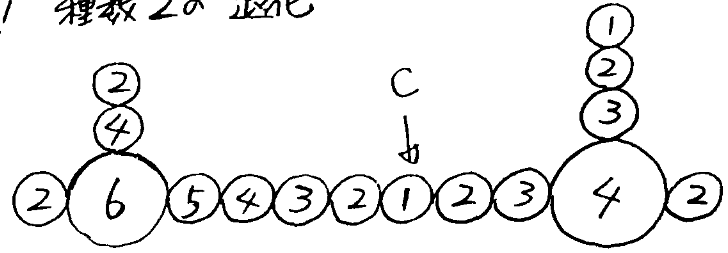
もし、特異ファイバー X が multiple node をもてば X は分裂する。

注 X が multiple node をもつのは、重複度が2以上で自己交差をもつ既約成分を含む時か、重複度が2以上で等しいような2つの既約成分が交わっている時である。

判定法2

特異ファイバー X が、重複度が1の既約成分の集合 C で $X \setminus C$ が少くとも2つの連結成分からなるものを含めば X は分裂する。

例1　種数2の退化



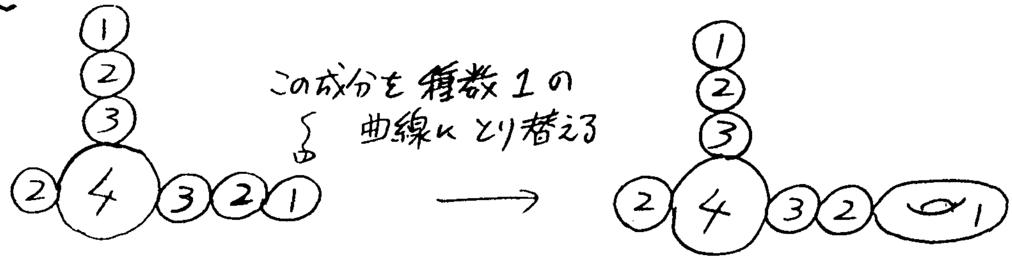
X

ここで，◯ ＝ $\mathbb{P}^1$ で，各数字は重複度を表す。

判定法3

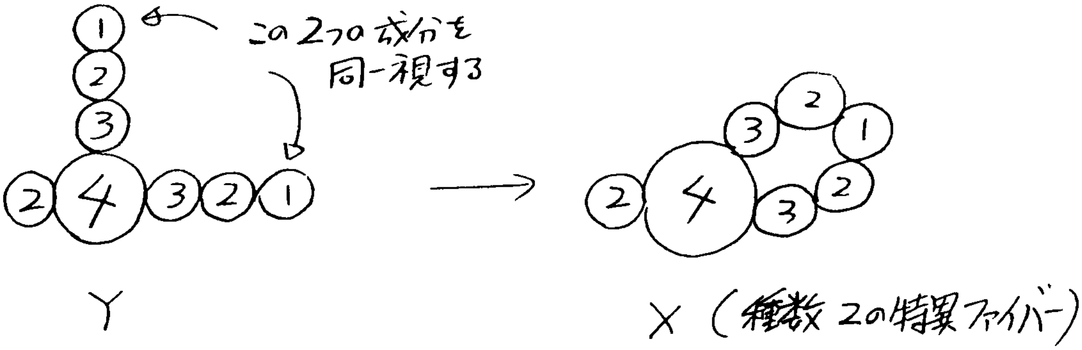
特異ファイバーXが，種数の低い特異ファイバーYの重複度1の既約成分を"改変"して得られたものとする。
このとき，Yが分裂すればXも分裂する。

例2



Y（種数1の特異ファイバー）　　　X（種数2の特異ファイバー）

例3



例2, 3では，単にトポロジカルな操作で，Xを作っているが，実際にXを特異ファイバーにもつ退化が存在することは［T1］の linear な退化の構成法を用いて証明できる。

次に，特異ファイバーXをもつ退化$\pi: M \to \Delta$に対し，fibrationと可換な巡回自己同型$f: M \to M$で次の条件を満たすものが存在したとする。

（ア）Θ_kをXの既約成分とすると，
$f(\Theta_k) = \Theta_k$ならば，Θ_kの重複度は1でΘ_kはスムース，かつfの固定点は，Θ_kと他の既約成分の交点ではない。

（イ）．Cを，$f(\Theta_k) = \Theta_k$なる既約成分から成る集合とするとき，$X - C$は少くとも2つ以上の連結成分をもつ。

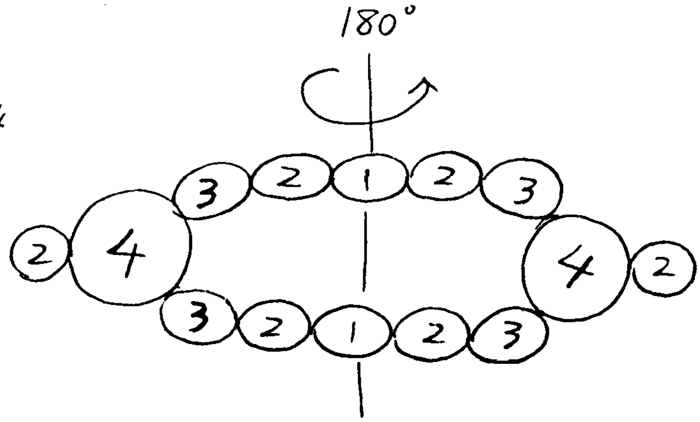
このとき，fの作用によるMの商空間 $M/\langle f \rangle$ の特異点解消空間をRとする。また自然な退化を$r: R \to \Delta$とかく。

このとき，

判定法４

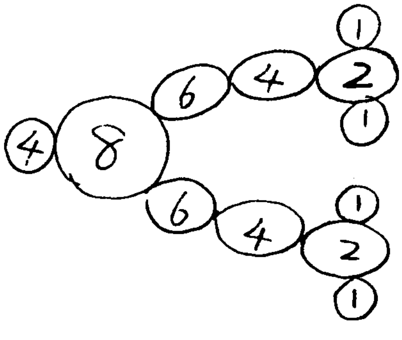
$r: R \to \Delta$の特異ファイバーYは分裂する。

例４



X（種数３の特異ファイバー）

このとき，

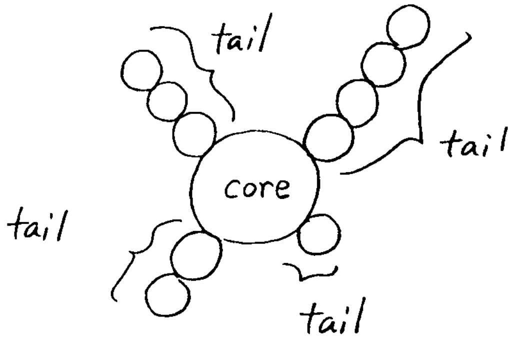


Y

この例では，もちろん，Cは，involutionの軸が貫いている２つの重複度が１の$\mathbb{P}^1$である。

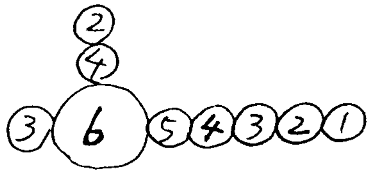
• 特異ファイバーの既約成分の重複度の数値的性質による分裂可能性の判定法

特異ファイバー X が star shaped と仮定する。すなわち，X の reduced part は，core と呼ばれる既約成分に，tail と呼ばれる $\mathbb{P}^1$ の chain がくっついた形をしている。

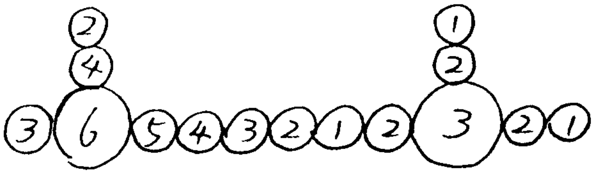


X の reduced part

例えば，種数 1 の特異ファイバー



は，star shaped であるが，種数 2 の特異ファイバー



は star shaped でない。

さて，X が star shaped なとき，X を

$$X = m_0\Theta_0 + \sum_j T^{(j)}$$

と表す。ただし，Θ_0 は core。また 各 $T^{(j)}$ は tail で

$$T^{(j)} = m_1^{(j)}\Theta_1^{(j)} + m_2^{(j)}\Theta_2^{(j)} + \cdots + m_{\ell_j}^{(j)}\Theta_{\ell_j}^{(j)}$$

（$\Theta_1^{(j)}, \Theta_2^{(j)}, \cdots, \Theta_{\ell_j}^{(j)}$ は，$\mathbb{P}^1$ で，$\Theta_1^{(j)}$ は，Θ_0 と1点 $P_1^{(j)}$ で交わり，$\Theta_i^{(j)}$ と $\Theta_{i+1}^{(j)}$ は，1点 $P_{i+1}^{(j)}$ で交わる）

の形をしているものとする。

また，M の中での Θ_0 及び $\Theta_i^{(j)}$ の自己交差数をそれぞれ $-r_0$，$-r_i^{(j)}$（$r_0 \geqq 1$，$r_i^{(j)} \geqq 2$ は整数）とする。

このとき，

判定法 5

$\Theta_0 = \mathbb{P}^1$ かつ 次の条件をみたす 自然数 b と X の連結な sub-divisor $Y = n_0\Theta_0 + \sum_j n_1^{(j)}\Theta_1^{(j)} + n_2^{(j)}\Theta_2^{(j)} + \cdots + n_{\lambda_j}^{(j)}\Theta_{\lambda_j}^{(j)}$ が存在すると仮定する：

（条件 1）

- $$\frac{\sum_j n_1^{(j)}}{n_0} = r_0$$

- $$\frac{n_{i-1}^{(j)} + n_{i+1}^{(j)}}{n_i^{(j)}} = r_i^{(j)} \quad (i = 1, 2, \cdots, \lambda_j - 1)$$

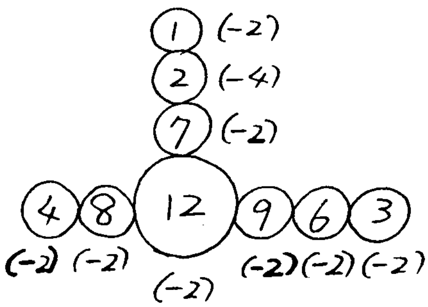
(条件2)

"$n^{(j)}_{\lambda_j}=1$ かつ $m^{(j)}_{\lambda_j}=b$ …(ア)" または

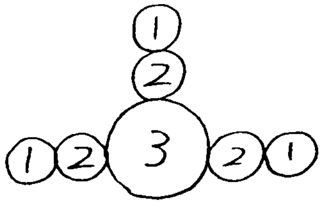
"$\dfrac{n^{(j)}_{\lambda_j}}{n^{(j)}_{\lambda_j-1}}$ は $r^{(j)}_{\lambda_j}$ 以上の整数 かつ $b\,n^{(j)}_{\lambda_j} \leq m^{(j)}_{\lambda_j}$ …(イ)"

このとき，X は分裂する。

例5　X を次のような種数3の特異ファイバーとする。



ここで，カッコ内の数字は，既約成分の自己交差数を表す。
このとき，上の判定法の b と Y として，$b=2$ 及び



Y

が取れる。

したがって，X は分裂する。

次の判定法は，判定法5の系である。

判定法6

$\Theta_0 = \mathbb{P}^1$と仮定する。また，Xのtailsのうちに，次の条件を満たすようなr本$(r := r_0)$のtails $T^{(1)}, T^{(2)}, \cdots, T^{(r)}$が存在すると仮定する。

（条件）　各$T^{(j)}$ $(j=1,2,\cdots,r)$に対し，既約成分$\Theta_{\lambda_j}^{(j)}$が存在して，

(1)　$m_{\lambda_1}^{(1)} = m_{\lambda_2}^{(2)} = \cdots = m_{\lambda_r}^{(r)}$

(2)　$\lambda_j \geqq 2$ならば，$\Theta_i^{(j)}$ $(i=1,2,\cdots,\lambda_j-1)$の自己交差数は$-2$.

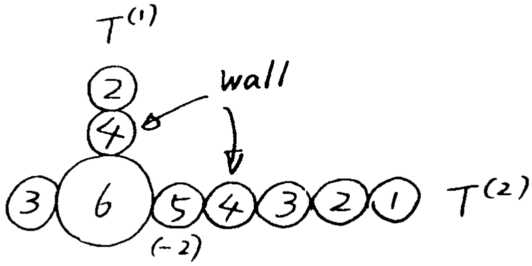
このとき，Xは分裂する。

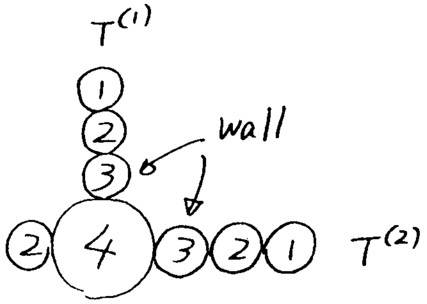
<u>注意</u>　$\lambda_j=1$のときは，（条件）の(2)は不要である。

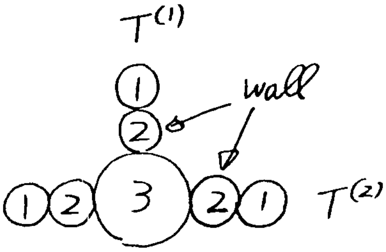
判定法6の既約成分$\Theta_{\lambda_j}^{(j)}$のことを，wallという。

種数1の特異ファイバーに対して，wallの組の例を挙げておこう。

例6



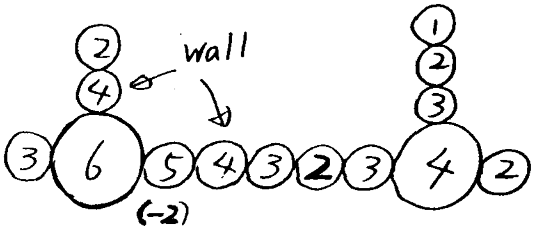




Remark　判定法5, 6では $\Theta_0=\mathbb{P}^1$ と仮定したが，Θ_0 の genus が1以上の場合も，Θ_0 の normal bundle に条件を付けると，同様のことが成り立つ。

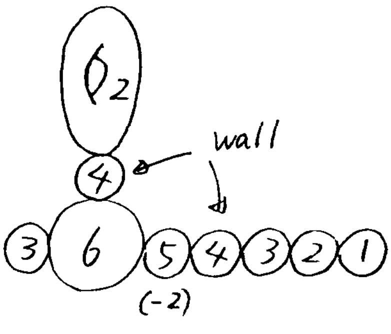
さて，判定法6における X の分裂族は著しい性質をもつ。すなわち，wall より外側では，smoothing の trivial family になっている。（注：判定法5でも類似のことが成り立つ）。
このことから，X の wall の外側を"改変してできた"特異ファイバーは分裂することが分かる。
したがって，判定法5，6は star shaped な特異ファイバー以外の場合にも適用できるのである。
たとえば，次の2例は，分裂することが分かる。

例7



種数2の特異ファイバー

例8



種数3の特異ファイバー

?

§4 退化の帰納的構成と分類

曲線の退化の位相モノドロミーが（写像類群の元として）有限位数のとき，有限型の退化といい，そうでないときは無限型ということにする。

この節では，種数 g の無限型の退化を種数が $0, 1, \cdots, g-1$ の有限型の退化から帰納的に構成する我々の方法［T1 ］を概説する。
この方法を使うと，種数 g の曲線の退化の分類が帰納的に実行できる。
（ここで，複素曲線への巡回群作用にかんする Harvey の定理［H］から有限型の退化を分類できることに注意）。
もっとも，特異ファイバーの形状による分裂可能性の判定法を考慮に入れると，原子ファイバーの分類問題を考えるためには，特別な退化のみ分類する必要があることを付記しておく。

Remark　我々の方法とは異なる退化の分類法として，松本-Montesinos［MM］の理論に基づいた足利-石坂による仕事がある。彼らの方法は，安定曲線への巡回群作用の分類を用いる（［A］参照）

少し用語を用意しておく。

Z を半安定曲線として，$Z=\sum_i \Theta_i$（Θ_i：既約成分）と表わす。
簡単のため，各既約成分 Θ_i はスムースと仮定する。
さて，各既約成分 Θ_i に対し，自然数 m_i が与えられて，

$$\frac{\sum_j m_j}{m_i} \in \mathbb{Z}$$
（ここで，j は，Θ_i と交わる既約成分全体を走るとする）

を満たすとき，Z と $\{m_i\}$ の組 Y を重み付き半安定曲線といい，$Y=\sum_i (m_i, \Theta_i)$ と表わす。

次に，スムースな複素曲面 M から開円板 Δ への proper な全射正則写像 $\pi: M \to \Delta$ が，

(1) $X := \pi^{-1}(0)$ は，（連結な）特異ファイバー

(2) $\pi^{-1}(s)$ $(s \neq 0)$ は，n 個の disjoint な スムースな genus g の曲線

を満たす時，$\pi: M \to \Delta$ を (n, g) 型の <u>弱い退化</u> という。
もちろん，$n=1$ のときは，$\pi: M \to \Delta$ は普通の意味の退化である。

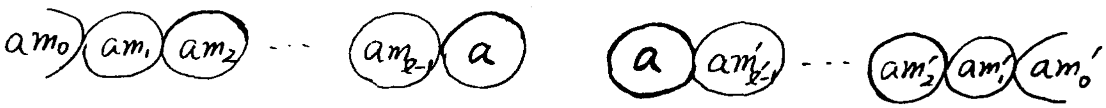
さて，弱い退化の特異ファイバー $X=\sum m_i\Theta_i$ が simple normal crossing と仮定する。
このとき，X から重み付き半安定曲線 $Y=\sum(m_i,\Theta_i)$ が求まるが，Y のことを X の underlying な重み付き半安定曲線と呼ぶ。

次に，$f: C\to C$ を曲線 C の位数 m の自己同型とする。このとき，μ を 1 の原始 m 乗根とすると，自己同型 $F: C\times\Delta\to C\times\Delta$ が，$(z,s)\mapsto(f(z),\mu s)$ により定義される。

F による作用の商空間 $C\times\Delta/\langle F\rangle$ の巡回商特異点を minimal resolution したものを M と書くと，退化 $\pi: M\to\Delta$ が得られる。M は，genus $C\geqq 1$ のとき normally minimal であるが，$C=\mathbb{P}^1$ のばあいは，そうではないことに注意しておく。
また，$\pi: M\to\Delta$ の位相モノドロミーは f であり，特異ファイバーは star shaped で core の multiplicity は，f の位数 m に一致する。
退化 $\pi: M\to\Delta$ の特異ファイバーの underlying な重み付き半安定曲線を $Y=\sum(m_i,\Theta_i)$ とする。

任意の自然数 n に対し, $nY := \Sigma(n m_i, \Theta_i)$ も重み付き半安定曲線であるが, nY のことを block という。

次に, 複数の block から, 連結な重み付き半安定曲線 (= building) を作る操作を導入する。
まず, 2つの block B, B' が, それぞれ次のような tail T, T' 持つと仮定する:



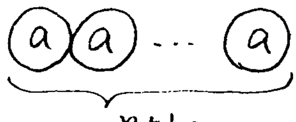
T $\qquad\qquad\qquad\qquad$ T'

$$T = \sum_{i=0}^{\ell} a m_i \Theta_i \quad (m_\ell = 1), \qquad T' = \sum_{j=0}^{\ell'} a m'_j \Theta'_j \quad (m_{\ell'} = 1)$$

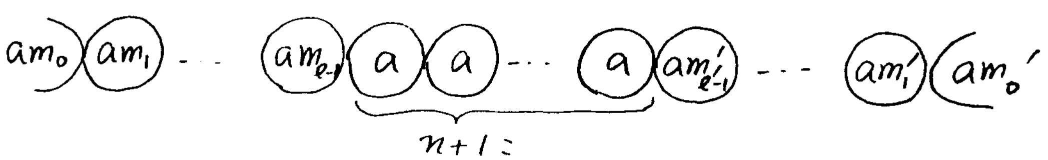
と表わすことにする。また, $a \geq 2$ のとき, T, T' を multiple tail という。

さて, T と T' を"つなげる"2種類の操作（接続, 溶接）を定義しよう。

n-接続　$n \geq 0$ なる整数に対して, T と T' を重さが a の $n+1$ こ の $\mathbb{P}^1$ の chain



でつなぐのである。図で書くと,



T と T' の n-接続.

<u>溶接</u> TとT'の重さが次の条件を満たしていると仮定する：

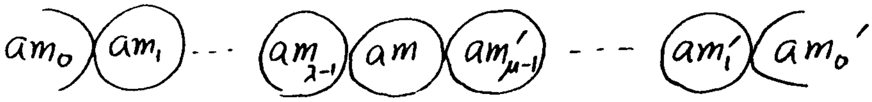
整数λ, μ $(0 \leq \lambda \leq \ell-1,\ 0 \leq \mu \leq \ell'-1)$ が存在して，

$$\begin{cases} m_\lambda = m_\mu \ (:= m \text{とおく}) \\ m_{\lambda+1} + m_{\mu+1} = m \end{cases}$$

が成り立つ。

このとき，TからΘ_λより先の部分を切り落として，T'からΘ'_μより先の部分を切り落として，Θ_λとΘ_μを同一視したものがTとT'の溶接である。

図で書くと，

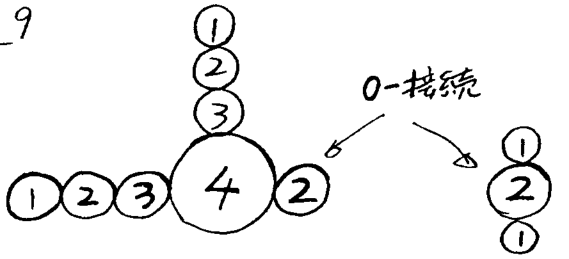


TとT'の溶接

<u>Remark</u> 溶接は，松本-Montesinos理論で blow down と contraction を繰り返す操作に対応している。

さて，2つのblock B, B'からTとT'を接続または溶接して重み付きの（連結な）半安定曲線が得られる。

例9

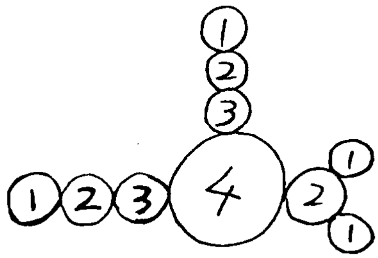


III^*

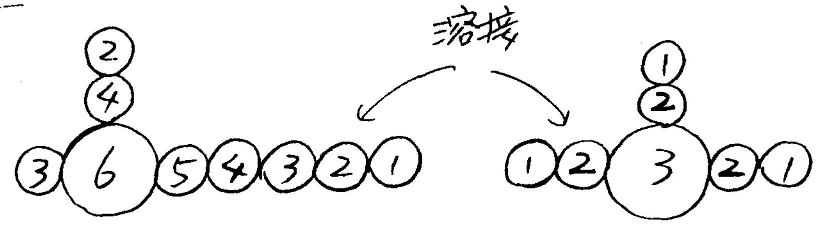
種数0の特異ファイバー

(位相モノドロミーは, $\mathbb{P}^1$の二点を固定する $\mathbb{Z}_2$-action)

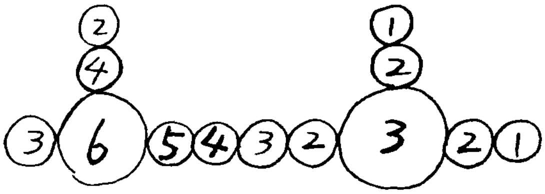
$\Longrightarrow$



例10



$\Longrightarrow$



一般に，重み付き半安定曲線 Y が，いくつかの blocks から接続と溶接を繰り返して得られたとき，Y を building という。

さて，building $Y = \sum (m_i, \Theta_i)$ が与えられたとき，Y の各既約成分 Θ_i に対し，次の条件を満たす Θ_i 上の line bundle N_i が存在することが示せる：

$$(\ast) \qquad N_i^{\otimes m_i} \cong \mathcal{O}\Big(-\sum_j m_j P_j\Big)$$

ここで，P_j は Θ_i と重みが m_j の既約成分との交点。

このとき，N_i のことを smoothing bundle という。

さて，smoothing bundle の組 $N = \{N_i\}_i$ に対し，Y を underlying な重み付き半安定曲線に持つような特異ファイバー $X = \sum m_i \Theta_i$ を持つ弱い退化 $\pi : M \to \Delta$ が構成できる（[T1] 参照）。

このとき，N_i は Θ_i の M の中での normal bundle に一致する。

上のようにして Y から作られる弱い退化は一意的でないことに注意しておく。すなわち，一般には，位相型の異なる複数個の弱い退化ができる場合がある。

このことは次のようにして分かる。まず第一に、genus $\Theta_i \geq 1$ のとき、smoothing bundle N_i は一意的ではない。実際、L_i を Θ_i 上の line bundle で、$L_i^{\otimes m_i} \cong \mathcal{O}$ となるものとすると、$N_i \otimes L_i$ も条件(*)を満たす。第二に、smoothing bundle の一組 $N = \{N_i\}_i$ から作られる弱い退化は一意的ではない。Y を構成する際に、blocks の multiple tails を接続または溶接した場合、multiple twist という操作の分だけ ambiguity がある（[T1]）。

上記のように作られた Y を underlying な重み付き半安定曲線に持つような特異ファイバーを持つ弱い退化が、実際に退化になっているかどうかは $\{N_i\}$ と multiple twist の情報より分かる。

逆に任意の normally minimal な退化の位相同型類の代表元として上記の構成でできる退化がとれる。（実際、building Y の複素構造を忘れたものが、松本-Montesinos 理論の"一般商空間"であることに注意）。

最後に特異ファイバーの分類問題に話しを戻そう。

§3で述べた特異ファイバーの形状による分裂可能性の判定法（方法1）を考慮すると，我々が，分裂するかどうかをチェックしなければならない退化は，その特異ファイバーの underlying な重み付き半安定曲線である building が，blocks から溶接または multiple tails の 0-接続のみによって得られた場合である。

この場合を，§3で述べた方法2，3でチェックしていくのである。

以上が特異ファイバーの決定のプロセスの概略である。

参考文献

[A] 足利 正, "代数曲線の退化の性質"
報告集 (Hodge 理論・Log 幾何学・退化, 1998年) p104 - 136

[AA] T. Arakawa - T. Ashikaga, "Local splitting families of degenerate hyperelliptic curves I" MPI-preprint (1998)

[H] J. Harvey, "Cyclic groups of automorphisms of compact Riemann surfaces" Quat. J. Math. 17 (1966) p86-97

[Ho] E. Horikawa, "Local deformation of pencil of curves of genus two" Proc. Japan Acad. 64 (1988) p241-244

[MM] Y. Matsumoto - J.M. Montesinos, "Pseudo-periodic maps and degeneration of Riemann surfaces I, II"
Preprint (1991 / 1992)

[M] B. Moishezon, Springer L.N. in Math. 603 (1977)

[R] M. Reid, "Problems on pencil of small genus"
Preprint (1990)

[T1] S. Takamura, "Splitting families of degenerations of complex curves" in preporation

[T2] —, "Atomic multiple fibers" Preprint (1999)

[T3] —, "Cyclic quotient construction of degenerations of complex manifolds" Preprint (1999)