代数幾何学シンポジウム記録
1999年度　pp.1-7

ABUNDANCE THEOREM FOR SEMI LOG CANONICAL THREEFOLDS
3次元半ログ標準多様体のアバンダンス定理

藤野 修 *

アバンダンス定理（予想）について述べる．詳しくは [Fj1] を見よ．以下すべて複素数体上の代数多様体を考える．先生方の敬称は略す．

先ず主定理を述べる．

定理 1. (X,Δ) を完備な *3* 次元半ログ標準多様体 (*semi log canonical* 3-*fold*) とし，$K_X+\Delta$ をネフと仮定する．この時 $K_X+\Delta$ は半豊富である．すなわち，ある正の整数 m が存在し，$|m(K_X+\Delta)|$ が固定点自由になる．

これは次に述べるアバンダンス予想の 3 次元 semi log canonical pair 版である．

予想 2 (アバンダンス予想). (X,Δ) を完備な代数多様体 X と X 上の $\mathbb{Q}$-因子の組とし，$K_X+\Delta$ をネフと仮定する．この時 $K_X+\Delta$ は半豊富か？

このアバンダンス予想は高次元の代数多様体論ではきわめて重要な予想である．極小モデルの存在予想（フリップ予想）とならぶ分類理論の大予想である．[かわ] の 6.3 章を読めばその大切さが分ってもらえると思う．

現在までに得られている結果を少し詳しく述べてみたい．1 次元のアバンダンス予想は明らかなので 2 次元以上が問題である．

1. $(X,0)$ が非特異曲面とする．この時アバンダンス予想はまさしく極小な曲面の多重標準線形系が固定点自由ということで，これはイタリア学派によって古くから知られていた．
2. (X,Δ) が log canonical 曲面の時は藤田隆夫によって証明された．
3. (X,Δ) が semi log canonical 曲面の時は沢山の人の貢献で証明された． 本質的な部分は川又雄二郎が以下に述べる 3 次元 terminal 多様体に対するアバンダンス予想の証明の途中で解いている．その後，[Utah] 内で詳しく調べられた．この場合が 2 次元の最強の結果である．
4. $(X,0)$ が 3 次元 terminal 多様体の時，宮岡洋一と川又によって証明された．3 次元 terminal で K_X がネフという状態はまさに極小モデルである．

* Research Fellow of the Japan Society for the Promotion of Science.

5. (X, Δ) が 3 次元 log canonical 多様体の場合は, S.Keel, 松木謙二, J.McKernan によって証明された. この証明の途中でも 2 次元 semi log canonical のアバンダンスが使われている.
6. (X, Δ) が 3 次元 semi log canonical の場合は今回のお話で, 勿論 3 次元ではアバンダンス予想の最終版であろう.

以上の話から分って頂けたと思うが, n 次元の semi log canonical のアバンダンスは元々 (n+1) 次元のアバンダンス予想の解決のために必要だったのである. したがって, 定理 1 も 4 次元アバンダンス予想の解決に役立つはずである. (定理 12 も見よ.)

以下詳しく述べていくが, $(X, 0)$ が terminal n-fold というのが極小モデル, (X, Δ) が log canonical n-fold が対数的極小モデルのカテゴリーで, (X, Δ) が semi log canonical n-fold と言うのは対数的極小モデルの可約版といったイメージである.

記号. X は純次元の被約な複素数体上の代数的スキームとし, セールの S_2 condition を満たし, 余次元 1 で正規交差とする.

Δ は X 上の有効 $\mathbb{Q}$-Weil 因子で $K_X+\Delta$ が $\mathbb{Q}$-Cartier なるものとする. つまりある正の整数 m が存在し, $m(K_X+\Delta)$ が Cartier である.

$X = \cup X_i$ を既約分解とし,

$$\mu : X' := \amalg X_i' \to X = \cup X_i$$

を正規化とする.

$$K_{X'} + \Theta := \mu^*(K_X + \Delta), \quad \Theta_i := \Theta|_{X_i'}$$

で Θ と Θ_i を定義する.

この時, $\Theta =$(導手) ＋ (Δ の引き戻し) である.

定義 3. (X, Δ) を上記のような組とし, さらに X を正規, $\Delta = \sum d_i \Delta_i$ ($0 \le d_i \le 1$ for every i) と仮定する.

$f : Y \to X$ を (X, Δ) のあるログ特異点解消 (例外集合が単純正規交差因子で, Δ の固有変換と例外集合の和も単純正規交差因子になる特異点解消) とする.

$$K_Y + f^*(K_X + \Delta) + \sum a_i E_i$$

(ここで, a_i は有理数で E_i は Y 上の素因子) とかく時, (X, Δ) は

$$\begin{cases} \text{lc pair} \\ \text{dlt pair} \end{cases} \quad \text{if} \quad \begin{cases} a_i \ge -1 \text{ for every } i, \\ a_i > -1 \text{ if } E_j \text{ is } \varphi\text{-exceptional.} \end{cases}$$

と定義する. lc pair は特異点解消の取り方によらないが, dlt は特異点解消の取り方による概念である. dlt pair の典型的な例は X が非特異多様体で, Δ が X 上の被約な単純正規交差因子の場合である. ちなみに, lc は log canonical, dlt は divisorial log terminal の略である.

やっと semi log canonical の定義である.

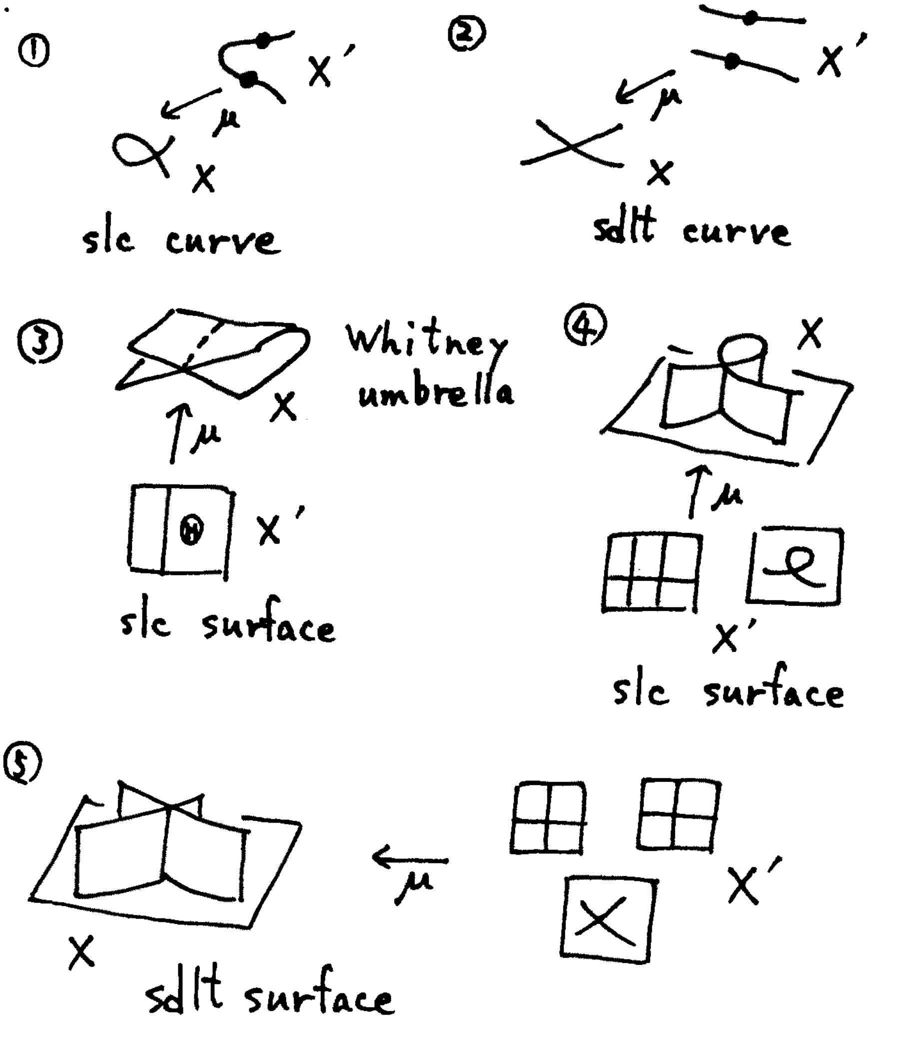
定義 4. (X,Δ) を記号のような組とし,

$$\begin{cases}(X,\Delta) \text{ is slc} \\ (X,\Delta) \text{ is sdlt}\end{cases} \quad \text{if} \quad \begin{cases}(X',\Theta) \text{ is lc,} \\ (X',\Theta) \text{ is dlt and } X_i \text{ is normal for every } i.\end{cases}$$

と定義する．勿論, slc は semi log canonical, sdlt は semi divisorial log terminal の略である．sdlt を定義する以前に gdlt, dslt 等, dlt の一般化のようなものがいろいろ定義されていたようだが, sdlt が一番扱い易いと思う．

はっきり言って定義を見ただけでは slc や sdlt は分かりにくいと思うので, 以下の図で分ったつもりになって頂きたい．

図 5.



以上のようなイメージである．

注意 6. 元々 slc 曲面という概念は J. Kollár と N. Shepherd-Barron が曲面のモジュライのコンパクト化のために導入した. モジュライの境界にくっつける安定曲面を定義するために slc が必要であった. 因にこの方面は何人かの人が色々と研究しているようである.

注意 7. (X,Δ) が sdlt n-fold なら, 定義より (X',Θ) は dlt n-fold である. さらに $(\llcorner\Theta\lrcorner, \mathrm{Diff}(\Theta-\llcorner\Theta\lrcorner))$ は sdlt $(n-1)$-fold になる. ここで $\llcorner\Theta\lrcorner$ は Θ の被約部分で $\mathrm{Diff}(\Theta-\llcorner\Theta\lrcorner)$ は

$$(K_{X'}+\Theta)|_{\llcorner\Theta\lrcorner} = K_{\llcorner\Theta\lrcorner} + \mathrm{Diff}(\Theta-\llcorner\Theta\lrcorner)$$

で定義する.

注意して頂きたいのは (X,Δ) が lc なら定義より (X',Θ) は lc だが, $(\llcorner\Theta\lrcorner, \mathrm{Diff}(\Theta-\llcorner\Theta\lrcorner))$ は必ずしも slc にはならない. [Utah] の [16.9 Proposition (16.9.1)] は誤りである. $\llcorner\Theta\lrcorner$ が S_2 かどうかが問題になるのである. 同じ本の [Utah] の [17.5.2 Example] を見よ. したがって sdlt の方が次元による帰納法等が使いやすいのは明らかであろう. こういう理由で sdlt という概念を新たに定義したのである.

以下, 主定理のアイデアを述べる. 今後 (X,Δ) は sdlt n-fold とする. 実際 slc の場合も多様体を取り替えたりして, sdlt や dlt のみを扱えば十分であることもわかる.

- Step1 先ず, X' 上の因子 $\llcorner\Theta\lrcorner$ を詳しく調べる. これは Shokurov の曲面の時の結果の一般化で, $\llcorner\Theta\lrcorner$ が X' の中である種の連結性を持っていることが分かる. 証明は対数的極小モデル理論を駆使する. [Fj1] の 2 章を見よ.
- Step2 線形系 $|m(K_{\llcorner\Theta\lrcorner}+\mathrm{Diff}(\Theta-\llcorner\Theta\lrcorner))|$ 内に沢山の" 良い" 切断を作る. 論文内では admissible section と呼んでいる切断である. 注意 7で述べたように, $(\llcorner\Theta\lrcorner, \mathrm{Diff}(\Theta-\llcorner\Theta\lrcorner))$ は sdlt $(n-1)$-fold なので, $n-1$ 次元の sdlt に対するアバンダンスを使うことが可能である.
- Step3 Step2 で得た" 良い" 切断を $|m(K_{X'}+\Theta)|$ の切断に延長する. これが最も本質的な部分である. Step 1 で $\llcorner\Theta\lrcorner$ がある種の連結性を持つことが分かっているので証明できる. [Utah] で 2 次元の slc のアバンダンスの証明の際には沢山の場合分けを行って複雑な証明をしているが, 我々の方法はすっきりと一挙に証明する. [Fj1] の 4 章, 特に Proposition (4.5) が本質的部分である.
- Step4 Step3 の切断を張り合わせて $|m(K_X+\Delta)|$ の切断を作る. これで $|m(K_X+\Delta)|$ が固定点自由は示せた. この張り合わせは" 良い" 切断の定義より簡単に出来る.
- Step5 Step4 で得た切断を修正して" 良い" 切断 $\in |m(K_X+\Delta)|$ としておく.
- Step6 Step 2 に進む.

注意 8. Step 1 から 4 は対数的極小モデル理論と lc 多様体に対するアバンダンスが n 次元で成り立てば n 次元で成立する．したがって，既約な場合が十分分かれば可約な場合はほぼ自動的に証明される．

“良い” 切断を説明するために次の定義をする．

定義 9. (X_i, Δ_i) を lc n-fold $(i = 1, 2)$ とする．$f : (X_1, \Delta_1) \dashrightarrow (X_2, \Delta_2)$ が B-birational map (resp. morphism) とは，$f : X_1 \dashrightarrow X_2$ が proper birational map (resp. morphism) で，$f : X_1 \dashrightarrow X_2$ の共通特異点解消 $\alpha : Y \to X_1$, $\beta : Y \to X_2$ で $\alpha^*(K_{X_1} + \Delta_1) = \beta^*(K_{X_2} + \Delta_2)$ を満たすものが存在することとする．B-birational 自己同型群を，

$$\mathrm{Bir}(X, \Delta) := \{\sigma : (X, \Delta) \dashrightarrow (X, \Delta) \mid \sigma \text{ is a B-birational map}\}$$

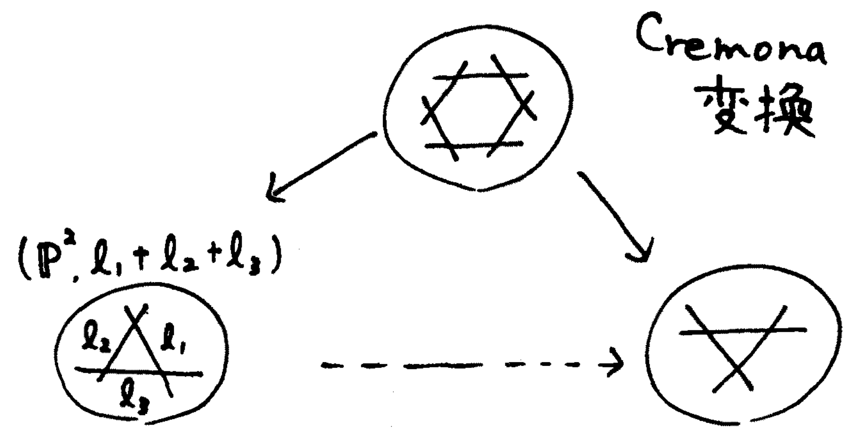
と定義する．m を正の整数で，$m(K_X + \Delta)$ が Cartier 因子とする．この時，B-pluricanonical representation

$$\rho_m : \mathrm{Bir}(X, \Delta) \to \mathrm{GL} H^0(X, m(K_X + \Delta))$$

の存在は B-birational の定義より明らかであろう．

B-birational map という概念も以下の図を見て理解したつもりになって頂きたい．

例 10.



定理 11. (X, Δ) を *lc n-fold* $(n = 1, 2)$ とする．$K_X + \Delta$ がネフの時，ある正の整数 m_0 が存在し，

$$|\rho_{m_1 m_0}(\mathrm{Bir}(X, \Delta))| < \infty$$

が任意の非負整数 m_1 について成立する． 定理 11の証明は [Fj1] の *3* 章を見よ．*1* 次元の時は簡単にチェックできる．

大雑把に言うと，” 良い” 切断とは Bir-invariant な切断である．上の定理 11で有限性がでるので簡単に Bir-invariant にすることが出来るのである．

定理 11 は X が非特異代数多様体で, B-birational でなくて普通の双有理 (birational) 自己同型群に対しては既に得られていた ([U, §14] を見よ). 基本的にその結果に帰着させるのだが, それなりの小細工が必要である.

もし定理 11が n 次元で証明出来れば Step 5 も n 次元で成立する. 残念ながら 3 次元以上では今現在は解けていない.

以上が定理の証明の大雑把な説明である. 以下では応用を少し述べてみたい.

[Fj3, Appendix] で次の定理を得た.

定理 12. *(X,Δ) を 4 次元完備 dlt 多様体とし, $K_X+\Delta$ をネフかつ巨大 (big) と仮定する. ($K_X+\Delta$ がネフなので, $(K_X+\Delta)^4>0$ ということである.) この時 $K_X+\Delta$ は半豊富である.*

これは定理 1 と [Fj3] の主定理の証明方法を組み合わせればすぐに従う結果である. これで一応, 定理 1が 4 次元アバンダンスに対して有用であることがわかった. ただし, $K_X+\Delta$ が巨大であると言う仮定は非常に強い仮定である. したがって残念ながら, 4 次元アバンダンス予想の完全解決には程遠い結果である.

次の結果は log canonical singularities の指数についての結果である. 今回の話を使えばすぐに示せるという話ではない.

定理 13. *$(P\in X,\Delta)$ を 3次元 lc pair の芽とし, Δ は standard coefficients で, 点 P は (X,Δ) の center of log canonical singularities とする. この時, (X,Δ) の点 P での指数 (index) $\mathrm{I}(P\in X,\Delta)$ は $I'_2:=\{r\in\mathbb{N}\mid\varphi(r)\le 20, r\ne 60\}$ に入る. ここで, φ は Euler 関数である.*

この定理は石井志保子によって特異点が孤立していて $\Delta=0$ の時に既に解かれていたのだが, B-birational map の理論と Step 1 で活躍した Connectedness lemma の応用として一般化に成功した. 詳しく知るには [Fj2] もしくは [ふ] を見よ. 結局のところ, 2 次元の sdlt のアバンダンス定理の特殊な場合を effective な評価付きで証明できるのがミソである.

References

[Fj1] O. Fujino, Abundance theorem for semi log canonical threefolds, to appear in Duke Mathematical Journal.

[Fj2] O. Fujino, The indices of log canonical singularities, RIMS-**1250**, preprint 1999.

[Fj3] O. Fujino, Base point free theorem of Reid-Fukuda type, to appear in Journal of Mathematical Sciences, The University of Tokyo.

[ふ] 藤野 修, The indices of log canonical singularities, 1999 年の鹿児島でのシンポジウムの報告集.

[かわ] 川又 雄二郎, 代数多様体論, 共立出版, 1997.

[KMM] Y. Kawamata, K. Matsuda, and K. Matsuki, Introduction to the Minimal Model Problem, in *Algebraic Geometry, Sendai 1985,* Advanced Studies in Pure Math. **10**, (1987) Kinokuniya and North-Holland, 283–360.

[K も] J. Kollár, 森重文, 双有理幾何学, 岩波書店, 1998.

[U] K. Ueno, *Classification Theory of Algebraic Varieties and Compact Complex Spaces,* Springer Lecture Notes Vol. **439**, 1975.

[Utah] J. Kollár, et al, *Flips and Abundance for Algebraic Threefolds,* Astérisque **211**, Soc. Math. de. France, 1992.

京都大学数理解析研究所

E-mail address: `fujino@kurims.kyoto-u.ac.jp`