代数幾何学シンポジウム記録
2000年度 pp.144-167

Kummer-Artin-Schreier-Witt 理論と Cartier 理論

諏訪紀幸 中央大学理工学部

本稿では Kummer 理論と Artin-Schreier-Witt 理論を統合する理論に関する関口力氏との共同研究の概略を解説する．講演では主に第４節，第５節の内容について説明したが，第１節で古典的な Kummer 理論，Artin-Schreier-Witt 理論について，第２節で Kummer-Artin-Schreier 理論あるいは Furtwängler 理論について，第３節では Kummer-Artin-Schreier-Witt 理論について説明を付け加えた．詳細は第３節については [18] を，第４節については [17] を，第５節については [19] を参照されたい．

記号.

X を scheme とする．X_{et} によって X のétale site を表わす．cohomology はすべてétale cohomology を意味する．

M を可換群あるいは可換群の層，φ を M の自己準同型とする．$\mathrm{Ker}[\varphi : M \to M]$ を ${}_{\varphi}M$ で，$\mathrm{Coker}[\varphi : M \to M]$ を M/φ で表わす．

1. Kummer 理論と Artin-Schreier-Witt 理論

1.1.(Kummer 理論) $\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[U, \dfrac{1}{U}]$ を multiplicative group scheme とする．乗法は $U \mapsto U \otimes U$ で与えられる．

$\boldsymbol{\mu}_n = \mathrm{Ker}[n : \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m]$ と記す．X を $\mathbb{Z}[\dfrac{1}{n}]$-scheme とする．このとき，group scheme の完全列

$$0 \to \boldsymbol{\mu}_n \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m \to 0$$

は X_{et} の上の可換群の層の列としても完全．さらに，$\zeta = e^{2\pi i/n}$ とすれば，$\boldsymbol{\mu}_n$ は $Z[\dfrac{1}{n}, \zeta]$ の上で $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に同型．したがって，X が $\mathbb{Z}[\dfrac{1}{n}, \zeta]$-scheme であるとき，完全列

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^0(X, \mathbb{G}_m) &\xrightarrow{n} H^0(X, \mathbb{G}_m) \\ \to H^1(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathbb{G}_m) &\xrightarrow{n} H^1(X, \mathbb{G}_m) \end{aligned}$$

を得る．さらに，$H^1(X, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Pic}(X)$ (Hilbert 90) に注意して完全列

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{O})^{\times}/n \to H^1(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to {}_n\mathrm{Pic}(X) \to 0$$

を得る．

今，$X = \mathrm{Spec}\,K$ (K は体) あるいは $X = \mathrm{Spec}\,A$ (A は局所環) であれば，$\mathrm{Pic}(X) = 0$ なので，同型

$$K^{\times}/n \xrightarrow{\sim} H^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

あるいは

$$A^\times/n \xrightarrow{\sim} H^1(A, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

を得る．$X = \operatorname{Spec} K$ の場合に言い換えれば，体 K の上で n が可逆で K が 1 の n 乗根をすべて含むとき，K の n 次巡回拡大は K の元の n 乗根を添加することによって得られることが従う．

一方，X が separably closed field あるいは strictly Henselian local ring の上の proper scheme であるとき，$\Gamma(X, \mathcal{O})^\times/n = 0$ なので，同型

$$H^1(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} {}_n\mathrm{Pic}(X)$$

を得る．

1.2. (Artin-Schreier 理論) $\mathbb{G}_a = \operatorname{Spec} Z[T]$ を additive group scheme とする．加法は $T \mapsto T \otimes 1 + 1 \otimes T$ で与えられる．

$F : \mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p} \to \mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p}$ を Frobenius 写像とすれば，$\operatorname{Ker}[F - 1 : \mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p} \to \mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p}]$．さらに，$X$ を $\mathbb{F}_p$-scheme とすれば，group scheme の完全列

$$0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p} \xrightarrow{F-1} \mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p} \to 0$$

は X_{et} の上の可換群の層の列としても完全．したがって，完全列

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^0(X, \mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p}) \xrightarrow{F-1} H^0(X, \mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p}) \\ &\to H^1(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p}) \xrightarrow{F-1} H^1(X, \mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p}) \end{aligned}$$

を得る．ここで，$H^1(X, \mathbb{G}_a) = H^1(X, \mathcal{O})$ なので，完全列

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{O})/(F-1) \to H^1(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to {}_{F-1}H^1(X, \mathcal{O}) \to 0$$

を得る．

今，$X = \operatorname{Spec} K$ (K は体) あるいは $X = \operatorname{Spec} A$ (A は環) とすれば，$H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ なので，同型

$$K/(F-1) \xrightarrow{\sim} H^1(K, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

あるいは

$$A/(F-1) \xrightarrow{\sim} H^1(A, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

を得る．特に，$X = \operatorname{Spec} K$ の場合に言い換えれば，標数 $p > 0$ の体 K の p 次巡回拡大は Artin-Schreier 方程式 $t^p - t = a$ の根を添加することによって得られることが従う．

一方，X が separably closed field あるいは strictly Henselian local ring の上の proper scheme であるとき，$\Gamma(X, \mathcal{O})/(F-1) = 0$ なので，同型

$$H^1(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} {}_{F-1}H^1(X, \mathcal{O})$$

を得る.

1.3. (Witt 理論) 各 $r \geq 0$ に対して $\Phi_r(\boldsymbol{T}) = \Phi_r(T_0, T_1, \ldots, T_r)$ (Witt 多項式) を

$$\Phi_r(\boldsymbol{T}) = T_0^{p^r} + pT_1^{p^{r-1}} + \cdots + p^r T_r \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{T}] = \mathbb{Z}[T_0, T_1, \ldots, T_r]$$

によって定義する. $\mathbb{Z}[X_0, X_1, \ldots, X_r, Y_0, Y_1, \ldots, Y_r]$ の多項式

$$S_r(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = S_r(X_0, \ldots, X_r, Y_0, \ldots, Y_r),$$
$$P_r(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = P_r(X_0, \ldots, X_r, Y_0, \ldots, Y_r)$$

をそれぞれ

$$\Phi_r(S_0(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), S_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \ldots, S_r(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})) = \Phi_r(\boldsymbol{X}) + \Phi_r(\boldsymbol{Y})$$

あるいは

$$\Phi_r(P_0(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), P_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \ldots, P_r(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})) = \Phi_r(\boldsymbol{X})\Phi_r(\boldsymbol{Y})$$

によって帰納的に定義する. このとき,

$$S_r(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}),\ P_r(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \in \mathbb{Z}[X_0, X_1, \ldots, X_r, Y_0, Y_1, \ldots, Y_r]$$

さらに,

$$W_n = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}]$$

の加法を

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{T} = (T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}) \mapsto \\ &\qquad S(\boldsymbol{T} \otimes 1, 1 \otimes \boldsymbol{T}) = (S_0(\boldsymbol{T} \otimes 1, 1 \otimes \boldsymbol{T}), S_1(\boldsymbol{T} \otimes 1, 1 \otimes \boldsymbol{T}), \ldots, S_{n-1}(\boldsymbol{T} \otimes 1, 1 \otimes \boldsymbol{T}))\end{aligned}$$

で, 乗法を

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{T} = (T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}) \mapsto \\ &\qquad P(\boldsymbol{T} \otimes 1, 1 \otimes \boldsymbol{T}) = (P_0(\boldsymbol{T} \otimes 1, 1 \otimes \boldsymbol{T}), P_1(\boldsymbol{T} \otimes 1, 1 \otimes \boldsymbol{T}), \ldots, P_{n-1}(\boldsymbol{T} \otimes 1, 1 \otimes \boldsymbol{T})).\end{aligned}$$

で定義すれば, W_n は ring scheme となる. 特に, $W_1 = \mathbb{G}_a$. A を可換環とすれば, $W_n(A)$ は A に成分をもつ長さ n の Witt vector の環に他ならない.

環の埋め込み $\mathbb{Z}[T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}] \to \mathbb{Z}[T_0, T_1, \ldots, T_n]$ は環の準同型 $R : W_{n+1,Z} \to W_{n,\mathbb{Z}}$ (restriction) を定義する. 一方, $V : W_n \to W_{n+1}$ (Verschiebung) を

$$T_0 \mapsto 0,\ T_1 \mapsto T_0,\ T_2 \mapsto T_1, \ldots, T_n \mapsto T_{n-1} : \mathbb{Z}[T_0, T_1, \ldots, T_n] \to \mathbb{Z}[T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}]$$

によって定義すれば, V は加法群の準同型. さらに, 各 $n, m > 0$ に対して group scheme の拡大

$$0 \to W_m \xrightarrow{V^n} W_{m+n} \xrightarrow{R^m} W_n \to 0$$

を得る．

次に，多項式

$$F_r(\boldsymbol{T}) = F_r(T_0, \dots, T_r, T_{r+1}) \in \mathbb{Q}[T_0, \dots, T_r, T_{r+1}]$$

を

$$\Phi_r(F_0(\boldsymbol{T}), \dots, F_r(\boldsymbol{T})) = \Phi_{r+1}(T_0, \dots, T_r, T_{r+1}) \ (r \geq 0)$$

によって帰納的に定義する．このとき，各 $r \geq 0$ に対して

$$F_r(\boldsymbol{T}) = F_r(T_0, \dots, T_r, T_{r+1}) \in \mathbb{Z}[T_0, \dots, T_r, T_{r+1}].$$

$F : W_{n+1} \to W_n$ を

$$T_0 \mapsto F_0(\boldsymbol{T}),\ T_1 \mapsto F_1(\boldsymbol{T}), \dots,\ T_{n-1} \mapsto F_{n-1}(\boldsymbol{T}) : \mathbb{Z}[T_0, T_1, \dots, T_{n-1}] \to \mathbb{Z}[T_0, T_1, \dots, T_n]$$

によって定義すれば，F は環の準同型．さらに，各 $r \geq 0$ に対して

$$F_r(\boldsymbol{T}) \equiv T_r^p \mod p$$

が成立する．したがって，$F : W_{n+1,\mathbb{F}_p} \to W_{n,\mathbb{F}_p}$ は Frobenius 写像 $F : W_{n,\mathbb{F}_p} \to W_{n,\mathbb{F}_p}$ によって分解される．さらに，$\mathrm{Ker}[F - 1 : W_{n,\mathbb{F}_p} \to W_{n,\mathbb{F}_p}] = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ で，各 $n, m > 0$ に対して完全列の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^{m+n}\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & W_m & \xrightarrow{V^n} & W_{m+n} & \xrightarrow{R^m} & W_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle F-1}\downarrow & & {\scriptstyle F-1}\downarrow & & {\scriptstyle F-1}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & W_m & \xrightarrow{V^n} & W_{m+n} & \xrightarrow{R^m} & W_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

を得る．

さて，X を $\mathbb{F}_p$-scheme とすれば，group scheme の完全列

$$0 \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to W_n \xrightarrow{F-1} W_n \to 0$$

は X_{et} の上の可換群の層の列としても関して完全．したがって，完全列

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(X, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to H^0(X, W_n) &\overset{F-1}{\to} H^0(X, W_n) \\ \to H^1(X, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to H^1(X, W_n) &\overset{F-1}{\to} H^1(X, W_n) \end{aligned}$$

を得る．ここで，$H^1(X, W_n) = H^1(X, W_n\mathcal{O})$ なので，完全列

$$0 \to \Gamma(X, W_n\mathcal{O})/(F-1) \to H^1(X, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to {}_{F-1}H^1(X, W_n\mathcal{O}) \to 0$$

を得る．

今，$X = \operatorname{Spec} K$ (K は体) あるいは $X = \operatorname{Spec} A$ (A は環) とすれば，$H^1(X, W_n\mathcal{O}) = 0$ なので，同型

$$W_n(K)/(F-1) \xrightarrow{\sim} H^1(K, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

あるいは

$$W_n(A)/(F-1) \xrightarrow{\sim} H^1(A, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

を得る．特に，$X = \operatorname{Spec} K$ の場合に言い換えれば，標数 $p > 0$ の体 K の p^n 次巡回拡大は $W_n(K)$ における方程式

$$(t_0^p, t_1^p, \ldots, t_{n-1}^p) - (t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}) = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$$

の根を添加することによって得られることが従う．

一方，X が separably closed field あるいは strictly Henselian local ring の上の proper scheme であるとき，$\Gamma(X, W_n\mathcal{O})/(F-1) = 0$ なので，同型

$$H^1(X, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} {}_{F-1}H^1(X, W_n\mathcal{O})$$

を得る．

補註 1.4. K を標数 $p > 0$ の体，X を proper k-scheme とする．このとき，$H^1(X, W_n\mathcal{O})$ は ${}_{F^n}\mathrm{Pic}_{X/K}$ の Dieudonné 加群に同型．

補註 1.5. ring scheme

$$W = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T_0, T_1, T_2, \ldots]$$

を

$$W = \varprojlim_R W_n$$

によって定義する．A を可換環とすれば，$W(A)$ を A に成分をもつ Witt vector の環に他ならない．環の準同型の族 $W_{n+1} \to W_n$ によって環の準同型 $F : W \to W$ が，また，加法群の準同型の族 $V : W_n \to W_{n+1}$ によって加法群の準同型 $V : W \to W$ が定義される．

F の定義を除けば Witt [23] の議論はそのまま scheme の理論の枠組みで展開できる．Witt [22] では p 群 Γ を Galois 群にもつ標数 $p > 0$ の体の Galois 拡大の構成を議論しているが，

虚心に読めば，$G(\mathbb{F}_p)=\Gamma$ となるような $\mathbb{F}_p$ の上の unipotent algebraic group G が構成でき，Kummer 理論あるいは Artin-Schreier 理論と同様に $\mathbb{F}_p$-scheme X の Γ を Galois 群にもつ不分岐被覆が $H^0(X,G)$，$H^1(X,G)$ によって記述できることが感得される．$\Gamma=\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の場合，$G=W_n$ であった．

2．Kummer-Artin-Schreier 理論あるいは Furtwängler 理論

2.1. A を環，$\lambda\in A$ とする．

$$\mathcal{G}^{(\lambda)}=\operatorname{Spec}A\Big[T,\frac{1}{1+\lambda T}\Big]$$

とする．

$$T\mapsto T\otimes 1+1\otimes T+\lambda T\otimes T$$

によって乗法を定義すれば，$\mathcal{G}^{(\lambda)}$ は commutative group scheme となる．さらに，group scheme の準同型 $\alpha^{(\lambda)}:\mathcal{G}^{(\lambda)}\to\mathbb{G}_{m,A}$ を

$$U\mapsto 1+\lambda T: A\Big[U,\frac{1}{U}\Big]\to A\Big[T,\frac{1}{1+\lambda T}\Big]$$

で定義する．λ が A において可逆なら，$\alpha^{(\lambda)}$ は同型．一方，λ が A で可逆でないとき，$A_0=A/(\lambda)$ とすれば，$\mathcal{G}^{(\lambda)}\otimes_A A_0$ は $\mathbb{G}_{a,A_0}$ に他ならない．

定理 2.2. A を環，$\lambda\in A$，$A_0=A/(\lambda)$ とし，X を A-scheme，$X_0=X\otimes_A A_0$ とする．λ が $\mathcal{O}_X$ の非零因子なら，X_{et} の上の可換群の層

$$0\to\mathcal{G}^{(\lambda)}\overset{\alpha^{(\lambda)}}{\to}\mathbb{G}_{m,X}\to i_*\mathbb{G}_{m,X_0}\to 0$$

は完全．ここで，$i:X_0\to X$ は自然な closed immersion.

系 2.3.(Hilbert 90) B を local A-algebra とする．このとき，$H^1(B,\mathcal{G}^{(\lambda)})=0$.

系 2.4. B を local A-algebra，X を proper B-scheme とする．λ が $\mathcal{O}_X$ の非零因子なら，

$$H^1(X,\mathcal{G}^{(\lambda)})=\operatorname{Ker}[\operatorname{Pic}(X)\to\operatorname{Pic}(X_0)]$$

2.5. $\zeta=e^{2\pi i/p}$，$\lambda=\zeta_1-1$ とおき，$A=\mathbb{Z}[\zeta]$，$K=\mathbb{Q}(\zeta)$ とする．このとき，

$$\frac{(1+\lambda T)^p-1}{\lambda^p}\in A[T]$$

で

$$\frac{(1+\lambda T)^p-1}{\lambda^p}\equiv T^p-T \mod \lambda$$

群の準同型 $\Psi:\mathcal{G}^{(\lambda)}\to\mathcal{G}^{(\lambda^p)}$ を

$$T\mapsto\frac{(1+\lambda T)^p-1}{\lambda^p}$$

によって定義する．$\mathrm{Ker}[\Psi : \mathcal{G}^{(\lambda)} \to \mathcal{G}^{(\lambda^p)}]$ は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ に同型．さらに，完全列の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathcal{G}^{(\lambda)} & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{G}^{(\lambda^p)} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{(\lambda)}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{(\lambda^p)}} & & \\
0 & \longrightarrow & \boldsymbol{\mu}_{p,A} & \longrightarrow & \mathbb{G}_{m,A} & \xrightarrow[p]{} & \mathbb{G}_{m,A} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

を得る．したがって，

$$[0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathcal{G}^{(\lambda)} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{G}^{(\lambda^p)} \to 0] \otimes_A K$$

は Kummer sequence

$$0 \to \boldsymbol{\mu}_{p,K} \to \mathbb{G}_{m,K} \xrightarrow{p} \mathbb{G}_{m,K} \to 0$$

に同型．また，$\mathbb{F}_p = A/(\lambda)$ で

$$[0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathcal{G}^{(\lambda)} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{G}^{(\lambda^p)} \to 0] \otimes_A \mathbb{F}_p$$

は Artin-Schreier sequece

$$0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p} \xrightarrow{F-1} \mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p} \to 0$$

に他ならない．

さらに，X を A-scheme とすれば，group scheme の完全列

$$(\#) \qquad 0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathcal{G}^{(\lambda)} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{G}^{(\lambda^p)} \to 0$$

は X_{et} の上の可換群の層の列としても完全．これから，完全列

$$\begin{aligned}
0 \to H^0(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^0(X, \mathcal{G}^{(\lambda)}) &\xrightarrow{\Psi} H^0(X, \mathcal{G}^{(\lambda^p)}) \\
\to H^1(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathcal{G}^{(\lambda)}) &\xrightarrow{\Psi} H^1(X, \mathcal{G}^{(\lambda^p)})
\end{aligned}$$

を得る．

今，$X = \operatorname{Spec} B$ を (B は local A-algebra) とすれば $H^1(X, \mathcal{G}^{(\lambda)}) = 0$ なので，同型

$$\mathrm{Coker}[\Psi : \mathcal{G}^{(\lambda)}(B) \to \mathcal{G}^{(\lambda^p)}(B)] \xrightarrow{\sim} H^1(B, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

を得る．言い換えれば，B の p 次不分岐巡回拡大は方程式 $\dfrac{(1+\lambda t)^p - 1}{\lambda^p} = a$ の根を添加することによって得られる．

一方，B が strictly Henselian local A-algebra で，X が B の上に proper であるとき，$\Psi : H^0(X, \mathcal{G}^{(\lambda)}) \to H^0(X, \mathcal{G}^{(\lambda^p)})$ は全射なので，同型

$$H^1(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}[\Psi : H^1(X, \mathcal{G}^{(\lambda)}) \to H^1(X, \mathcal{G}^{(\lambda^p)})]$$

を得る

補註 2.6. 完全列 (#) は Waterhouse[21] と [20] によって独立に発見された。方程式

$$\frac{(1+\lambda t)^p - 1}{\lambda^p} = a$$

は Furtwängler の仕事 [4][5] に遡る.

3. Kummer-Artin-Schreier-Witt 理論

定理 3.1. $\zeta_n = e^{2\pi i/p^n}$ とおく. $\mathbb{Z}_{(p)}[\zeta_n]$ の上の group scheme の exact sequence

$$(\#_n) \qquad 0 \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathcal{W}_n \xrightarrow{\Psi_n} \mathcal{V}_n \to 0$$

が存在して

(1) $(\#_n)$ の generic fiber は Kummer sequence

$$0 \to \boldsymbol{\mu}_{p^n} \to (\mathbb{G}_m)^n \xrightarrow{\Theta_n} (\mathbb{G}_m)^n \to 0,$$

に同型. ここで, Θ_n は

$$(T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}) \mapsto (T_0^p, T_0^{-1}T_1^p, \ldots, T_{n-2}^{-1}T_{n-1}^p) :$$
$$A[T_0, T_0^{-1}, T_1, T_1^{-1}, \ldots, T_{n-1}, T_{n-1}^{-1}] \to A[T_0, T_0^{-1}, T_1, T_1^{-1}, \ldots, T_{n-1}, T_{n-1}^{-1}];$$

によって定義される.

(2) $(\#_n)$ の special fiber は Artin-Schreier-Witt sequence

$$0 \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to W_n \xrightarrow{F-1} W_n \to 0.$$

に同型;

(3) (Hilbert 90) B を local A-algebra とすれば, $H^1(B, \mathcal{W}_n) = H^1(B, \mathcal{V}_n) = 0$.

補註 3.2. 完全列の図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \boldsymbol{\mu}_{p^n} & \longrightarrow & (\mathbb{G}_m)^n & \xrightarrow{\Theta_n} & (\mathbb{G}_m)^n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \Pi_n \downarrow & & \downarrow \Xi_n & & \\
0 & \longrightarrow & \boldsymbol{\mu}_{p^n} & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \xrightarrow{p^n} & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & 0\,.
\end{array}$$

は可換. ここで, Π_n は

$$T \mapsto T_{n-1} : A[T, T^{-1}] \to A[T_0, T_0^{-1}, T_1, T_1^{-1}, \ldots, T_{n-1}, T_{n-1}^{-1}]$$

によって, また, Ξ_n は

$$T \mapsto T_0 T_1^p \cdots T_{n-1}^{p^{n-1}} : A[T, T^{-1}] \to A[T_0, T_0^{-1}, T_1, T_1^{-1}, \ldots, T_{n-1}, T_{n-1}^{-1}]$$

によって定義される.

3.3. より具体的に定理を述べるため幾つか記号を導入する.

$F=\{F_r(\boldsymbol{T})\}_{0\le r\le n-1}$ を多項式

$$F_r(\boldsymbol{T})=F_r(T_0,\dots,T_{r-1})\in A[T_0,\dots,T_{r-1}]$$

の族とし,

$$\alpha_r^F(\boldsymbol{T})=\alpha_r^F(T_0,\dots,T_r)=\lambda T_r+F_r(T_0,\dots,T_{r-1})$$

とおく. また,

$$\beta_r^F(\boldsymbol{U})=\beta_r^F(U_0,\dots,U_r)\in K[U_0,\dots,U_r],$$

$$\Lambda_r^F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\Lambda_r^F(X_0,\dots,X_r,Y_0,\dots,Y_r)\in K[X_0,\dots,X_r,Y_0,\dots,Y_r]$$

をそれぞれ

$$\beta_0^F(U_0)=\frac{1}{\lambda}(U_0-1),$$

$$\beta_r^F(\boldsymbol{U})=\beta_r^F(U_0,\dots,U_r)=\frac{1}{\lambda}[U_r-F_r(\beta_0^F(\boldsymbol{U}),\dots,\beta_{r-1}^F(\boldsymbol{U}))]\ (r\ge 1)$$

あるいは

$$\Lambda_0^F(X_0,Y_0)=\lambda X_0Y_0+X_0+Y_0,$$

$$\begin{aligned}\Lambda_r^F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=&\lambda X_rY_r+F_r(\boldsymbol{X})Y_r+Y_rF_r(\boldsymbol{X})\\&+\frac{1}{\lambda}[F_r(\boldsymbol{X})F_r(\boldsymbol{Y})-F_r(\Lambda_0^F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\dots,\Lambda_{r-1}^F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}))]\ (r\ge 1)\end{aligned}$$

によって帰納的に定義する. さらに, $i\in\mathbb{Z}_p$ に対して

$$\omega_r^F(i)=\beta_r^F(\zeta_1^i,\dots,\zeta_r^i)$$

と定義する. ここで, $i=\sum_{k=0}^{\infty}i_kp^k$ のとき,

$$\zeta_{r+1}^i=\zeta_{r+1}^{i_0+i_1p+i_2p^2+\cdots+i_rp^r}$$

とおいた.

命題 3.4. $\zeta_r=e^{2\pi i/p^r}(r>0)$, $\lambda=\zeta_1-1$ とおき, $A=\mathbb{Z}_{(p)}[\zeta_n],K=\mathbb{Q}(\zeta_n)$ とする. このとき, 多項式の族 $F=\{F_r(\boldsymbol{T})\}_{0\le r\le n-1}$

$$F_r(\boldsymbol{T})=F_r(T_0,\dots,T_{r-1})\in\mathbb{Z}_{(p)}[\zeta_{r+1}][T_0,\dots,T_{r-1}]$$

が存在して

(0) 各 r に対して $F_r(0,\dots,0)=1$;

(1) 各 r に対して $F_r(\boldsymbol{X})F_r(\boldsymbol{Y})\equiv F_r(\Lambda_0^F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\dots,\Lambda_{r-1}^F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}))\mod\lambda$;

(2) 各 r に対して $F_r(\omega_0^F(1), \omega_1^F(1), \ldots, \omega_{r-1}^F(1)) \equiv \zeta_{r+1} \mod \lambda$；
(3) $F_r(0, \ldots, 0, T)$ の次数 $\leq p-1$.

3.5. 多項式の族 $F = \{F_r(\boldsymbol{T})\}_{0 \leq r \leq n-1}$ が命題の条件をみたすとき，以下のように A の上の commutative group scheme を定義する．

$$\mathcal{W}_n = \operatorname{Spec} A\Big[T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}, \frac{1}{\alpha_0^F(\boldsymbol{T})}, \frac{1}{\alpha_1^F(\boldsymbol{T})}, \ldots, \frac{1}{\alpha_{n-1}^F(\boldsymbol{T})}\Big]$$

とし，乗法を

$$(T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}) \mapsto (\Lambda_0^F(\boldsymbol{T} \otimes 1, 1 \otimes \boldsymbol{T}), \Lambda_1^F(\boldsymbol{T} \otimes 1, 1 \otimes \boldsymbol{T}) \ldots, \Lambda_{n-1}^F(\boldsymbol{T} \otimes 1, 1 \otimes \boldsymbol{T})).$$

で定義する．A 準同型

$$\begin{aligned}\alpha^{\boldsymbol{F}} : \mathcal{W}_n = \operatorname{Spec} A\Big[T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}, \frac{1}{\alpha_0^F(\boldsymbol{T})}, \frac{1}{\alpha_1^F(\boldsymbol{T})}, \ldots, \frac{1}{\alpha_{n-1}^F(\boldsymbol{T})}\Big] \\ \to \mathbb{G}_{m,A}^n = \operatorname{Spec} A\Big[U_0, U_1, \ldots, U_{n-1}, \frac{1}{U_0}, \frac{1}{U_1}, \ldots, \frac{1}{U_{n-1}}\Big]\end{aligned}$$

を

$$(U_0, U_1, \ldots, U_{n-1}) \mapsto (\alpha_0^F(\boldsymbol{T}), \alpha_1^F(\boldsymbol{T}), \ldots, \alpha_{n-1}^F(\boldsymbol{T}))$$

によって，また，K 準同型

$$\begin{aligned}\beta^{\boldsymbol{F}} : \mathbb{G}_{m,K}^n = \operatorname{Spec} K\Big[U_0, U_1, \ldots, U_{n-1}, \frac{1}{U_0}, \frac{1}{U_1}, \ldots, \frac{1}{U_{n-1}}\Big] \\ \to \mathcal{W}_{n,K} = \operatorname{Spec} K\Big[T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}, \frac{1}{\alpha_0^F(\boldsymbol{T})}, \frac{1}{\alpha_1^F(\boldsymbol{T})}, \ldots, \frac{1}{\alpha_{n-1}^F(\boldsymbol{T})}\Big]\end{aligned}$$

を

$$(T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}) \mapsto (\beta_0^F(\boldsymbol{U}), \beta_1^F(\boldsymbol{U}), \ldots, \beta_{n-1}^F(\boldsymbol{U})).$$

によって定義する．このとき，$\beta^F = (\alpha_K^F)^{-1}$. さらに，

$$i \mapsto (\omega_0^F(i), \omega_1^F(i), \ldots, \omega_{r-1}^F(i))$$

は単射 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathcal{W}_n$ を誘導する．

$\mathcal{V}_n = \mathcal{W}_n/(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ とおく．このとき，多項式の族 $G = \{G_r(\boldsymbol{T})\}_{0 \leq r \leq n-1}$ が存在して

$$\mathcal{V}_n = \operatorname{Spec} A\Big[T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}, \frac{1}{\alpha_0^G(\boldsymbol{T})}, \frac{1}{\alpha_1^G(\boldsymbol{T})}, \ldots, \frac{1}{\alpha_{n-1}^G(\boldsymbol{T})}\Big].$$

となる．乗法は

$$(T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}) \mapsto (\Lambda_0^G(\boldsymbol{T} \otimes 1, 1 \otimes \boldsymbol{T}), \Lambda_1^G(\boldsymbol{T} \otimes 1, 1 \otimes \boldsymbol{T}) \ldots, \Lambda_{n-1}^G(\boldsymbol{T} \otimes 1, 1 \otimes \boldsymbol{T})).$$

によって定義される．ここで，

$$\alpha_r^G(\boldsymbol{T}) = \alpha_r^G(T_0, \dots, T_r) \in A[T_0, T_1, \dots, T_{n-1}]$$

は

$$\alpha_r^G(\boldsymbol{T}) = \alpha_r^G(T_0, \dots, T_r) = \lambda^p T_r + G_r(T_0, \dots, T_{r-1}),$$

によって，

$$\Lambda_r^G(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \Lambda_r^G(X_0, \dots, X_r, Y_0, \dots, Y_r) \in A[X_0, \dots, X_r, Y_0, \dots, Y_r]$$

は

$$\Lambda_0^G(X_0, Y_0) = \lambda^p X_0 Y_0 + X_0 + Y_0,$$

$$\begin{aligned}\Lambda_r^G(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) =& \lambda^p X_r Y_r + X_r G_r(\boldsymbol{Y}) + G_r(\boldsymbol{X}) Y_r \\ &+ \frac{1}{\lambda}[G_r(\boldsymbol{X}) G_r(\boldsymbol{Y}) - G_r(\Lambda_0^G(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \dots, \Lambda_{r-1}^G(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}))] \ (r \geq 1)\end{aligned}$$

によって帰納的に定義される．

さらに，標準的な準同型 $\Psi_n : \mathcal{W}_n \to \mathcal{V}_n$ は

$$(T_0, T_1, \dots, T_{n-1}) \mapsto (\Psi_0(\boldsymbol{T}), \Psi_1(\boldsymbol{T}), \dots, \Psi_{n-1}(\boldsymbol{T})),$$

によって与えられる．ここで，$\{\Psi_r(\boldsymbol{T})\}_{0 \leq r \leq n-1}$ は

$$\lambda^p \Psi_0(\boldsymbol{T}) = (\lambda T_0 + 1)^p$$

$$\lambda^p \Psi_r(\boldsymbol{T}) + G_r(\Psi_0(\boldsymbol{T}), \Psi_1(\boldsymbol{T}), \dots, \Psi_{r-1}(\boldsymbol{T})) = \frac{(\lambda T_r + 1)^p}{\lambda T_{r-1} + F_{r-1}(\boldsymbol{T})} \ (r \geq 1)$$

をみたす．

例 3.6. $n = 2$．$\zeta_1 = e^{2\pi i/p}$, $\zeta_2 = e^{2\pi i/p^2}$，$A = \mathbb{Z}_{(p)}[\zeta_2]$ とする．

$\lambda = \lambda_1 = \zeta_1 - 1$，$\lambda_2 = \zeta_2 - 1$，

$\eta = \displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \lambda_2^k,$

$\tilde{\eta} = \dfrac{\lambda^{p-1}}{p}(p\eta - \lambda),$

$F(T) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} \frac{(\eta T)^k}{k!},$

$G(T) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} \frac{(\tilde{\eta} T)^k}{k!},$

$\Lambda_0^F(X_0, Y_0) = \lambda X_0 Y_0 + X_0 + Y_0,$

$$\Lambda_1^F(X_0,X_1,Y_0,Y_1) = \lambda X_1Y_1 + X_1F(Y_0) + F(X_0)Y_0$$
$$\qquad + \frac{1}{\lambda}[F(X_0)F(Y_0) - F(\lambda X_0Y_0 + X_0 + Y_0)],$$
$$\Lambda_0^G(X_0,Y_0) = \lambda^p X_0Y_0 + X_0 + Y_0,$$
$$\Lambda_1^G(X_0,X_1,Y_0,Y_1) = \lambda^p X_1Y_1 + X_1G(Y_0) + G(X_0)Y_0$$
$$\qquad + \frac{1}{\lambda^p}[G(X_0)G(Y_0) - G(\lambda^p X_0Y_0 + X_0 + Y_0)],$$
$$\Psi_0(T_0) = \frac{(\lambda T_0+1)^p - 1}{\lambda^p},$$
$$\Psi_1(T_0,T_1) = \frac{1}{\lambda^p}\left[\frac{\{\lambda T_1 + F(T_0)\}^p}{\lambda T_0 + 1} - G\left(\frac{(\lambda T_0+1)^p-1}{\lambda^p}\right)\right],$$
$$\mathcal{W}_2 = \operatorname{Spec} A\Big[T_0,T_1,\frac{1}{\lambda T_0+1},\frac{1}{\lambda T_1 + F(T_0)}\Big],$$
$$\mathcal{V}_2 = \operatorname{Spec} A\Big[T_0,T_1,\frac{1}{\lambda^p T_0+1},\frac{1}{\lambda^p T_1 + G(T_0)}\Big].$$

とおく．$\mathcal{W}_2$, $\mathcal{V}_2$ の乗法はそれぞれ

$$(T_0,T_1) \mapsto (\Lambda_0^F(T_0\otimes 1, 1\otimes T_0), \Lambda_1^F(T_0\otimes 1, T_1\otimes 1, 1\otimes T_0, 1\otimes T_1))$$

あるいは

$$(T_0,T_1) \mapsto (\Lambda_0^G(T_0\otimes 1, 1\otimes T_0), \Lambda_1^G(T_0\otimes 1, T_1\otimes 1, 1\otimes T_0, 1\otimes T_1))$$

によって定義される．また，準同型 $\Psi_2 : \mathcal{W}_2 \to \mathcal{V}_2$ は

$$(T_0,T_1) \mapsto (\Psi_0(T_0), \Psi(T_0,T_1)) :$$
$$A\Big[T_0,T_1,\frac{1}{\lambda^p T_0+1},\frac{1}{\lambda^p T_1 + G(T_0)}\Big] \to A\Big[T_0,T_1,\frac{1}{\lambda T_0+1},\frac{1}{\lambda T_1 + F(T_0)}\Big]$$

によって定義され，$\operatorname{Ker}\Psi$ は $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ に同型．$(\#_2)$ は

$$0 \to \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \to \mathcal{W}_2 \xrightarrow{\Psi_2} \mathcal{V}_2 \to 0$$

によって与えられる．

補註 3.7. [17] とは多少異なるが，$\mathcal{V}_2$ の具体的な形は Green-Matignon [6] によって独立に与えられている．

3.8. 順次 $\mathcal{G}^{(\lambda)}$ を積み重ねて $\mathcal{W}_n$ を構成する．このとき，以下の group scheme の拡大の記述が鍵となる．見通しを良くするため 3.5 での commutative group scheme の構成を一般化する．

A を離散付値環，K を A の分数体，$\mathfrak{m}$ を A の maximal ideal，$k = A/\mathfrak{m}$ を A の剰余体とする．$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n \in \mathfrak{m} - \{0\}$ とする．$F = \{F_r(\boldsymbol{T})\}_{0\le r\le n-1}$ を多項式

$$F_r(\boldsymbol{T}) = F_r(T_0,\dots,T_{r-1}) \in A[T_0,\dots,T_{r-1}]$$

の族とし，
(0) 各 r に対して $F_r(0,\dots,0)=1$；
(1) 各 r に対して $F_r(\boldsymbol{X})F_r(\boldsymbol{Y}) \equiv F_r(\Lambda_0^F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\dots,\Lambda_{r-1}^F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})) \mod \lambda_{r+1}$
が成立すると仮定する．

$$\alpha_r^F(\boldsymbol{T}) = \alpha_r^F(T_0,\dots,T_r) = \lambda_{r+1}T_r + F_r(T_0,\dots,T_{r-1})$$

とおき，

$$R = A\Big[T_0,T_1,\dots,T_{n-1},\frac{1}{\alpha_0^F(\boldsymbol{T})},\frac{1}{\alpha_1^F(\boldsymbol{T})},\dots,\frac{1}{\alpha_{n-1}^F(\boldsymbol{T})}\Big]$$

とする．また，

$$\beta_r^F(\boldsymbol{U}) = \beta_r^F(U_0,\dots,U_r) \in K[U_0,\dots,U_r],$$
$$\Lambda_r^F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \Lambda_r^F(X_0,\dots,X_r,Y_0,\dots,Y_r) \in K[X_0,\dots,X_r,Y_0,\dots,Y_r]$$

をそれぞれ

$$\beta_0^F(U_0) = \frac{1}{\lambda_1}(U_0-1),$$
$$\beta_r^F(\boldsymbol{U}) = \beta_r^F(U_0,\dots,U_r) = \frac{1}{\lambda_{r+1}}[U_r - F_r(\beta_0^F(\boldsymbol{U}),\dots,\beta_{r-1}^F(\boldsymbol{U}))] \ (r\geq 1)$$

あるいは

$$\Lambda_0^F(X_0,Y_0) = \lambda_1 X_0 Y_0 + X_0 + Y_0,$$

$$\begin{aligned}\Lambda_r^F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) =& \lambda_{r+1}X_rY_r + F_r(\boldsymbol{X})Y_r + Y_rF_r(\boldsymbol{X}) \\ &+ \frac{1}{\lambda_{r+1}}[F_r(\boldsymbol{X})F_r(\boldsymbol{Y}) - F_r(\Lambda_0^F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\dots,\Lambda_{r-1}^F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}))] \ (r\geq 1)\end{aligned}$$

によって帰納的に定義する．(1) から

$$\Lambda_r^F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \in A[X_0,\dots,X_r,Y_0,\dots,Y_r]$$

が従うが，$\mathcal{G} = \operatorname{Spec} R$ に乗法を

$$(T_0,T_1,\dots,T_{n-1}) \mapsto (\Lambda_0^F(\boldsymbol{T}\otimes 1, 1\otimes \boldsymbol{T}), \Lambda_1^F(\boldsymbol{T}\otimes 1, 1\otimes \boldsymbol{T})\dots,\Lambda_{n-1}^F(\boldsymbol{T}\otimes 1, 1\otimes \boldsymbol{T}))$$

で定義すれば，$\mathcal{G}$ は A の上の commutative group scheme.

また，A 準同型

$$\begin{aligned}\alpha^F : \mathcal{G} = \operatorname{Spec} A\Big[T_0,T_1,\dots,T_{n-1},\frac{1}{\alpha_0^F(\boldsymbol{T})},\frac{1}{\alpha_1^F(\boldsymbol{T})},\dots,\frac{1}{\alpha_{n-1}^F(\boldsymbol{T})}\Big] \\ \to \mathbb{G}_{m,A}^n = \operatorname{Spec} A\Big[U_0,U_1,\dots,U_{n-1},\frac{1}{U_0},\frac{1}{U_1},\dots,\frac{1}{U_{n-1}}\Big]\end{aligned}$$

を

$$(U_0,U_1,\dots,U_{n-1}) \mapsto (\alpha_0^F(\boldsymbol{T}),\alpha_1^F(\boldsymbol{T}),\dots,\alpha_{n-1}^F(\boldsymbol{T}))$$

によって，また，K 準同型

$$\begin{aligned}\beta^{\boldsymbol{F}}: \mathbb{G}_{m,K}^n =& \operatorname{Spec} K\Big[U_0, U_1, \dots, U_{n-1}, \frac{1}{U_0}, \frac{1}{U_1}, \dots, \frac{1}{U_{n-1}}\Big] \\ &\to \mathcal{G}_K = \operatorname{Spec} K\Big[T_0, T_1, \dots, T_{n-1}, \frac{1}{\alpha_0^F(\boldsymbol{T})}, \frac{1}{\alpha_1^F(\boldsymbol{T})}, \dots, \frac{1}{\alpha_{n-1}^F(\boldsymbol{T})}\Big]\end{aligned}$$

を

$$(T_0, T_1, \dots, T_{n-1}) \mapsto (\beta_0^F(\boldsymbol{U}), \beta_1^F(\boldsymbol{U}), \dots, \beta_{n-1}^F(\boldsymbol{U}))$$

によって定義すれば，$\beta^F = (\alpha_K^F)^{-1}$.

さらに，剰余環の列

$$R \to R/(T_0) \to R/(T_0, T_1) \to \dots \to R/(T_0, \dots, T_{n-2}) \to R/(T_0, \dots, T_{n-2}, T_{n-1}) = A$$

は $\mathcal{E}$ の closed subgroup scheme の列

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \supset \mathcal{G}_1 \supset \mathcal{G}_2 \supset \dots \supset \mathcal{G}_{n-1} \supset \mathcal{G}_n = 0$$

を定義し，各 r に対して $\mathcal{G}_{r-1}/\mathcal{G}_r$ は $\mathcal{G}^{(\lambda_r)}$ に同型となる．したがって，$\mathcal{G} \otimes_A k$ は k の上の unipotent group.

定理 3.9. $\mu \in \mathfrak{m} - \{0\}$，$A_0 = A/(\mu)$ とする．このとき，完全列

$$\begin{aligned}0 &\to \operatorname{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathcal{G}, \mathcal{G}^{(\mu)}) \to \operatorname{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathcal{G}, \mathbb{G}_m) \to \operatorname{Hom}_{A_0\text{-gr}}(\mathcal{G}, \mathbb{G}_m) \\ &\xrightarrow{\partial} \operatorname{Ext}_A^1(\mathcal{G}, \mathcal{G}^{(\mu)}) \to 0\end{aligned}$$

が存在する．

$\partial : \operatorname{Hom}_{A_0\text{-gr}}(\mathcal{G}, \mathbb{G}_m) \to \operatorname{Ext}_A^1(\mathcal{G}, \mathcal{G}^{(\mu)})$ は次のように定義される．

$$F(T_0, T_1, \dots, T_{n-1}) \in A_0[T_0, T_1, \dots, T_{n-1}]$$

$\mathcal{G}_{A_0}$ から $\mathbb{G}_{m,A_0}$ への準同型を定義する多項式とすれば $F(0, 0, \dots, 0) = 1$ で

$$A_0[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] = A_0[X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}]$$

において

$$F(\boldsymbol{X})F(\boldsymbol{Y}) = F(\Lambda_0^F(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \dots, \Lambda_{n-1}^F(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}))$$

が成立する．したがって，

$$F_n(T_0, T_1, \dots, T_{n-1}) \in A[T_0, T_1, \dots, T_{n-1}]$$

を $F(T_0, T_1, \dots, T_{n-1})$ の持ち上げとすれば，

$$F_n(\boldsymbol{X})F_n(\boldsymbol{Y}) = F_n(\Lambda_0^F(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}), \dots, \Lambda_{n-1}^F(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})) \mod \mu$$

が成立する．さらに，$F_n(0,0,\dots,0)=1$ となるように選ぶ．

$$\alpha_n^F(\boldsymbol{T})=\alpha_n^F(T_0,\dots,T_n)=\mu T_n+F_n(T_0,\dots,T_{n-1}),$$

$$\begin{aligned}\Lambda_n^F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=&\mu X_nY_n+F_n(\boldsymbol{X})Y_n+Y_nF_n(\boldsymbol{X})\\&+\frac{1}{\mu}[F_n(\boldsymbol{X})F_n(\boldsymbol{Y})-F_n(\Lambda_0^F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\dots,\Lambda_{n-1}^F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}))]\end{aligned}$$

とおき，

$$\mathcal{E}=\operatorname{Spec}A\Big[T_0,T_1,\dots,T_{n-1},T_n,\frac{1}{\alpha_0^F(\boldsymbol{T})},\frac{1}{\alpha_1^F(\boldsymbol{T})},\dots,\frac{1}{\alpha_{n-1}^F(\boldsymbol{T})},\frac{1}{\alpha_n^F(\boldsymbol{T})}\Big]$$

に乗法を

$$\begin{aligned}&(T_0,T_1,\dots,T_{n-1},T_n)\mapsto\\&\quad(\Lambda_0^F(\boldsymbol{T}\otimes1,1\otimes\boldsymbol{T}),\Lambda_1^F(\boldsymbol{T}\otimes1,1\otimes\boldsymbol{T})\dots,\Lambda_{n-1}^F(\boldsymbol{T}\otimes1,1\otimes\boldsymbol{T})),\Lambda_n^F(\boldsymbol{T}\otimes1,1\otimes\boldsymbol{T}))\end{aligned}$$

によって定義すれば，$\mathcal{G}$ の $\mathcal{G}^{(\lambda)}$ による拡大 $\mathcal{E}$ を得る．∂F は $\mathcal{E}$ の $\mathrm{Ext}_A^1(\mathcal{G},\mathcal{G}^{(\mu)})$ における類に一致する．

3.10. $\mathcal{W}_n$ が Kummer-Artin-Schreier-Witt 理論の要件をみたすとき，reduction map

$$\mathrm{Ext}_A^1(\mathcal{W}_n,\mathcal{G}^{(\lambda)})\to\mathrm{Ext}_k^1(W_n,\mathbb{G}_a)$$

による

$$0\to\mathbb{G}_a\xrightarrow{V^n}W_{n+1}\xrightarrow{R}W_n\to0$$

の逆像に属する元が $\mathcal{W}_{n+1}$ の候補となる．さらに，全射

$$\partial:\mathrm{Hom}_{A_0\text{-gr}}(\mathcal{W}_n,\mathbb{G}_m)\to\mathrm{Ext}_A^1(\mathcal{W}_n,\mathcal{G}^{(\mu)})$$

によって命題 3.4 の条件 (1)(2)(3) をみたす多項式を順次見出す問題に帰着させる．

一般に $\mathrm{Hom}_{A_0\text{-gr}}(\mathcal{G},\mathbb{G}_{m,A})$ は Witt vector によって記述できる．次節で出発点となる $\mathrm{Hom}_{A_0\text{-gr}}(\mathcal{G}^{(\lambda)},\mathbb{G}_{m,A})$ の場合を説明する．

4. Artin-Hasse exponential seiries

4.1. Artin-Hasse exponential series は

$$E_p(T)=\exp\left(\sum_{r\geq0}\frac{T^{p^r}}{p^r}\right)$$

によって定義された．周知のように

$$E_p(T)\in\mathbb{Z}_{(p)}[[T]]$$

が成立する.

4.2. 形式巾級数 $E_p(U,\Lambda;T) \in \mathbb{Q}[U,\Lambda][[T]]$ を

$$E_p(U,\Lambda;T) = (1+\Lambda T)^{\frac{U}{\Lambda}} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\Lambda^{p^k}T^{p^k}\right)^{\frac{1}{p^k}\{(\frac{U}{\Lambda})^{p^k}-(\frac{U}{\Lambda})^{p^{k-1}}\}}$$

によって定義する.

定理 4.3.

$$E_p(U,\Lambda;T) = \begin{cases} \prod_{(k,p)=1} E_p(U\Lambda^{k-1}T^k)^{(-1)^{k-1}/k} & (p>2), \\ \prod_{(k,2)=1} E_p(U\Lambda^{k-1}T^k)^{1/k} \left[\prod_{(k,2)=1} E_p(U\Lambda^{2k-1}T^{2k})^{1/k}\right]^{-1} & (p=2) \end{cases}$$

したがって, $E_p(U,\Lambda;T) \in \mathbb{Z}_{(p)}[U,\Lambda][[T]]$.

例 4.4. $E_p(1,0;T) = E_p(T)$

例 4.5. $E_p(\Lambda,\Lambda;T) = 1+\Lambda T$

補註 4.6. 形式巾級数 $E_p(U,1;T)$ は $F(t,Y)$ として Dwork [3] によって導入されていた.

4.7. A を $\mathbb{Z}_{(p)}$ 代数とし, $\lambda \in A$, $\boldsymbol{a} = (a_0,a_1,a_2,\ldots) \in W(A)$ とする. 形式巾級数 $E_p(\boldsymbol{a},\lambda;T) \in A[[T]]$ を

$$E_p(\boldsymbol{a},\lambda;T) = \prod_{k=0}^{\infty} E_p(a_k,\lambda^{p^k};T^{p^k})$$

によって定義する.

例 4.8. $E_p(\boldsymbol{a},0;T) = E_p(\boldsymbol{a};T)$

補註 4.9. $A = \mathbb{Z}_{(p)}[\Lambda,U_0,U_1,U_2,\ldots]$, $\boldsymbol{U} = (U_0,U_1,U_2,\ldots)$ のとき,

$$\log E_p(\boldsymbol{U},\Lambda;T) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Phi_r(\boldsymbol{U})}{p^r\Lambda^{p^r}} \left\{\log(1+\Lambda^{p^r}T^{p^r}) - \frac{1}{p}\log(1+\Lambda^{p^{r+1}}T^{p^{r+1}})\right\}$$

が成立する.

4.10. 形式巾級数

$$F_p(\boldsymbol{U},\Lambda;X,Y) = F_p(U_0,U_1,U_2,\ldots,\Lambda;X,Y) \in \mathbb{Q}[U_0,U_1,U_2,\ldots,\Lambda][[X,Y]]$$

を

$$F_p(\boldsymbol{U},\Lambda;X,Y) = \prod_{r=0}^{\infty}(1+\Lambda^{p^r}T^{p^r})^{\Phi_r(\boldsymbol{U})/p^r\Lambda^{p^r}}$$

によって定義する．このとき，

$$F_p(\boldsymbol{U}, \Lambda; X, Y) \in \mathbb{Z}_{(p)}[U_0, U_1, U_2, \ldots, \Lambda][[X, Y]]$$

4.11. A を $\mathbb{Z}_{(p)}$ 代数とし，$\lambda \in A$，$\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, a_2, \ldots) \in W(A)$ とする．形式巾級数 $F_p(\boldsymbol{a}, \lambda; X, Y) \in A[[X, Y]]$ を $F_p(\boldsymbol{U}, \Lambda; X, Y)$ において $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{a}$，$\Lambda = \lambda$ を代入することによって定義する．

定理 4.12. A を $\mathbb{Z}_{(p)}$ 代数，$\lambda \in A$ とする．このとき，$\boldsymbol{a} \mapsto E_p(\boldsymbol{a}, \lambda; T)$ は同型

$$\mathrm{Ker}[F - [\lambda^{p-1}] : W(A) \to W(A)] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$$

を，また，$\boldsymbol{a} \mapsto F_p(\boldsymbol{a}, \lambda; X, Y)$ は同型

$$\mathrm{Coker}[F - [\lambda^{p-1}] : W(A) \to W(A)] \xrightarrow{\sim} H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$$

を引き起こす．さらに，λ が巾零と仮定する．このとき，$\boldsymbol{a} \mapsto E_p(\boldsymbol{a}, \lambda; T)$ は同型

$$\mathrm{Ker}[F - [\lambda^{p-1}] : \widehat{W}(A) \to \widehat{W}(A)] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{m,A})$$

を，また，$\boldsymbol{a} \mapsto F_p(\boldsymbol{a}, \lambda; X, Y)$ は同型

$$\mathrm{Coker}[F - [\lambda^{p-1}] : \widehat{W}(A) \to \widehat{W}(A)] \xrightarrow{\sim} H_0^2(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{m,A})$$

を引き起こす．

定理は形式巾級数 $F(T)$ あるいは $F(X, Y)$ が函数等式

$$F(X)F(Y) = F(X + Y + \lambda XY)$$

あるいは

$$F(X, Y)F(X + Y + \lambda XY) = F(X, Y + Z + \lambda YZ)F(Y, Z),\ F(X, Y) = F(Y, X)$$

をみたすように両辺を展開し未定係数法によって形を決めて行くことによって証明される．$\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$，$H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$ についても [18] で示したように辛抱強く計算を積み重ねることによってその記述を与えることが出来るが，Cartier 理論によって議論の見通しが良くなる．これについて次節で説明する．

5．Kummer-Artin-Schreier-Witt 理論と Cartier 理論

5.1. A を可換環，$W(A)$ を A に成分をもつ Witt vector の環とする．R を $W(A)$ の上に生成元 $\mathbb{V}$ と関係式

(1) $\boldsymbol{a}\mathbb{V} = \mathbb{V}F(\boldsymbol{a})$.

によって定義される環とする．R の元は

$$\boldsymbol{a}_0 + \mathbb{V}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \mathbb{V}^n \boldsymbol{a}_n,\ \boldsymbol{a}_j \in W(A)$$

の形に一意的に表わせる．$\mathbb{V}^n R$ は R の two-sided ideal. $\widehat{R} = \varprojlim_n R/\mathbb{V}^n R$ とおく．A の上の Cartier-Dieudonné 代数あるいは Dieudonné 代数 D_A を $\widehat{R}$ の上に生成元 $\mathbb{F}$ と関係式

(2) $\mathbb{F}\boldsymbol{a} = F(\boldsymbol{a})\mathbb{F}$,

(3) $\mathbb{F}\mathbb{V} = p$,

(4) $\mathbb{V}\boldsymbol{a}\mathbb{F} = V(\boldsymbol{a})$.

によって定義する．D_A の元は

$$\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{a}_{-j}\mathbb{F}^j + \boldsymbol{a}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{V}^j \boldsymbol{a}_j,\ \boldsymbol{a}_j \in W(A)$$

の形に一意的に表わせる．

例 5.2. $W(A)$ は $\mathbb{F} = F$, $\mathbb{V} = V$ として左 D_A 加群とみなせる．

5.3. (Cartier 理論) A を $\mathbb{Z}_{(p)}$ 代数，$\mathcal{G}$ を A の上の可換形式群とする．$\mathcal{G}$ の p-typical curve のなす Cartier 加群 $C(G) = \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{W}, \mathcal{G})$ は左 D_A 加群の構造を持つ．$G \mapsto C(G)$ は A の上の可換形式群の圏から左 D_A 加群の圏への fully faithful functor.

例 5.4. $C(\widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$ は左 D_A 加群 $W(A)$ に同型.

5.5. 以下，$C(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)})$ を記述するために Witt 算法の変形を導入する．

多項式

$$\Phi_r^{(M)}(\boldsymbol{T}) = \Phi_r^{(M)}(T_0, \ldots, T_r) \in \mathbb{Z}[M][T_0, \ldots, T_r]$$

を

$$\Phi_r^{(M)}(\boldsymbol{T}) = \frac{1}{M}\Phi_r(MT_0, \ldots, MT_r) = M^{p^r-1}T_0^{p^r} + pM^{p^{r-1}-1}T_1^{p^{r-1}} + \cdots + p^{r-1}M^{p-1}T_{r-1} + p^r T_r.$$

によって定義する．さらに，

$$S_r^{(M)}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = S_r^{(M)}(X_0, \ldots, X_r, Y_0, \cdots, Y_r) \in \mathbb{Z}[M][X_0, \ldots, X_r, Y_0, \cdots, Y_r],$$
$$P_r^{(M)}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = P_r^{(M)}(X_0, \ldots, X_r, Y_0, \cdots, Y_r) \in \mathbb{Z}[M][X_0, \ldots, X_r, Y_0, \cdots, Y_r],$$
$$F_r^{(M)}(\boldsymbol{T}) = F_r^{(M)}(T_0, \ldots, T_r, T_{r+1}) \in \mathbb{Z}[M][T_0, \ldots, T_r, T_{r+1}]$$

をそれぞれ

$$S_r^{(M)}(X_0, \ldots, X_r, Y_0, \cdots, Y_r) = \frac{1}{M}S_r(MX_0, \ldots, MX_r, MY_0, \ldots, MY_r),$$
$$P_r^{(M)}(X_0, \ldots, X_r, Y_0, \cdots, Y_r) = \frac{1}{M}P_r(X_0, \ldots, X_r, MY_0, \ldots, MY_r),$$
$$F_r^{(M)}(\boldsymbol{T}) = F_r^{(M)}(T_0, \ldots, T_r, T_{r+1}) = \frac{1}{M}F_r(MT_0, \ldots, MT_r, MT_{r+1}),$$

によって定義する．例えば，

$$S_0^{(M)}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = X_0 + Y_0,$$
$$S_1^{(M)}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = X_1 + Y_1 + M^{p-1}\frac{X_0^p + Y_0^p - (X_0+Y_0)^p}{p},$$
$$P_0^{(M)}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = X_0Y_0,$$
$$P_1^{(M)}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = X_0^pY_1 + M^{p-1}X_1Y_0^p + pX_1Y_1,$$
$$F_0^{(M)}(\boldsymbol{T}) = M^{p-1}T_0^p + pT_1.$$

$W^{(M)} = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[M][T_0,T_1,T_2,\ldots]$ に

$$\boldsymbol{T} = (T_0,T_1,T_2,\ldots) \mapsto$$
$$S^{(M)}(\boldsymbol{T}\otimes 1, 1\otimes \boldsymbol{T}) = (S_0^{(M)}(\boldsymbol{T}\otimes 1, 1\otimes \boldsymbol{T}), S_1^{(M)}(\boldsymbol{T}\otimes 1, 1\otimes \boldsymbol{T}), S_2^{(M)}(\boldsymbol{T}\otimes 1, 1\otimes \boldsymbol{T}),\ldots)$$

によって加法を定義すれば，$W^{(M)}$ は $\mathbb{Z}[M]$ の上の commutative group scheme.

また，morphism $\cdot : W_{\mathbb{Z}[M]} \otimes_{\mathbb{Z}[M]} W^{(M)} \to W^{(M)}$ を

$$\boldsymbol{T} = (T_0,T_1,T_2,\ldots) \mapsto$$
$$P^{(M)}(\boldsymbol{T}\otimes 1, 1\otimes \boldsymbol{T}) = (P_0^{(M)}(\boldsymbol{T}\otimes 1, 1\otimes \boldsymbol{T}), P_1^{(M)}(\boldsymbol{T}\otimes 1, 1\otimes \boldsymbol{T}), P_2^{(M)}(\boldsymbol{T}\otimes 1, 1\otimes \boldsymbol{T}),\ldots)$$

によって定義すれば $W^{(M)}$ は $W_{\mathbb{Z}[M]}$ 加群.

さらに，準同型 $V : W^{(M)} \to W^{(M)}$，$F^{(M)} : W^{(M)} \to W^{(M)}$ をそれぞれ

$$(T_0,T_1,T_2,\ldots) \mapsto (0,T_0,T_1,\ldots) : \mathbb{Z}[M][T_0,T_1,T_2,\ldots] \to \mathbb{Z}[M][T_0,T_1,T_2,\ldots]$$

あるいは

$$(T_0,T_1,T_2,\ldots) \mapsto (F_0^{(M)}(\boldsymbol{T}), F_1^{(M)}(\boldsymbol{T}), F_2^{(M)}(\boldsymbol{T}),\ldots) :$$
$$\mathbb{Z}[M][T_0,T_1,T_2,\ldots] \to \mathbb{Z}[M][T_0,T_1,T_2,\ldots],$$

によって定義する．

5.6. A を $\mathbb{Z}[M]$ 代数とする．$\operatorname{Im} V^k = \operatorname{Im}[V^k : W^{(M)}(A) \to W^{(M)}(A)]$ は $W^{(M)}(A)$ の部分 $W(A)$ 加群．$W^{(M)}(A)$ は部分群の族 $\{\operatorname{Im} V^k\}_{k>0}$ によって定義される V 進位相によって位相群の構造をもつ．$W^{(M)}(A)$ は V 進位相に対して完備で分離的．したがって，$W^{(M)}(A)$ は $\mathbb{F} = F^{(M)}$，$\mathbb{V} = V$ として左 D_A 加群とみなせる．

定理 5.7. A を $\mathbb{Z}[M]$ 代数とする．このとき，$W^{(M)}(A)$ は $\widehat{\mathcal{G}}_A^{(M)}$ の Carter 加群 $C(\widehat{\mathcal{G}}_A^{(M)}) = \operatorname{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{W}, \widehat{\mathcal{G}}_A^{(M)})$ に同型.

例 5.8. 明らかに

$$S_r^{(1)}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = S_r(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\ P_r^{(1)}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = P_r(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\ F_r^{(1)}(\boldsymbol{T}) = F_r(\boldsymbol{T})$$

したがって，$W^{(1)}(A) = W(A)$.

例 5.9.
$$S_r^{(0)}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = X_r + Y_r,\ P_r^{(0)}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \Phi_r(\boldsymbol{X})Y_r,\ F_r^{(0)}(\boldsymbol{T}) = pT_{r+1}.$$
したがって，$C(\widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) = W^{(0)}(A)$ は可換群として $A^{\mathbb{N}}$ に同型．さらに，$\mathbb{F}, \mathbb{V}$ は

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto (pa_1, pa_2, pa_3, \dots)$$

あるいは

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto (0, a_0, a_1, a_2, \dots)$$

で与えられる．

例 5.10. 準同型 $\alpha^{(M)} : W^{(M)} \to W_{\mathbb{Z}[M]}$ を

$$(T_0, T_1, T_2, \dots) \mapsto (MT_0, MT_1, MT_2, \dots) : \mathbb{Z}[T_0, T_1, T_2, \dots] \to \mathbb{Z}[M][T_0, T_1, T_2, \dots].$$

で定義する．

A を $\mathbb{Z}[M]$ 代数とする．このとき，$\alpha^{(M)} : W^{(M)}(A) \to W(A)$ は D_A 準同型で，形式群の準同型 $\alpha^{(M)} : \widehat{\mathcal{G}}_A^{(M)} \to \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}$ に対応する．

定理 5.11. A を $\mathbb{Z}[\Lambda]$ 代数とし，$[1]_\Lambda = (1, 0, 0, \dots) \in W^{(\Lambda)}(A)$ とおく．D_A 準同型 $\varphi_A : D_A \to W^{(\Lambda)}(A)$ を $\boldsymbol{P} \mapsto \boldsymbol{P}[1]_\Lambda$ によって定義する．このとき，列

$$0 \to D_A \xrightarrow{\cdot(\mathbb{F} - [\Lambda^{p-1}])} D_A \xrightarrow{\varphi_A} W^{(\Lambda)}(A) \to 0$$

は完全．

系 5.12. M を左 D_A 加群とする．このとき，
(1) $\mathrm{Hom}_{D_A}(W^{(\Lambda)}(A), M)$ は $\mathrm{Ker}[\mathbb{F} - [\Lambda^{p-1}] : M \to M]$ に同型；
(2) $\mathrm{Ext}^1_{D_A}(W^{(\Lambda)}(A), M)$ は $\mathrm{Coker}[\mathbb{F} - [\Lambda^{p-1}] : M \to M]$ に同型；
(3) $j > 1$ に対して $\mathrm{Ext}^j_{D_A}(W^{(\Lambda)}(A), M) = 0$.

例 5.13. $M = W(A) = C(\widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$ とする．このとき，

$$\mathrm{Hom}_{D_A}(W^{(\Lambda)}(A), W) = \mathrm{Ker}[F - [\Lambda^{p-1}] : W(A) \to W(A)]$$

したがって，Cartier 理論から

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}_A^{(\Lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) = \mathrm{Ker}[F - [\Lambda^{p-1}] : W(A) \to W(A)]$$

を得る．一方，定理 4.12 で $\boldsymbol{a} \mapsto E_p(\boldsymbol{a}, \Lambda; T)$ は同型

$$\xi : \mathrm{Ker}[F - [\Lambda^{p-1}] : W(A) \to W(A)] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\Lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$$

を引き起こすことを言ったが，$C(\xi(\boldsymbol{a})) = \boldsymbol{a}$ が成立する．

5.14. A を $\mathbb{Z}[\Lambda, M]$ 代数とし，$\boldsymbol{C} \in D_A$ とする．D_A^2 の左 D_A 自己準同型 $U_{\Lambda,M,\boldsymbol{C}}$ を

$$U_{\Lambda,M,\boldsymbol{C}} : (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}) \mapsto (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}) \begin{pmatrix} \mathbb{F} - [\Lambda^{p-1}] & -\boldsymbol{C} \\ 0 & \mathbb{F} - [M^{p-1}] \end{pmatrix}$$

によって定義する．このとき，左 D_A 加群の完全列の可換図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D_A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\cdot(\mathbb{F}-[M^{p-1}])"] & D_A \oplus D_A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "U_{\Lambda,M,\boldsymbol{C}}"] & D_A \arrow[r] \arrow[d, "\cdot(\mathbb{F}-[\Lambda^{p-1}])"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D_A \arrow[r, "i"'] & D_A \oplus D_A \arrow[r, "j"'] & D_A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

を得る．ここで，i, j はそれぞれ $i : \boldsymbol{Q} \mapsto (0, \boldsymbol{Q})$ あるいは $j : (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}) \mapsto \boldsymbol{P}$ によって定義される．余核をとって D_A 加群の拡大

$$0 \to W^{(M)}(A) \to E \to W^{(\Lambda)}(A) \to 0$$

を得る．同一視

$$\mathrm{Ext}^1_{D_A}(W^{(\Lambda)}(A), W^{(M)}(A)) = \mathrm{Coker}[F^{(M)} - [\Lambda^{p-1}] : W^{(M)}(A) \to W^{(M)}(A)],$$

の下で E の $\mathrm{Ext}^1_{D_A}(W^{(\Lambda)}(A), W^{(M)}(A))$ における類は $\boldsymbol{C}[1]_M$ の類に対応する．

実際，D_A 準同型 $\varphi_{(M,\boldsymbol{C})} : D_A \to W^{(M)}(A)$ を $1 \mapsto \boldsymbol{C}[1]_M$ によって定義すれば，$\boldsymbol{C}[1]_M$ を表現する拡大は push-out

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D_A \arrow[r, "\cdot(\mathbb{F}-[\Lambda^{p-1}])"] \arrow[d, "\varphi_{(M,\boldsymbol{C})}"'] & D_A \arrow[r] \arrow[d] & W^{(\Lambda)}(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & W^{(M)}(A) \arrow[r] & \tilde{E} \arrow[r] & W^{(\Lambda)}(A) \arrow[r] & 0\ , \end{tikzcd}$$

によって与えられる．ここで，$i' : D_A \to D_A \oplus D_A$ を

$$\boldsymbol{Q} \mapsto (0, \boldsymbol{Q}(\mathbb{F} - [M^{p-1}]))$$

によって，また，$j' : D_A \oplus D_A \to D_A \oplus W^{(M)}(A)$ を

$$(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}) \mapsto (\boldsymbol{P}, \varphi_M(\boldsymbol{Q})) = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}[1]_M)$$

によって定義すれば，完全列の可換図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D_A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & D_A \oplus D_A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "U_{\Lambda,M,\boldsymbol{C}}"] & D_A \arrow[r] \arrow[d, "(\mathbb{F}-[\Lambda^{p-1}], -\varphi_{(M,\boldsymbol{C})})"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D_A \arrow[r, "i'"'] & D_A \oplus D_A \arrow[r, "j'"'] & D_A \oplus W^{(M)}(A) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

を得る．さらに，余核をとって同型 $E \xrightarrow{\sim} \tilde{E}$ を得る．

例 5.15. $M = W(A) = C(\widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$ とする．このとき，

$$\mathrm{Ext}^1_{D_A}(W^{(\Lambda)}(A), W) = \mathrm{Coker}[F - [\Lambda^{p-1}] : W(A) \to W(A)]$$

したがって，Cartier 理論から

$$H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}_A^{(\Lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) = \mathrm{Coker}[F - [\Lambda^{p-1}] : W(A) \to W(A)]$$

を得る．一方，定理 4.12 で $\boldsymbol{a} \mapsto F_p(\boldsymbol{a}, \Lambda; T)$ は同型

$$\xi : \mathrm{Coker}[F - [\Lambda^{p-1}] : W(A) \to W(A)] \xrightarrow{\sim} H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\Lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$$

を引き起こすことを言ったが，$C(\xi(\boldsymbol{a})) = \boldsymbol{a}$ が成立する．

命題 5.16. A を環，$\mathcal{G}$ を A の上の可換形式群とする．$\mathcal{G}$ の部分形式群の列

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \supset \mathcal{G}_1 \supset \mathcal{G}_2 \supset \ldots \supset \mathcal{G}_{n-1} \supset \mathcal{G}_n = 0$$

が存在して各 i に対して $\mathcal{G}_{i-1}/\mathcal{G}_i$ が $\mathcal{G}^{(\lambda_i)}$ $(\lambda_i \in A)$ に同型であると仮定する．このとき，D_A 加群の完全列

$$0 \to (D_A)^n \xrightarrow{U} (D_A)^n \to C(\mathcal{G}) \to 0$$

が存在する．ここで，$U : (D_A)^n \to (D_A)^n$ は

$$(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_n) \mapsto (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_n)U,$$

$$U = \begin{pmatrix} \mathbb{F} - [\lambda_1^{p-1}] & -\boldsymbol{C}_{12} & -\boldsymbol{C}_{13} & \ldots & -\boldsymbol{C}_{1n} \\ 0 & \mathbb{F} - [\lambda_2^{p-1}] & -\boldsymbol{C}_{23} & \ldots & -\boldsymbol{C}_{2n} \\ 0 & 0 & \mathbb{F} - [\lambda_3^{p-1}] & \ldots & -\boldsymbol{C}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mathbb{F} - [\lambda_n^{p-1}] \end{pmatrix}$$

で与えられる．

例 5.17. $\zeta_r = e^{2\pi i/p^r}, \lambda = \zeta_1 - 1$ とし，$A = \mathbb{Z}_p[\zeta_n]$ とする．命題 3.4 で多項式の族 $F = \{F_r(\boldsymbol{T})\}_{0 \le r \le n-1}$

$$F_r(\boldsymbol{T}) = F_r(T_0, \ldots, T_{r-1}) \in \mathbb{Z}_p[\zeta_{r+1}][T_0, \ldots, T_{r-1}]$$

を選んで，D_A 加群の列

$$0 \to (D_A)^n \xrightarrow{U} (D_A)^n \to C(\widehat{\mathcal{W}}_{n,A}) \to 0$$

が完全となるようにできる．ここで，$U : (D_A)^n \to (D_A)^n$ は

$$(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_n) \mapsto (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_n)U,$$

$$U = \begin{pmatrix} \mathbb{F} - [\lambda^{p-1}] & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbb{F} - [\lambda^{p-1}] & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{F} - [\lambda^{p-1}] & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mathbb{F} - [\lambda^{p-1}] \end{pmatrix}$$

で与えられる．

これから，さらに議論を進めて，各 $n, m > 0$ に対して完全列の可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/p^{m+n}\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{W}_m \arrow[r] \arrow[d, "\Psi_m"'] & \mathcal{W}_{m+n} \arrow[r] \arrow[d, "\Psi_{m+n}"'] & \mathcal{W}_n \arrow[r] \arrow[d, "\Psi_n"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{V}_m \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{V}_{m+n} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{V}_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

を得る．

文献．

[1] N. Bourbaki – Algèbre commutative, Chapitres 8 et 9, Masson, Paris, 1983.

[2] M. Demazure, P. Gabriel – Groupes algébriques, Tome 1, Masson-North-Holland, Paris-Amsterdam, 1970.

[3] B. Dwork – On the rationality of the zeta function of an algebraic variety, Amer. J. Math. 82 (1960), 631–648.

[4] P. Furtwängler – Über die Reziprozitätsgesetze der ℓ-ten Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn ℓ eine ungerade Primzahl bedeutet, Math. Ann. 58 (1904) 1–50

[5] P. Furtwängler – Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines bebliegen Zahlkölpers, Math. Ann. 63 (1907) 1–37

[6] B. Green, M. Matignon – Liftings of Galois covers of smooth curves, Compositio Math. 113 (1998), 237–272.

[7] M. Hazewinkel – Formal groups and applications, Academic Press, New York, 1978.
[8] L. Illusie – Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 12 (1979), 501–661.
[9] T. Sekiguchi – On the deformations of Witt groups to tori II, J. Algebra 138 (1991), 273–297
[10] T. Sekiguchi, N. Suwa – A case of extensions of group schemes over a discrete valuation ring, Tsukuba J. Math. 14 (1990), 459–487
[11] T. Sekiguchi, N. Suwa – Some cases of extensions of group schemes over a discrete valuation ring I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 38 (1991), 1–45.
[12] T. Sekiguchi, N. Suwa – A note on extensions of algebraic and formal groups I, Math. Z. 206 (1991), 567–575.
[13] T. Sekiguchi, N. Suwa – A note on extensions of algebraic and formal groups II, Math. Z. 217 (1994), 447–457.
[14] T. Sekiguchi, N. Suwa – Théories de Kummer-Artin-Schreier-Witt, C. R. Acad. Sci. Paris 319 (1994), 105-110.
[15] T. Sekiguchi, N. Suwa – Théorie de Kummer-Artin-Schreier et applications. J. Théorie des Nombres de Bordeaux 7 (1995) 177-189
[16] T. Sekiguchi, N. Suwa – A note on extensions of algebraic and formal groups III, Tôhoku Math. J. (1997), 241–257.
[17] T. Sekiguchi, N. Suwa – A note on extensions of algebraic and formal groups IV, to appear in Tôhoku Math. J.
[18] T. Sekiguchi, N. Suwa – On the unified Kummer-Artin-Schreier-Witt theory, Prépublication No.111, Université de Bordeaux (1999)
[19] T. Sekiguchi, N. Suwa – A note on extensions of algebraic and formal groups V, Preprint.
[20] T. Sekiguchi, F. Oort, N. Suwa – On the deformation of Artin-Schreier to Kummer, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 22 (1989), 345–375
[21] W. C. Waterhouse – A unified Kummer-Artin-Schreier sequence, Math. Ann. 277 (1987) 447–451
[22] E. Witt – Konstruktion von galoisschen Körpern der Charakteristik p zu vorgegebener Gruppe der Ordnung p^f, J. Reine Angew. Math. 174 (1936) 237–245
[23] E. Witt – Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grade p^n, J. Reine Angew. Math. 176 (1936) 126–140